Я.Я.Рущицкий, С.В.Синчило

О ДВУМЕРНЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ ВОЛНОВЫХ УРАВНЕНИЯХ, СООТВЕТСТВУЮЩИХ МОДЕЛИ МУРНАГАНА

Институт механики им. С.П. Тимошенко НАНУ,
ул. Нестерова 3, 03057, Киев, Украина; e-mail: rushch@inmech.kiev.ua

Abstract. The new two-dimensional nonlinear wave equations are derived for media nonlinearly elastic deforming according to the Murnaghan model. Four lines of simplification of the initial Murnaghan potential are considered. As a result, the basing on simplification of Murnaghan potential sixteen submodels (models of different levels) can be built. The new systems of nonlinear wave equations are shown in the paper for the most characteristic submodels.

Key words: two-dimensional hyperelastic wave motion model, submodels generated by Murnaghan model, wave equations of different power of nonlinearity, geometrical and physical nonlinearities.

Введение.

Обсуждаемое в статье направление анализа нелинейных упругих волн первоначально инициировано учеными-акустиками [1], которые выбрали (не обосновывая выбор, но в итоге удачно) из ряда существующих моделей описания нелинейности упругого деформирования материалов модель, основанную на упругом потенциале Мурнагана. Следует заметить, что модель Мурнагана описывает гиперупругий тип деформирования. Также уместно отметить, что переход от линейной упругой модели Гука к нелинейным моделям оказался в механике материалов достаточно сложным, особенно при описании неизотропных материалов. Наиболее известные модели – Сетха, Джона, Синьйорини, Мурнагана – были предложены для изотропных гиперупругих материалов. Однако, для модели Мурнагана существует обобщение, предложенное А.Н.Гузем для слабо анизотропных материалов [6]. Таким образом, полученные для изотропного случая результаты могут быть обобщены на случай слабой анизотропии.

Классическая теория упругости полагает, что деформация тела при ее теоретическом описании является линейной, если модель тела характеризуется линейными соотношениями (линейными соотношениями Коши и линейными определяющими соотношениями). В этом случае соответствующий упругий потенциал квадратично нелинеен относительно компонент тензора деформаций и конфигурации тела до деформации (отсчетная) и после деформации (актуальная) совпадают [3, 4, 6, 8, 9].

При переходе от малых деформаций к большим эти конфигурации отличаются – граница тела при деформировании изменяется. Эту особенность нелинейного процесса деформирования вместе с нелинейностью соотношений Коши относят к геометрической нелинейности. Физическая нелинейность в теории упругости классифицируется формально как нелинейная зависимость тензора напряжений от тензора деформаций при линейных соотношениях Коши. Различают жесткую и мягкую физические нелинейности. В случае гиперупругого деформирования различный выбор упругого потенциала имеет следствием различные варианты физической нелинейности.

Различие геометрической и физической нелинейностей принято в нелинейной теории упругости. Случаи раздельного анализа нелинейных задач теории упругости, когда учитывается только геометрическая или физическая нелинейность, общеприняты в теоретическом анализе и при аккуратных оговорках физически приемлемы.

В рамках множества упругих потенциалов случаю пренебрежения физической нелинейностью и учета лишь геометрической нелинейности формально соответствует упругий гармонический потенциал Джона [2 – 4] (иногда модель Джона относят к стандартным упругим моделям [4], иногда потенциал называют полулинейным [3]). Обычно он записывается в виде $\Phi = (1/2)\lambda (s_1)^2 + \mu s_2$, где s_1, s_2 – первый и второй базисные инварианты тензора деформаций Коши – Грина; λ, μ – упругие постоянные Ляме.

По внешнему виду потенциал Джона совпадает с потенциалом для упругого линейного изотропного материала $\Phi = (1/2)\lambda (I_1)^2 + \mu I_2$, где I_1, I_2 – первый и второй базисные алгебраические инварианты тензора деформаций Коши – Грина. В случае малых деформаций базисные и базисные алгебраические инварианты совпадают. Как известно, в случае немалых деформаций следует учитывать нелинейность в представлении тензора деформации Коши – Грина через вектор перемещений

$$\varepsilon_{ik} = \frac{1}{2}\left(u_{i,k} + u_{k,i} + u_{m,i}u_{m,k}\right). \tag{1}$$

Такое нелинейное представление следует учитывать и в упругом потенциале Мурнагана W , который представим в виде

$$W\left(\varepsilon_{ik}\right) = \frac{1}{2}\lambda\left(\varepsilon_{mm}\right)^2 + \mu\left(\varepsilon_{ik}\right)^2 + \frac{1}{3}A\varepsilon_{ik}\varepsilon_{im}\varepsilon_{km} + B\left(\varepsilon_{ik}\right)^2\varepsilon_{mm} + \frac{1}{3}C\left(\varepsilon_{mm}\right)^3, \tag{2}$$

где A, B, C – упругие постоянные Мурнагана.

Представление (2) допускает упрощения, которые приводят к ряду подмоделей для модели Мурнагана. Первый тип упрощения становится возможным при записи потенциала (2) через смещения u_k . В этом случае потенциал (2), который включает только нелинейные слагаемые второй и третьей степени от компонентов тензора деформаций, преобразуется в потенциал, состоящий из слагаемых второй – шестой степени от компонентов градиентов перемещений. Таким путем можно получить четыре подмодели в рамках модели Мурнагана. Простейшая подмодель (модель второго уровня) получается в случае сохранения лишь второй и третьей степеней. Именно эта подмодель была изначально выбрана в указанных выше пионерских исследованиях нелинейных упругих волн. Она соответствует следующему виду потенциала Мурнагана:

$$W = \frac{1}{2}\lambda\left(u_{m,m}\right)^2 + \frac{1}{4}\mu\left(u_{i,k} + u_{k,i}\right)^2 + \left(\mu + \frac{1}{4}A\right)u_{i,k}u_{m,i}u_{m,k} + \frac{1}{2}\left(\lambda + B\right)u_{m,m}\left(u_{i,k}\right)^2 +$$

$$+ \frac{1}{12}Au_{i,k}u_{k,m}u_{m,i} + \frac{1}{2}Bu_{i,k}u_{k,i}u_{m,m} + \frac{1}{3}C\left(u_{m,m}\right)^3. \tag{3}$$

Позже были исследованы [5] следующие три подмодели (когда учитывались слагаемые 2 – 4, 2 – 5 и 2 – 6 степеней).

Следует заметить, что одна и та же волна может быть исследована в рамках каждой из четырех подмоделей. Как было обнаружено при последующем анализе [6], учет слагаемых более высоких степеней по сравнению со слагаемыми третьей степени усложняет теоретическое описание волнового движения и обогащает решение новыми волновыми эффектами.

Иной способ построения подмоделей – стандартный для теории упругости; он основан на упрощении зависимости перемещений от координат $u_k = u_k\left(x_1, x_2, x_3, t\right)$. Здесь можно вводить три подмодели: трехмерную $u_k = u_k\left(x_1, x_2, x_3, t\right)$, двухмерную $u_k = u_k\left(x_1, x_2, t\right)$ и одномерную $u_k = u_k\left(x_1, t\right)$. Именно одномерная подмодель из этого набора моделей была объединена с простейшей моделью из предыдущего набора в указанных выше пионерских исследованиях нелинейных упругих волн. Ее можно понимать как одну из 12 показанных выше подмоделей. Эта квадратично нелинейная одномерная подмодель описывается таким вариантом потенциала Мурнагана:

$$W^{**}=(1/2)\lambda\left(u_{1,1}\right)^2+\mu\left[\left(u_{1,1}\right)^2+(1/2)\left(u_{2,1}\right)^2+(1/2)\left(u_{3,1}\right)^2\right]+ \tag{4}$$

$$+[\mu+(1/4)A]u_{1,1}\left[\left(u_{1,1}\right)^2+\left(u_{2,1}\right)^2+\left(u_{3,1}\right)^2\right]+(1/2)(\lambda+B)u_{1,1}\left[\left(u_{1,1}\right)^2+\left(u_{2,1}\right)^2+\left(u_{3,1}\right)^2\right]+$$

$$+(1/12)A\left(u_{1,1}\right)^3+(1/2)B\left(u_{1,1}\right)^3+(1/3)C\left(u_{1,1}\right)^3=$$

$$=(1/2)\left\{(\lambda+2\mu)\left(u_{1,1}\right)^2+\mu\left[\left(u_{2,1}\right)^2+\left(u_{3,1}\right)^2\right]\right\}+(1/6)\left[3(\lambda+2\mu)+2(A+3B+C)\right]\left(u_{1,1}\right)^3+$$

$$+(1/2)\left(\lambda+2\mu+(1/2)A+B\right)u_{1,1}\left[\left(u_{2,1}\right)^2+\left(u_{3,1}\right)^2\right]\qquad (u_k=u_k(x_1,t)).$$

Если учесть следующий порядок нелинейности (четвертый), то сама подмодель будет квадратично и кубически нелинейной, а соответствующий вариант потенциала будет иметь вид

$$W^{***}=W^{**}+(1/8)(\lambda+2\mu+A+2B)\left[\left(u_{1,1}\right)^2+\left(u_{2,1}\right)^2+\left(u_{3,1}\right)^2\right]^2+ \tag{5}$$

$$+(1/8)(3A+10B+4C)\left(u_{1,1}\right)^2\left[\left(u_{1,1}\right)^2+\left(u_{2,1}\right)^2+\left(u_{3,1}\right)^2\right].$$

В последующих подмоделях, включающих пятый и шестой порядки нелинейности, новые составляющие уже не будут зависеть от постоянных Ляме и будут иметь довольно простой вид, подобно второй новой составляющей в потенциале (5).

Выбор подмодели при исследовании волн определяется видом рассматриваемой волны. К примеру, выбор подмодели, соответствующей потенциалу (4), выглядит вполне естественным при анализе бегущих плоских волн, тогда как подмодели, соответствующие двухмерным вариантам потенциала, подходящие для анализа бегущих волн Рэлея, Стоунли, Лэмба, Лява.

Здесь следует указать, что для анализа упругих волн используются и другие типы потенциалов [6, 7, 13, 15] и также другие отличные от плоских волн (цилиндрические, крутильные) исследуются в рамках рассматриваемого подхода [6, 7, 11 – 14].

В каждой из 12 подмоделей, описанных выше, можно ввести две подмодели (модели третьего уровня), одна из которых будет учитывать только геометрическую нелинейность, а вторая – только физическую (формально первая будет включать нелинейные слагаемые только с упругими постоянными Ляме, тогда как вторая – только с упругими постоянными Мурнагана). Такое упрощение потенциала Мурнагана приводит к удвоению количества подмоделей, в итоге потенциал Мурнагана будет включать 24 варианта (24 подмодели).

К примеру, потенциал (4) может быть упрощен к двум вариантам

$$W^{**}=(1/2)\left\{(\lambda+2\mu)\left(u_{1,1}\right)^2+\mu\left[\left(u_{2,1}\right)^2+\left(u_{3,1}\right)^2\right]\right\}+$$

$$+(1/2)(\lambda+2\mu)\left\{\left(u_{1,1}\right)^3+u_{1,1}\left[\left(u_{2,1}\right)^2+\left(u_{3,1}\right)^2\right]\right\};$$

$$W^{**}=(1/2)\left\{(\lambda+2\mu)\left(u_{1,1}\right)^2+\mu\left[\left(u_{2,1}\right)^2+\left(u_{3,1}\right)^2\right]\right\}+$$

$$+(1/3)(A+3B+C)\left(u_{1,1}\right)^3+(1/4)(A+2B)u_{1,1}\left[\left(u_{2,1}\right)^2+\left(u_{3,1}\right)^2\right].$$

Рассмотрим далее двухмерную подмодель, соответствующую зависимости перемещений от координат x_1, x_3. Она будет определяться следующим вариантом потенциала Мурнагана:

$$W = \frac{1}{2}\lambda(\varepsilon_{11}+\varepsilon_{33})^2 + \mu\Big[(\varepsilon_{11})^2+(\varepsilon_{33})^2+(\varepsilon_{12})^2+(\varepsilon_{13})^2+(\varepsilon_{23})^2+(\varepsilon_{21})^2+(\varepsilon_{31})^2+(\varepsilon_{32})^2\Big]+ \quad (6)$$

$$+A\left[\frac{1}{3}(\varepsilon_{11})^3+\frac{1}{3}(\varepsilon_{33})^3+\varepsilon_{11}(\varepsilon_{12})^2+\varepsilon_{33}(\varepsilon_{32})^2+\varepsilon_{11}(\varepsilon_{13})^2+\varepsilon_{33}(\varepsilon_{31})^2+\varepsilon_{21}\varepsilon_{32}\varepsilon_{31}+\varepsilon_{12}\varepsilon_{13}\varepsilon_{23}\right]+$$

$$+B\Big[(\varepsilon_{11})^2+(\varepsilon_{33})^2+(\varepsilon_{12})^2+(\varepsilon_{13})^2+(\varepsilon_{23})^2+(\varepsilon_{21})^2+(\varepsilon_{31})^2+(\varepsilon_{32})^2\Big](\varepsilon_{11}+\varepsilon_{33})+\frac{1}{3}C(\varepsilon_{11}+\varepsilon_{33})^3.$$

Прежде всего, необходимо вычислить компоненты тензора деформаций Коши – Грина $\varepsilon_{nm} = \left(u_{n,m}+u_{m,n}+u_{k,n}u_{k,m}\right)/2$ для случая представления перемещений $u_k = u_k\left(x_1, x_3\right)$

$$\varepsilon_{11} = u_{1,1}+\frac{1}{2}\left(u_{1,1}u_{1,1}+u_{2,1}u_{2,1}+u_{3,1}u_{3,1}\right); \quad \varepsilon_{22}=0; \quad \varepsilon_{33} = u_{3,3}+\frac{1}{2}\left(u_{3,3}u_{3,3}+u_{2,3}u_{2,3}+u_{1,3}u_{1,3}\right);$$

$$\varepsilon_{13} = \varepsilon_{31} = \frac{1}{2}\left(u_{1,3}+u_{3,1}+u_{1,1}u_{1,3}+u_{2,1}u_{2,3}+u_{3,1}u_{3,3}\right); \quad \varepsilon_{12}=\varepsilon_{21}=\frac{1}{2}u_{2,1}; \quad \varepsilon_{23}=\varepsilon_{32}=\frac{1}{2}u_{2,3}. \quad (7)$$

Далее следует преобразовать выражение (6), подставляя в него представления (7). Для этого удобно предварительно вычислять отдельно каждое из пяти слагаемых, входящих в (6). Особенность этих слагаемых состоит в том, что отдельно взятое слагаемое содержит в коэффициенте лишь одну из пяти упругих постоянных. Пять новых слагаемых будут содержать нелинейные составляющие разных порядков относительно перемещений – слагаемые, соответствующие постоянным Ляме, будут содержать составляющие от второго до четвертого порядков, тогда как слагаемые, соответствующие постоянным Мурнагана, будут содержать составляющие от третьего до шестого порядков.

В итоге оказывается возможным записать 4 варианта потенциала Мурнагана по схеме, описанной выше для одномерного случая. Эти варианты будут содержать слагаемые с нелинейными составляющими разных порядков: 1) второй и третий; 2) второй – четвертый; 3) второй – пятый; 4) второй – шестой. Запишем далее все 4 варианта.

Вариант 1 –

$$W^{(2)} = \frac{1}{2}\lambda(u_{1,1}+u_{3,3})^2+\mu\left(u_{1,1}{}^2+u_{3,3}{}^2+\frac{1}{2}(u_{1,3}+u_{3,1})^2+\frac{1}{2}(u_{2,1}{}^2+u_{2,3}{}^2)\right). \quad (8)$$

Вариант 2 –

$$\begin{aligned} W^{(2-3)} = {} & W^{(2)}+\frac{1}{2}\lambda(u_{1,1}+u_{3,3})\left(u_{1,1}{}^2+u_{3,3}{}^2+u_{2,1}{}^2+u_{3,1}{}^2+u_{2,3}{}^2+u_{1,3}{}^2\right)+ \\ & +\mu\Big(u_{1,1}{}^3+u_{3,3}{}^3+u_{1,1}u_{2,1}{}^2+u_{3,3}u_{2,3}{}^2+(u_{1,1}+u_{3,3})(u_{3,1}{}^2+u_{1,3}{}^2+u_{1,3}u_{3,1})+ \\ & +u_{2,1}u_{2,3}(u_{1,3}+u_{3,1})\Big)+ \\ & +B(u_{1,1}+u_{3,3})\left(u_{1,1}{}^2+u_{3,3}{}^2+\frac{1}{2}(u_{2,1}{}^2+u_{2,3}{}^2)+\frac{1}{2}(u_{1,3}+u_{3,1})^2\right)+\frac{1}{3}C(u_{1,1}+u_{3,3})^3. \end{aligned} \quad (9)$$

Вариант 3 –

$$W^{(2-4)} = W^{(2-3)}+$$

$$+\frac{1}{2}\lambda\left(\frac{1}{4}(u_{1,1}{}^4+u_{3,3}{}^4+u_{3,1}{}^4+u_{1,3}{}^4+u_{2,1}{}^4+u_{2,3}{}^4)+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}(u_{1,1}{}^2+u_{3,3}{}^2)(u_{2,1}{}^2+u_{2,3}{}^2+u_{1,3}{}^2+u_{3,1}{}^2)\right)+$$

$$+\frac{1}{2}\lambda\left(\frac{1}{2}(u_{2,1}{}^2+u_{2,3}{}^2)(u_{1,3}{}^2+u_{3,1}{}^2)+\frac{1}{2}(u_{3,1}{}^2u_{1,3}{}^2+u_{2,1}{}^2u_{2,3}{}^2+u_{1,1}{}^2u_{3,3}{}^2)\right)+$$

$$+\mu\left(\frac{1}{4}(u_{1,1}{}^4+u_{3,3}{}^4+u_{3,1}{}^4+u_{1,3}{}^4+u_{2,1}{}^4+u_{2,3}{}^4)+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}\left(u_{2,1}{}^2(u_{1,1}{}^2+u_{2,3}{}^2+u_{3,1}{}^2)+u_{2,3}{}^2(u_{1,3}{}^2+u_{3,3}{}^2)\right)\right)+$$

$$+\mu\left(\frac{1}{2}(u_{1,1}{}^2+u_{3,3}{}^2)(u_{3,1}{}^2+u_{1,3}{}^2)+u_{2,1}u_{2,3}(u_{1,1}u_{1,3}+u_{3,1}u_{3,3})+u_{1,1}u_{1,3}u_{3,1}u_{3,3}\right)+$$

$$\begin{aligned}&+\frac{1}{4}A\left(2u_{1,1}{}^4+2u_{3,3}{}^4+(u_{1,1}{}^2+u_{3,3}{}^2)\left(\frac{5}{2}u_{3,1}{}^2+\frac{5}{2}u_{1,3}{}^2+3u_{3,1}u_{1,3}\right)+\right.\\&+\frac{1}{2}(u_{3,1}{}^2+u_{1,3}{}^2)^2+\frac{1}{2}(u_{2,1}{}^2+u_{2,3}{}^2)^2+\\&+2(u_{1,1}+u_{3,3})(u_{1,3}u_{2,1}u_{2,3}+u_{2,1}u_{2,3}u_{3,1})+\\&+\frac{5}{2}u_{1,1}{}^2u_{2,1}{}^2+\frac{5}{2}u_{3,3}{}^2u_{2,3}{}^2+2u_{1,1}u_{3,3}(u_{1,3}+u_{3,1})^2+\frac{1}{2}u_{2,1}{}^2u_{1,3}{}^2+\frac{1}{2}u_{2,3}{}^2u_{3,1}{}^2+\\&+u_{2,1}{}^2u_{3,1}{}^2+u_{2,3}{}^2u_{1,3}{}^2+u_{1,3}u_{3,1}(u_{3,1}{}^2+u_{1,3}{}^2+u_{2,1}{}^2+u_{2,3}{}^2)+\\&\left.+u_{2,1}u_{2,3}(u_{1,3}u_{1,1}+u_{3,1}u_{3,3})\right);\end{aligned}\tag{10}$$

$$+\frac{1}{4}B\left(6(u_{1,1}{}^4+u_{3,3}{}^4)+(u_{2,1}{}^4+u_{2,3}{}^4+u_{3,1}{}^4+u_{1,3}{}^4)+\right.$$

$$+(u_{1,1}{}^2+u_{3,3}{}^2)(7u_{1,3}{}^2+7u_{3,1}{}^2+6u_{3,1}u_{1,3})+$$

$$+4u_{1,1}u_{3,3}(u_{1,1}{}^2+u_{3,3}{}^2+u_{2,3}{}^2+u_{2,1}{}^2+2u_{1,3}{}^2+2u_{3,1}{}^2+u_{1,1}u_{3,3}+2u_{1,3}u_{3,1})+$$

$$+2(u_{1,3}{}^2+u_{3,1}{}^2+u_{1,3}u_{3,1})(u_{2,1}{}^2+u_{2,3}{}^2+u_{3,1}u_{1,3})+$$

$$+4u_{2,1}u_{2,3}(u_{1,1}+u_{3,3})(u_{1,3}+u_{3,1})+$$

$$\left.+7u_{1,1}{}^2u_{2,1}{}^2+3u_{1,1}{}^2u_{2,3}{}^2+7u_{3,3}{}^2u_{2,3}{}^2+3u_{3,3}{}^2u_{2,1}{}^2+2u_{2,1}{}^2u_{2,3}{}^2\right)+$$

$$+\frac{1}{2}C(u_{1,1}{}^2+u_{3,3}{}^2)(u_{1,1}{}^2+u_{3,3}{}^2+u_{1,3}{}^2+u_{3,1}{}^2+u_{2,1}{}^2+u_{2,3}{}^2).$$

Вариант 4 –

$$
\begin{aligned}
& W^{(2-5)} = W^{(2-4)} + \\
& \frac{1}{4}A\Big(u_{1,1}{}^5 + u_{3,3}{}^5 + u_{1,1}u_{2,1}{}^4 + u_{3,3}u_{2,3}{}^4 + (u_{1,1}+u_{3,3})(u_{3,1}{}^4 + u_{1,3}{}^4) + \\
& +2u_{1,1}{}^3u_{2,1}{}^2 + 2u_{3,3}{}^3u_{2,3}{}^2 + 2(u_{1,1}{}^3 + u_{3,3}{}^3)(u_{1,3}{}^2 + u_{3,1}{}^2 + 0,5u_{3,1}u_{1,3}) + \\
& +(u_{1,1}+u_{3,3})(u_{1,3}{}^2 + u_{3,1}{}^2)(u_{1,1}u_{3,3} + u_{3,1}u_{1,3}) + u_{2,1}u_{2,3}(u_{1,3}{}^3 + u_{3,1}{}^3) + \\
& +u_{2,1}{}^2u_{2,3}{}^2(u_{2,1}+u_{2,3})(u_{1,3}+u_{3,1}) + \\
& +u_{2,1}u_{2,3}(3u_{1,1}{}^2u_{1,3} + 3u_{3,3}{}^2u_{3,1} + u_{1,1}{}^2u_{3,1} + u_{3,3}{}^2u_{1,3}) + \\
& +(u_{1,1}+u_{3,3})(u_{1,3}{}^2u_{3,1}{}^2 + u_{2,1}{}^2u_{2,3}{}^2) + (u_{1,1}u_{1,3} + u_{3,3}u_{3,1})(u_{2,1}{}^2 + u_{2,3}{}^2)(u_{1,3}+u_{3,1}) + \\
& +2u_{1,1}u_{2,1}{}^2u_{3,1}{}^2 + 2u_{3,3}u_{2,3}{}^2u_{1,3}{}^2 + 3u_{1,1}u_{1,3}u_{3,1}u_{3,3}(u_{1,1}+u_{3,3}) + \\
& +2u_{1,1}u_{3,3}u_{2,1}u_{2,3}(u_{1,3}+u_{3,1}) + u_{3,1}u_{2,1}u_{2,3}u_{1,3}(u_{1,3}+u_{3,1})\Big) + \\
& +B\bigg(\frac{3}{4}u_{1,1}u_{2,1}{}^4 + \frac{1}{4}u_{1,1}u_{2,3}{}^4 + \frac{1}{4}u_{3,3}u_{2,1}{}^4 + \frac{3}{4}u_{3,3}u_{2,3}{}^4 + \frac{1}{2}u_{1,1}{}^3(3u_{2,1}{}^2 + u_{2,3}{}^2) + \\
& +\frac{1}{2}u_{3,3}{}^3(u_{2,1}{}^2 + 3u_{2,3}{}^2) + \frac{1}{2}u_{1,1}u_{3,3}(u_{1,1}+u_{3,3})(u_{2,1}{}^2 + u_{2,3}{}^2) + \\
& +\frac{1}{2}u_{2,1}u_{2,3}(3u_{1,1}{}^2u_{1,3} + 3u_{3,3}{}^2u_{3,1} + u_{1,1}{}^2u_{3,1} + u_{3,3}{}^2u_{1,3}) + \\
& +u_{2,1}{}^2u_{2,3}{}^2(u_{1,1}+u_{3,3}) + u_{1,1}u_{3,3}u_{2,1}u_{2,3}(u_{3,1}+u_{1,3}) + \\
& +\frac{1}{2}(u_{2,1}{}^2 + u_{2,3}{}^2)\Big(u_{1,3}u_{3,1}(u_{1,1}+u_{3,3}) + u_{2,1}u_{2,3}(u_{1,3}+u_{3,1})\Big) + \\
& +\frac{3}{2}u_{1,1}u_{2,1}{}^2u_{3,1}{}^2 + u_{3,3}u_{2,1}{}^2u_{3,1}{}^2 + u_{1,1}u_{2,1}{}^2u_{1,3}{}^2 + \frac{1}{2}u_{3,3}u_{2,1}{}^2u_{1,3}{}^2 + \\
& +\frac{1}{2}u_{1,1}u_{2,3}{}^2u_{3,1}{}^2 + u_{3,3}u_{2,3}{}^2u_{3,1}{}^2 + u_{1,1}u_{2,3}{}^2u_{1,3}{}^2 + \frac{3}{2}u_{3,3}u_{2,3}{}^2u_{1,3}{}^2\bigg) + \\
& +C(u_{1,1}+u_{3,3})(u_{1,1}{}^4 + u_{3,3}{}^4 + u_{1,3}{}^4 + u_{3,1}{}^4 + u_{2,1}{}^4 + u_{2,3}{}^4).
\end{aligned}
\tag{11}
$$

Каждому из вариантов будет соответствовать своя подмодель, в рамках которой будут получаться свои системы нелинейных волновых уравнений. Они находятся по следующей процедуре: сначала вычисляются компоненты в общем случае несимметричного тензора напряжений Кирхгоффа t_{nm} по формуле $t_{nm} = (\partial W / \partial u_{m,n})$, затем они подставляются в уравнения движения

$$
t_{11,1} + t_{31,3} = \rho u_{1,tt};\ t_{12,1} + t_{32,3} = \rho u_{2,tt};\ t_{13,1} + t_{33,3} = u_{3,tt}. \tag{12}
$$

Запишем ниже соответствующие системы нелинейных волновых уравнений.

Подмодель 1 (квадратично нелинейная) –

$$
\rho u_{1,tt} - (\lambda + 2\mu)u_{1,11} - \mu(u_{1,33} + u_{3,13}) = 0; \quad \rho u_{2,tt} - \mu(u_{2,11} + u_{2,33}) = 0;
$$

$$
\rho u_{3,tt} - (\lambda + 2\mu)u_{3,33} - \mu(u_{1,31} + u_{3,11}) = 0. \tag{13}
$$

В следующих уравнениях представим лишь новые по сравнению с предыдущей подмоделью нелинейные составляющие.

Подмодель 2 (квадратично и кубически нелинейная).

Уравнение 1 (уравнение 3 получаем из уравнения 1 заменой индексов) –

$$\lambda\Big(u_{1,1}(3u_{1,11}+u_{1,33}+u_{3,31})+u_{1,3}(u_{1,31}+u_{1,13}+u_{3,33})+u_{3,3}(u_{1,33}+u_{1,11}+u_{3,31})+$$
$$+u_{3,1}u_{3,11}+u_{2,1}u_{2,11}+u_{2,3}u_{2,31}\Big)+$$
$$+\mu\Big(u_{1,1}(6u_{1,11}+2u_{1,33}+u_{3,13})+u_{1,3}(2u_{1,31}+u_{3,11}+2u_{1,13}+2u_{3,33})+$$
$$+u_{3,1}(2u_{3,11}+u_{1,31}+u_{1,13}+u_{3,33})+u_{3,3}(2u_{1,33}+u_{3,13})+u_{2,1}(2u_{2,11}+u_{2,33})+u_{2,3}u_{2,13}\Big)+$$
$$\frac{1}{4}A\Big(8u_{1,1}u_{1,11}+2u_{2,1}u_{2,11}+u_{2,1}u_{2,33}+u_{2,3}u_{2,13}+$$
$$+2(u_{1,3}+u_{3,1})(u_{1,13}+u_{1,31}+u_{3,11}+u_{3,33})+2(u_{1,1}+u_{3,3})(u_{1,33}+u_{3,13})\Big)+$$
$$+B\Big(2(3u_{1,1}+u_{3,3})u_{1,11}+(u_{1,1}+u_{3,3})(u_{1,33}+u_{3,13}+2u_{3,31})+$$
$$+u_{2,1}u_{2,11}+u_{2,3}u_{2,31}+(u_{1,3}+u_{3,1})(u_{1,13}+u_{1,31}+u_{3,11}+u_{3,33})\Big)+$$
$$+2C(u_{1,1}+u_{3,3})(u_{1,11}+u_{3,31}).$$

Уравнение 2 –

$$\lambda\Big(u_{1,1}u_{2,11}+u_{1,1}u_{2,33}+u_{3,3}u_{2,11}+u_{3,3}u_{2,33}+u_{2,1}u_{1,11}+u_{2,1}u_{3,31}+u_{2,3}u_{1,13}+u_{2,3}u_{3,33}\Big)+$$
$$+\mu\Big(2u_{1,1}u_{2,11}+2u_{3,3}u_{2,33}+2u_{2,1}u_{1,11}+2u_{2,3}u_{3,33}+u_{1,3}u_{2,13}+u_{1,3}u_{2,31}+u_{3,1}u_{2,13}+u_{3,1}u_{2,31}+$$
$$+u_{2,1}u_{1,33}+u_{2,1}u_{3,13}+u_{2,3}u_{1,31}+u_{2,3}u_{3,11}\Big)+$$
$$+\frac{1}{4}A\Big(2u_{1,1}u_{2,11}+2u_{3,3}u_{2,33}+(u_{2,31}+u_{2,13})(u_{1,3}+u_{3,1})+$$
$$+u_{2,1}(2u_{1,11}+u_{1,33}+u_{3,13})+u_{2,3}(2u_{3,33}+u_{1,31}+u_{3,11})\Big)+$$
$$+B\Big((u_{2,11}+u_{2,33})(u_{1,1}+u_{3,3})+u_{2,1}(u_{1,11}+u_{3,31})+u_{2,3}(u_{1,13}+u_{3,33})\Big).$$

Подмодель 3 (включающая нелинейные составляющие второго-четвертого порядков). В связи с большими и сложными составляющими при λ, μ, A, B далее будут представлены только составляющие при C.

Уравнение 1 –

$$\frac{1}{2}\lambda\Big(u_{1,11}(3u_{1,1}{}^2+u_{1,3}{}^2+u_{2,1}{}^2+u_{2,3}{}^2+u_{3,1}{}^2+u_{3,3}{}^2)+$$
$$+2u_{1,1}(u_{1,3}u_{1,31}+u_{2,1}u_{2,11}+u_{2,3}u_{2,31}+u_{3,1}u_{3,11}+u_{3,3}u_{3,31})+$$
$$+2u_{1,3}(u_{1,1}u_{1,13}+u_{2,1}u_{2,13}+u_{2,3}u_{2,33}+u_{3,1}u_{3,13}+u_{3,3}u_{3,33})+$$
$$+u_{1,31}(u_{1,1}{}^2+3u_{1,3}{}^2+u_{2,1}{}^2+u_{2,3}{}^2+u_{3,1}{}^2+u_{3,3}{}^2)\Big)+$$
$$+\mu\Big(u_{1,11}(3u_{1,1}{}^2+u_{1,3}{}^2+u_{2,1}{}^2+u_{3,1}{}^2)+$$
$$+u_{1,1}(2u_{1,3}u_{1,31}+2u_{2,1}u_{2,11}+u_{2,1}u_{2,33}+u_{2,3}u_{2,13}+2u_{3,1}u_{3,11}+u_{3,1}u_{3,33}+u_{3,3}u_{3,13})+$$

$$+u_{1,3}(2u_{1,1}u_{1,13}+u_{2,1}u_{2,31}+u_{2,3}u_{2,11}+2u_{2,3}u_{2,33}+u_{3,1}u_{3,31}+u_{3,3}u_{3,11}+2u_{3,3}u_{3,33})+$$

$$+u_{1,31}(u_{2,1}u_{2,3}+u_{3,1}u_{3,3})+u_{1,13}(u_{2,1}u_{2,3}+u_{3,1}u_{3,3})+u_{1,33}(u_{1,1}{}^2+3u_{1,3}{}^2+u_{2,3}{}^2+u_{3,3}{}^2)+$$

$$+C\Big(2u_{1,1}(2u_{3,3}u_{3,31}+2u_{1,3}u_{1,13}+u_{1,1}u_{1,33}+u_{1,3}u_{1,31}+u_{2,1}u_{2,11}+u_{3,1}u_{3,11}+u_{2,3}u_{2,31})+$$

$$+u_{1,11}(6u_{1,1}{}^2+2u_{3,3}{}^2+u_{1,3}{}^2+u_{2,1}{}^2+u_{3,1}{}^2+u_{2,3}{}^2)+u_{3,3}(2u_{1,3}u_{3,33}+u_{3,3}u_{1,33})\Big).$$

Уравнение 2 –

$$+C\Big((u_{1,1}{}^2+u_{3,3}{}^2)(u_{2,11}+u_{2,33})+2u_{2,1}(u_{1,1}u_{1,11}+u_{3,3}u_{3,31})+2u_{2,3}(u_{1,1}u_{1,13}+u_{3,3}u_{3,33})\Big).$$

Подмодель 4 (включающая нелинейные составляющие второго-пятого порядков).
Уравнение 1 –

$$+4C\Big(5u_{1,1}{}^3u_{1,11}+u_{1,1}{}^3u_{3,31}+u_{3,3}{}^3u_{3,31}+u_{1,3}{}^3u_{1,31}+u_{1,3}{}^3u_{1,13}+u_{1,3}{}^3u_{3,33}+$$

$$+u_{3,1}{}^3u_{3,11}+u_{2,1}{}^3u_{2,11}+u_{2,3}{}^3u_{2,31}+3u_{3,3}u_{1,1}{}^2u_{1,11}+3u_{1,3}{}^2u_{1,33}(u_{1,1}+u_{3,3})\Big).$$

Уравнение 2 –

$$+4C\Big(3(u_{1,1}+u_{3,3})(u_{2,1}{}^2u_{2,11}+u_{2,3}{}^2u_{2,33})+u_{2,1}{}^3(u_{1,11}+u_{3,31})+u_{2,3}{}^3(u_{1,13}+u_{3,33})\Big).$$

Каждой из подмоделей можно поставить в соответствие две подподмодели, одна из которых будет учитывать только геометрическую нелинейность, а вторая – только физическую. К примеру, для подмодели 1 с учетом только квадратических и кубических нелинейных составляющих, такие подподмодели будут характеризоваться следующими системами нелинейных волновых уравнений.

Подподмодель 1Г –

$$\rho u_{1,tt}-(\lambda+2\mu)u_{1,11}=\lambda\Big(u_{1,1}(3u_{1,11}+u_{1,33}+u_{3,31})+u_{1,3}(u_{1,31}+u_{1,13}+u_{3,33})+$$

$$+u_{3,3}(u_{1,33}+u_{1,11}+u_{3,31})+u_{3,1}u_{3,11}+u_{2,1}u_{2,11}+u_{2,3}u_{2,31}\Big)+\mu(u_{1,33}+u_{3,13})+$$

$$+\mu\Big(u_{1,1}(6u_{1,11}+2u_{1,33}+u_{3,13})+u_{1,3}(2u_{1,31}+2u_{1,13}+2u_{3,33}+u_{3,11})+u_{2,3}u_{2,13}+$$

$$+u_{3,1}(2u_{3,11}+u_{1,31}+u_{1,13}+u_{3,33})+u_{3,3}(2u_{1,33}+u_{3,13})+u_{2,1}(2u_{2,11}+u_{2,33})\Big);$$

$$\rho u_{2,tt}-\mu(u_{2,11}+u_{2,33})=\lambda\Big(u_{1,1}u_{2,11}+u_{1,1}u_{2,33}+u_{3,3}u_{2,11}+u_{3,3}u_{2,33}+u_{2,1}u_{1,11}+u_{2,1}u_{3,31}+$$

$$+u_{2,3}u_{1,13}+u_{2,3}u_{3,33}\Big)+\mu\Big(u_{1,1}(6u_{1,11}+2u_{1,33}+u_{3,13})+u_{3,3}(2u_{1,33}+u_{3,13})+u_{2,3}u_{2,13}+$$

$$+u_{1,3}(2u_{1,31}+u_{3,11}+2u_{1,13}+2u_{3,33})+u_{3,1}(2u_{3,11}+u_{1,31}+u_{1,13}+u_{3,33})+u_{2,1}(2u_{2,11}+u_{2,33})\Big);$$

Подподмодель 1Ф –

$$\rho u_{1,tt}-(\lambda+2\mu)u_{1,11}=$$

$$=\frac{1}{4}A\Big(8u_{1,1}u_{1,11}+2u_{2,1}u_{2,11}+u_{2,1}u_{2,33}+u_{2,3}u_{2,13}+2(u_{1,1}+u_{3,3})(u_{1,33}+u_{3,13})+$$

$$+2(u_{1,3}+u_{3,1})(u_{1,13}+u_{1,31}+u_{3,11}+u_{3,33})\Big)+$$

$$+B\Big(2(3u_{1,1}+u_{3,3})u_{1,11}+(u_{1,1}+u_{3,3})(u_{1,33}+u_{3,13}+2u_{3,31})+$$

$$+u_{2,1}u_{2,11}+u_{2,3}u_{2,31}+(u_{1,3}+u_{3,1})(u_{1,13}+u_{1,31}+u_{3,11}+u_{3,33})\Big)+$$

$$+2C(u_{1,1}+u_{3,3})(u_{1,11}+u_{3,31});$$

$$\rho u_{2,tt}-\mu(u_{2,11}+u_{2,33})=\frac{1}{4}A\Big(2u_{1,1}u_{2,11}+2u_{3,3}u_{2,33}+(u_{2,31}+u_{2,13})(u_{1,3}+u_{3,1})+$$

$$+u_{2,1}(2u_{1,11}+u_{1,33}+u_{3,13})+u_{2,3}(2u_{3,33}+u_{1,31}+u_{3,11})\Big)+B\Big((u_{2,11}+u_{2,33})(u_{1,1}+u_{3,3})+$$

$$+u_{2,1}(u_{1,11}+u_{3,31})+u_{2,3}(u_{1,13}+u_{3,33})\Big).$$

Следует указать еще одну – четвертую – линию упрощения нелинейных волновых уравнений: в некоторых случаях соответствующие подподмоделям нелинейные волновые уравнения движения можно упростить, пренебрегая нелинейным перекрестным влиянием перемещений (такое упрощение, к примеру, используется при исследовании нелинейных волновых уравнений методом медленно изменяющихся амплитуд [3, 6, 7, 16]).

К примеру, для подподмоделей 1Г и 1Ф такие подмодели четвертого уровня будут характеризоваться следующими системами нелинейных волновых уравнений.

Подподмодель 1Г –

$$\rho u_{1,tt}-(\lambda+2\mu)u_{1,11}-\mu(u_{1,33}+u_{3,13})=$$

$$=\lambda\Big(u_{1,1}(3u_{1,11}+u_{1,33})+u_{1,3}(u_{1,31}+u_{1,13})+u_{3,3}u_{3,31}+u_{3,1}u_{3,11}+u_{2,1}u_{2,11}+u_{2,3}u_{2,31}\Big)+$$

$$+\mu\Big(2u_{1,1}(3u_{1,11}+u_{1,33})+2u_{1,3}(u_{1,31}+u_{1,13})+u_{2,3}u_{2,13}+$$

$$+u_{3,3}u_{3,13}+u_{3,1}(2u_{3,11}+u_{3,33})+u_{2,1}(2u_{2,11}+u_{2,33})\Big);$$

$$\rho u_{2,tt}-\mu(u_{2,11}+u_{2,33})=\mu\Big(2u_{1,1}(3u_{1,11}+u_{1,33})+u_{3,3}u_{3,13}+u_{2,3}u_{2,13}+$$

$$+2u_{1,3}(u_{1,31}+u_{1,13})+u_{3,1}(2u_{3,11}+u_{3,33})+u_{2,1}(2u_{2,11}+u_{2,33})\Big).$$

Подподмодель 1Ф –

$$\rho u_{1,tt}-(\lambda+2\mu)u_{1,11}=\frac{1}{4}A\Big(2u_{1,1}(4u_{1,11}+u_{1,33})+2u_{1,3}(u_{1,13}+u_{1,31})+2u_{3,1}(u_{3,11}+u_{3,33})+$$

$$+2u_{3,3}u_{3,13}+u_{2,1}(2u_{2,11}+u_{2,33})+u_{2,3}u_{2,13}\Big)+B\Big(u_{1,1}(6u_{1,11}+u_{1,33})+u_{3,3}(u_{3,13}+2u_{3,31})+$$

$$+u_{2,1}u_{2,11}+u_{2,3}u_{2,31}+u_{1,3}(u_{1,13}+u_{1,31})+u_{3,1}(u_{3,11}+u_{3,33})\Big)+2C(u_{1,1}u_{1,11}+u_{3,3}u_{3,31});$$

$$\rho u_{2,tt}-\mu(u_{2,11}+u_{2,33})=0.$$

Обратим внимание на то, что для всех вариантов в уравнениях первое и третье уравнения получаем друг из друга заменой индексов 1 на 3.

Заключение.

В статье предложены новые двумерные нелинейные волновые уравнения для сред, которые деформируются упруго нелинейно согласно модели Мурнагана. Рассмотрены четыре линии упрощения исходного потенциала Мурнагана. В результате могут быть построены шестнадцать подмоделей (моделей разных уровней), основанных на упрощении начального потенциала Мурнагана. Для наиболее характерных подмоделей приведены новые системы нелинейных волновых уравнений. Полученные новые варианты двумерных волновых уравнений позволяют исследовать бегущие волны Рэлея, Стоунли, Лэмба, Лява в нелинейной постановке.

Р Е З Ю М Е . Запропоновано нові двовимірні нелінійні хвильові рівняння для середовищ, які деформуються пружно нелінійно згідно з моделлю Мурнагана. Розглянуто чотири лінії спрощення початкового потенціалу Мурнагана. В результаті можуть бути побудовані шістнадцять підмоделей (моделей різних рівнів), основаних на спрощенні початкового потенціалу Мурнагана. Для найбільш характерних підмоделей в статті приведено нові системи нелінійних хвильових рівнянь.

1. *Зарембо Л.К., Красильников В.А.* Введение в нелинейную акустику.– М.: Наука, 1966.– 519с.
2. *Лурье А.И.* Нелинейная теория упругости. – М.: Наука, 1980. – 512 с.
3. *Рущицький Я.Я., Цурпал С.І.* Хвилі в матеріалах з мікроструктурою. – К.: Інст. механіки ім. С.П. Тимошенка, 1998. – 377 с.
4. *Черных К.Ф.* Нелинейная теория упругости в машиностроительных расчетах. – Л.: Машиностроение, 1986. – 336с.
5. *Bloembergen N.* Nonlinear Optics. A Lecture Note. – New York: W.A.Benjamin, Inc. 1965. – 424 p.
6. *Cattani C., Rushchitsky J.J.* Wavelet and Wave Analysis as applied to Materials with Micro or Nanostructure. – Singapore – London: World Scientific, 2007. – 466 p.
7. *Erofeev V.I.* Wave Processes in Solids with Microstructure. – Singapore – London, World Scientific, 2003. – 286 p.
8. *Holzapfel G. A.* Nonlinear Solid Mechanics. A Continuum Approach for Engineering. – Chichester: John Wiley & Sons Ltd, 2006. – 455 p.
9. *Ogden R.W.* The Nonlinear Elastic Deformations. – New York: Dover, 1997. – 256 p.
10. *Rushchitsky J.J.* Quadratically Nonlinear Cylindrical Hyperelastic Waves: Derivation of Wave Equations for Plane-Strain State // Int. Appl. Mech. – 2005. – **41**, N 5. – P. 496 – 505.
11. *Rushchitsky J.J.* Quadratically Nonlinear Cylindrical Hyperelastic Waves: Derivation of Wave Equations for Axisymmetric and other States // Int. Appl. Mech. – 2005. – **41**, N 6. – P. 646 – 656.
12. *Rushchitsky J.J.* Quadratically Nonlinear Cylindrical Hyperelastic Waves: Primary Analysis of Evolution // Int. Appl. Mech. – 2005. – **41**, N 7. – P. 770 – 777.
13. *Rushchitsky J.J., Cattani C.* Similarities and Differences Between the Murnaghan and Signorini Descriptions of the Evolution of Quadratically Nonlinear Hyperelastic Plane Waves // Int. Appl. Mech. – 2006. – **42**, N 9. – P. 997 – 1010.
14. *Rushchitsky J.J., Symchuk Ya.V.* Quadratic Nonlinear Torsional Hyperelastic Waves in Isotropic Cylinders: Primary Analysis of Evolution // Int. Appl. Mech. – 2008. – **44**, N 3. – P. 304 – 312.
15. *Sgoureva-Philippakos Rusina.* Nonlinear effects in elastic Rayleigh waves. Dissertation (Ph.D.) – California Insitute of Technology, 1998. – 116 p.
16. *Yariv A.* Quantum Electronics. – New York: John Wiley & Sons, Inc., 1967. – 455 p.

Поступила 09.09.2011 Утверждена в печать 06.06.2013