

О.С.Лимарченко¹, Р.В.Ткаченко²

**ВЛИЯНИЕ ПРУЖИННОГО ЗАКРЕПЛЕНИЯ НА ДИНАМИКУ
ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО РЕЗЕРВУАРА С ЖИДКОСТЬЮ,
НАХОДЯЩЕГОСЯ НА ПОДВИЖНОЙ ПЛАТФОРМЕ**

*Киевский национальный университет им. Тараса Шевченко,
пр-т академика Глушкова 4-е, Киев, Украина;
e-mail: ¹Otelim2010@yahoo.com ²terri_v@mail.ru*

Abstract. A mathematical model is constructed for a combined motion of a rigid cylindrical reservoir filled by liquid with a free surface and a movable platform joined to the reservoir by a spring. The nonlinear oscillations of this system are studied for the case when a harmonic force is applied to the movable platform.

Key words: rigid cylindrical reservoir, liquid with a free surface, movable platform, nonlinear oscillations, variational algorithm.

Введение.

Актуальность и решение задачи динамики конструкций с жидкостью со свободной поверхностью при разных способах закрепления связаны с развитием современной техники. Резервуары с жидкостью, находящиеся на подвижной платформе, применяются в инженерных конструкциях в машиностроении, ракетной технике, самолетостроении, средствах транспортировки и хранения жидких грузов [1, 13, 14]. Различные аспекты поведения подобных систем без наличия упругих элементов рассмотрены в работах [3 – 9, 13, 14, 16 – 20]. В то же время в работах [10 – 12, 15, 21] исследованы задачи влияния упругих свойств конструкций, контактирующих с жидкостью, однако меньшее внимание уделено в этих работах движению жидкости со свободной поверхностью. В математическом плане такие задачи описываются уравнениями неоднородной структуры (связанная нелинейная система обыкновенных дифференциальных уравнений и нелинейная краевая задача со свободной границей). Аналитические решения таких нестационарных нелинейных краевых задач до настоящего времени не получены, поэтому применяются приближенные методы, основанные преимущественно на вариационных алгоритмах и методах нелинейной механики. Цель данной работы состоит в исследовании нелинейных совместных колебаний абсолютно твердого цилиндрического резервуара, заполненного жидкостью со свободной поверхностью, присоединенного пружиной к платформе, под действием гармонического нагружения.

1. Постановка задачи. Объект исследования.

Рассмотрим движение в горизонтальной плоскости абсолютно твердого цилиндрического резервуара, частично заполненного жидкостью, присоединенного пружиной к подвижной платформе. В начальный момент времени система «платформа – резервуар с жидкостью» находится в покое. К платформе приложена гармоническая сила $F = A \cos(\omega t)$ ($\omega = 3,8; 4,0; 4,14; 4,3; 5,2$, $A = 662\text{H}$). Общий вид такой механи-

ческой системы показан на рис. 1, где τ – область, занимаемая жидкостью в данный момент времени; S – возмущенная свободная поверхность жидкости; S_0 – невозмущенная свободная поверхность жидкости; Σ_0 и Σ – области контакта жидкости со стенками резервуара в невозмущенном и возмущенном состояниях.

Обозначим $z = \xi(x, y, t)$ – уравнение свободной поверхности жидкости в возмущенном состоянии.

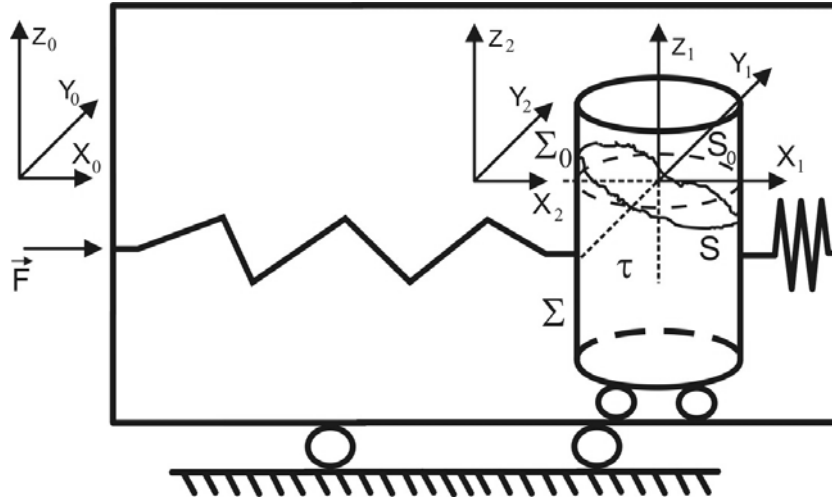


Рис.1

Математическая модель механической системы.

Для решения задачи применим вариационный принцип Гамильтона –Остроградского. Полагаем, что жидкость однородная, несжимаемая, идеальная. В начальный момент времени вихревые движения жидкости отсутствуют, влиянием сил поверхностного натяжения пренебрегаем. При построении математической модели движения системы «жидкость – резервуар на пружинном закреплении» в формулировку задачи входят кинематические и динамические условия. К кинематическим условиям относятся: уравнение неразрывности жидкости в цилиндре условие неперетекания на границе контакта тело – жидкость и на свободной поверхности жидкости, т. е.

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right|_{\Sigma} = \vec{V}_0 \cdot \vec{n} ; \quad \left. \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right|_S = \vec{V}_0 \cdot \vec{n} + \frac{\frac{\partial \xi}{\partial t}}{\sqrt{1 + (\vec{\nabla} \xi)^2}}, \quad (1)$$

где $\Delta \varphi = 0$ в τ , $\varphi = \varphi_0 + \vec{\varepsilon} \cdot \vec{r}$; \vec{V}_0 – вектор скорости движения резервуара; \vec{r} – радиус-вектор точек области τ ; $\vec{\varepsilon}$ – вектор поступательного движения резервуара; \vec{u} – перемещение платформы относительно резервуара; φ – потенциал скоростей жидкости. Принимаем, что в начальный момент времени система находится в покое. Динамические граничные условия получаем из принципа Гамильтона – Остроградского как естественные.

Для кинетической и потенциальной энергий для каждого из элементов системы имеем равенства

$$T_l = \frac{1}{2} \rho \int_{\tau} (\vec{\nabla} \varphi + \dot{\vec{\varepsilon}})^2 d\tau ; \quad T_{res} = \frac{1}{2} M_{res} \dot{\vec{\varepsilon}}^2 ; \quad T_{fr} = \frac{1}{2} M_{fr} (\dot{\vec{\varepsilon}} + \dot{\vec{u}})^2 ; \quad (2)$$

$$P_l = \frac{1}{2} \rho g \int_{S_0} \xi^2 dS; \quad P_{res} = 0; \quad P_f = F \varepsilon_x; \quad P_{spr} = \frac{1}{2} c \varepsilon_x^2; \quad P_{fr} = \frac{1}{2} c \dot{u}^2. \quad (3)$$

Здесь T_l , T_{res} , T_{fr} – кинетическая энергия жидкости, резервуара и платформы; P_l , P_{res} , P_{fr} – соответственно, потенциальная энергия жидкости, резервуара и платформы; P_f – потенциальная энергия, обусловленная приложенной силой (условное представление); P_{spr} – потенциальная энергия деформации пружины; ρ – плотность жидкости; M_{res} – масса резервуара; M_{fr} – масса платформы; c – коэффициент жесткости пружины.

Учитывая выражения (2), (3), запишем функцию Лагранжа для данной системы

$$L = \frac{1}{2} \rho \int_{\tau} (\vec{\nabla} \varphi + \dot{\varepsilon})^2 d\tau + \frac{1}{2} M_p (\dot{\varepsilon})^2 + \frac{1}{2} M_{fr} (\dot{\varepsilon} + \dot{u})^2 - \frac{1}{2} \rho g \int_{S_0} \xi^2 dS - \frac{1}{2} c u^2 - \vec{F} \cdot (\vec{\varepsilon} + \vec{u})$$

Кинематические граничные условия далее рассматриваем как механические связи, накладывающие ограничения на вариации в принципе Гамильтона – Остроградского

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = 0. \quad (4)$$

Из этого принципа следуют: динамическое граничное условие на свободной поверхности; уравнения движения резервуара и платформы.

Исследования нелинейной динамики совместного движения резервуара, жидкости, частично заполняющей его, и подвижной платформы, к которой пружины присоединен резервуар, осуществляется на основе многомодовой модели работы [1].

3. Построение дискретной модели системы.

Нелинейная дискретная модель динамики совместного движения резервуара с жидкостью со свободной поверхностью, присоединенного пружинами к подвижной платформе, построена на основе метода Канторовича, примененного к вариационной формулировке задачи, основанной на вариационном принципе Гамильтона – Остроградского [1]. Для величин φ , ξ применим разложение решения по формам собственных колебаний ψ_n из задачи о движении ограниченного объема жидкости в подвижном резервуаре, которые удовлетворяют кинематическим граничным условиям на твердых стенках и условиям на свободной поверхности жидкости в линеаризованном виде. Решение нелинейной задачи представим в виде

$$\varphi = \sum_n b_n(t) \psi_n(r, \theta) \frac{\text{ch} \chi_n(z+H)}{\chi_n \text{sh} \chi_n H}; \quad \xi = \sum_i a_i(t) \psi_i(r, \theta), \quad (5)$$

где a_i – амплитудные параметры возбуждения форм собственных колебаний жидкости [1]. Кинематические граничные условия на свободной поверхности жидкости в нелинейной форме удовлетворяются на основе метода Галеркина [1].

Удовлетворяя условию (1), можно определить зависимость b_n от a_n . Заметим, что для безвихревого движения идеальной однородной жидкости движение границ полностью определяет движение всего объема жидкости. Поэтому именно амплитудные параметры a_n приняты в качестве независимых параметров движения жидкости. Теперь все связи в системе исключены, количество амплитудных параметров a_n совпадает с числом степеней свободы N жидкого объема, что позволяет утверждать, что

в этих параметрах система имеет минимальную размерность. Таким образом, совершен переход от дискретно-континуальной структуры системы к ее дискретной модели. Из вариационного принципа Гамильтона – Остроградского получена система уравнений движения в амплитудных параметрах колебания жидкости a_i и в параметрах поступательного движения резервуара $\bar{\varepsilon}$ и платформы \bar{u} .

Модель совместного движения системы представлена в виде системы обыкновенных дифференциальных уравнений, линейных относительно вторых производных неизвестных величин, которая в общем виде имеет форму

$$\sum_{n=1}^N p_{rn}(a_k, t) \ddot{a}_n + \sum_{n=N+1}^{N+3} p_{rn}(a_k, t) \ddot{\varepsilon}_{n-N} + \sum_{n=N+4}^{N+6} p_{rn}(a_k, t) \ddot{u}_{n-N-3} = q_r(a_k, \dot{a}_l, t);$$

$$r = \overline{1, N+6}. \quad (6)$$

4. Анализ результатов моделирования.

Для численных исследований принята модель, включающая 12 форм колебаний [2]. Выполнены расчеты на основе модели с упругим и жестким (для сравнения) закреплениями. Рассмотрены такие случаи соотношения масс резервуара и жидкости: $M_{res} = 0,25 M_l$; $M_{fr} = 5 M_l$. Жесткость пружины – $c = 2 \cdot 10^5$ Н/м; к платформе приложена сила $F = A \cos(\omega t)$, где $\omega = 3,8; 4,0; 4,14; 4,3; 5,2$, $A = 662$ Н. Движение исследовано до времени $t = 125$ с. Первая собственная частота системы определена по формуле $\omega^2 = \chi / Rg \operatorname{th}(\chi H / R)$. Для принятых параметров системы – $\omega = 4,1434$, т. е. рассмотренный диапазон ω охватывает дорезонансные, окolorезонансные и зарезонансные частоты.

Выполнен анализ изменения во времени ξ / R ; a_3 / R и u / R , т. е. возмущения на свободной поверхности жидкости, возбуждения первой осесимметричной формы (фактически показатель возбуждения нелинейных механизмов) и перемещения резервуара относительно платформы, отнесенные к радиусу резервуара, в разных частотных диапазонах изменения внешней силы для случая присутствия пружины (вариант 1) и для жесткого закрепления резервуара на платформе (вариант 2). Результаты изменения этих трех параметров представлены в таблице. Как видно из таблицы, результаты поведения системы с пружинным и жестким закреплениями существенно отличаются. Так, при пружинном закреплении максимальное возмущение на свободной поверхности имеет место при $\omega = 4$ (дорезонансная область), в то время как для жесткого закрепления такое максимальное возмущение наблюдается при $\omega = 4,3$ (зарезонансная область), отметим, что значения амплитуд при этом достаточно близки. При возбуждении первой осесимметричной формы имеет место аналогичная картина, но расхождение по амплитудам больше.

ω	$\xi / R, t, c$				$a_3 / R, t, c$				$u / R, t, c$	
	Вариант 1		Вариант 2		Вариант 1		Вариант 2		Вариант 1	
	Min	Max	Min	Max	Min	Max	Min	Max	Min	Max
3,8	-0,0512	0,0535	-0,0264	0,0275	-0,0009	0,0016	-0,0001	0,0003	-0,0049	0,0050
4,0	-0,1973	0,2909	-0,0433	0,0453	-0,0073	0,0253	-0,0001	0,0007	-0,0238	0,0237
4,14	-0,1730	0,1966	-0,0838	0,0907	-0,0032	0,0135	-0,0004	0,0024	-0,0161	0,0158
4,3	-0,0607	0,0697	-0,1694	0,3054	-0,0010	0,0022	-0,0025	0,0207	-0,0051	0,0050
5,2	-0,0137	0,0136	-0,0117	0,0121	-0,0004	0,0005	-0,0000	0,0000	-0,0010	0,0010

Исследуем вопрос о возможности применения пружинного закрепления как средства для уменьшения колебаний жидкости в резервуаре. Из приведенной таблицы

следует, что практически для всех частот внешнего возбуждения вариант жесткого закрепления (без пружины) дает меньшее возбуждение волн на свободной поверхности. Только для частоты $\omega = 4,3$ имеет место демпфирующее действие пружинного закрепления. Следует отметить также, что применение пружинного закрепления резервуара на платформе приводит к значительному увеличению колебаний жидкости по сравнению с жестким закреплением, прежде всего, в дорезонансной зоне изменения частот, что особенно заметно для $\omega = 4$.

Исследование качественных аспектов поведения жидкости позволяет выделить три основных нелинейных эффекта: модуляция колебаний жидкости, дрейф среднего значения колебаний жидкости и характер стремления системы к выходу на установившийся режим колебаний. Проиллюстрируем эти свойства. На рис. 2 представлены результаты расчетов возмущений свободной поверхности для частоты внешней нагрузки $\omega = 4$. При этом варианты *a*, *б* соответствуют пружинному закреплению, а варианты *в*, *г* – жесткому.

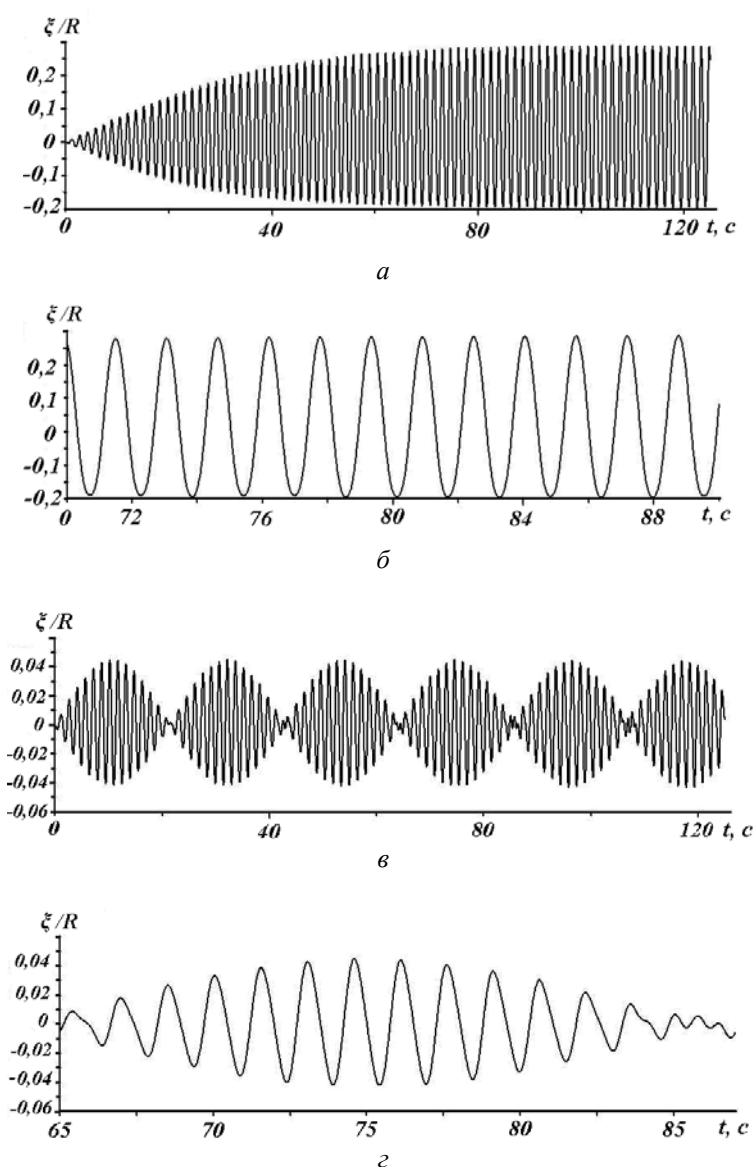


Рис. 2

Заметим, что варианты b и z повторяют варианты a и $в$, но приняты на меньшем интервале времени. Прежде всего, представляет интерес факт выхода на практически установившиеся колебания с постоянной амплитудой при наличии пружинного закрепления. При такой же нагрузке для жесткого закрепления проявляется существенная модуляция, где проявляются зоны пучностей и, так называемого, антирезонанса, когда на протяжении 3 – 5 периодов колебаний возмущения жидкости на свободной поверхности практически отсутствуют (в 7 – 8 раз меньше максимальных амплитуд). Для этого варианта среднее значение колебаний практически не меняется (дрейф среднего отсутствует).

Рассмотрим пример изменения во времени амплитуд возбуждения первой осесимметричной формы (фактически это возмущение жидкости в центре резервуара). Известно [1], что эта форма колебаний возбуждается только на основе нелинейных механизмов.

На рис. 3 приведены зависимости во времени возмущений свободной поверхности в центре резервуара по первой осесимметричной форме для частоты внешней нагрузки $\omega = 4,14$. При этом варианты a , b соответствуют пружинному закреплению, а варианты $в$, z – жесткому закреплению. Заметим, что как и ранее варианты b и z повторяют варианты a и $в$, но приняты на меньшем интервале времени.

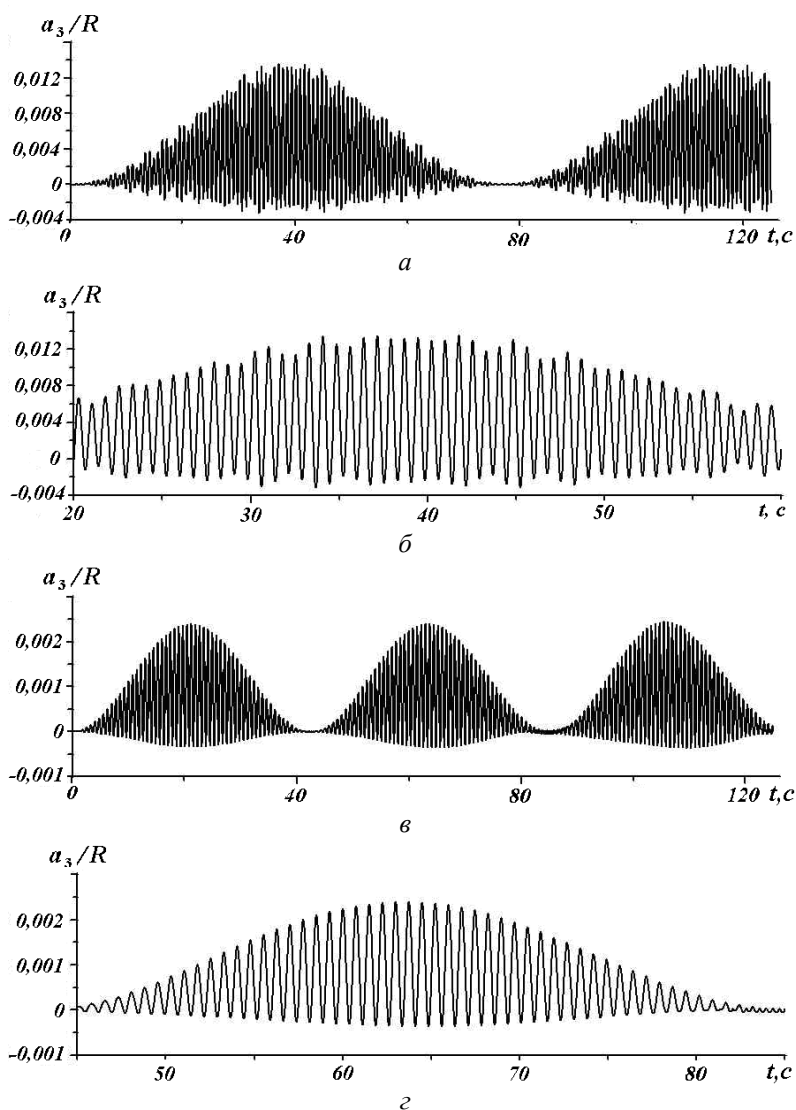


Рис. 3

Как видно из рис. 3, в этом варианте сильно проявляется модуляция для обоих способов закрепления резервуара на платформе, причем периоды модуляции разные. В тоже время сильно заметно смещение среднего значения колебаний.

Из полученных данных следует, что осесимметричная форма a_3 существенно возбуждается в положительную сторону и незначительно в отрицательную. Для колебаний жидкости это соответствует эффекту проявления несимметричности профиля волн, когда высота гребня волны больше, чем глубина впадины, что является одним из основных свойств нелинейного поверхностного волнообразования [3, 11]. Заметим, что выход на установившиеся колебания по этому параметру практически отсутствует для обоих вариантов закрепления.

Результаты рис. 1, 2 демонстрируют общие тенденции поведения данной системы. В целом следует отметить, что для большинства режимов имеют место эффекты модуляции колебаний жидкости на свободной поверхности, включая эффект антирезонанса. Дрейф среднего значения колебаний сильнее проявляется на изменении осесимметричной формы, однако при частотах $\omega = 4$ и $\omega = 5,2$ дрейф среднего значения проявляется и для возмущений на стенке резервуара с пружинным закреплением, что вызвано тем, что из-за пружины жидкость в резервуаре колеблется практически в инерциальной системе отсчета.

Выводы.

В нелинейной постановке рассмотрена задача о совместном движении резервуара с жидкостью, установленного на подвижной платформе на пружинном закреплении. Для сравнения рассмотрен случай жесткого закрепления. Движение системы рассмотрено под действием гармонической внешней горизонтальной силы в окрестности первого резонанса колебаний свободной поверхности жидкости (дорезонансные, околорезонансные и зарезонансные частоты).

Анализ результатов позволяет представить следующие выводы.

1. Применение пружинного закрепления в качестве средства уменьшения колебаний на свободной поверхности жидкости для дорезонансных и околорезонансных частот неэффективно и лишь при незначительном превышении резонансной частоты в узком диапазоне зарезонансных частот пружинное закрепление способствует уменьшению колебаний жидкости.

2. Математическое моделирование показывает, что выход на установившиеся колебания не происходит для всех режимов колебаний, что подтверждается данными современных экспериментов [6, 16].

3. При изменении колебаний жидкости на стенках и в центре резервуара существенно проявляются нелинейные эффекты модуляции колебаний, явление антирезонанса, дрейф среднего значения колебаний. При этом пружинное закрепление усиливает проявление этих эффектов. В колебаниях резервуара относительно платформы существенно проявляется модуляция и влияние высших гармоник.

РЕЗЮМЕ. Побудовано математичну модель сумісного руху жорсткого циліндричного резервуару, заповненого рідиною з вільною поверхнею, і рухомої платформи, приєднаної пружиною до резервуару і досліджено нелінійні коливання системи під дією прикладеної до рухомої платформи гармонічної сили.

1. Лимарченко О.С., Матараццо Дж., Ясинский В.В. Динамика вращающихся конструкций с жидкостью. – К.: ГНОЗИС, 2002. – 304 с.
2. Лимарченко О.С. Исследование эффективности дискретных моделей при решении задачи об импульсном возбуждении резервуара с жидкостью // Матем. физика и нелинейная механика. – 1985. – № 4. – С. 44 – 48.
3. Микишев Г.Н. Экспериментальные методы в динамике космических аппаратов. – М.: Машиностроение, 1978. – 247с.
4. Bisval K.C., Bhattacharyya S.K., Sinha P.K. Dynamic Characteristics of Liquid Filled Rectangular Tank with Baffles // J. Inst. Civil Engineering. – 2003. – 84. – P. 145 – 148.
5. Chwang A.T. A porous-wavemaker theory // J. Fluid Mech. – 1983. – 132. – P. 395 – 406.

6. *Faltinsen O.M., Rognebakke O.F., Timokha A.N.* Transient and steady-state amplitudes of resonant three-dimensional sloshing in a square base tank with a finite fluid depth // *Physics of Fluids*. – 2006. – N 18. – P. 1 – 14.
7. *Funakoshi M., Inoue S.* Surface waves due to resonant oscillation // *J. of Fluid Mechanics*. – 1988. – **192**. – P. 219 – 247.
8. *Funakoshi M., Inoue S.* Bifurcations in resonantly forced water waves // *Eur. J. of Mechanics B/Fluids*. – 1991. – **10**. – P. 31 – 36.
9. *Ikeda T., Harata Y., Ibrahim R. A.* Nonlinear Responses of Sloshing in Square Tanks Subjected to Horizontal Random Ground Excitation // *Proc. of ICSNDD, April 30-May 02, 2012, Marrakech, Morocco*. – 2012 – P. 81 – 84.
10. *Kubenko V.D.* Nonstationary Contact of a Rigid Body with an Elastic Medium: Plane Problem (Review) // *Int. Appl. Mech.* – 2012. – **46**, N5. – P. 487 – 551.
11. *Kubenko V. D., Gavrilenko E. V.* Impact of a Spherical Rigid Body on the Surface of a cavity in a Compressible Liquid: an Axisymmetric Problem // *Int. Appl. Mech.* – 2008. – **44**, N1. – P. 8 – 15.
12. *Kubenko V.D., Kovalchuk P.S., Podchasov N.P.* Analysis of Nonstationary Processes in Cylindrical Shells Interacting with a Fluid Flow // *Int. Appl. Mech.* – 2011. – **46**, N10. – P. 1110 – 1118
13. *Limarchenko O.* Nonlinear properties for dynamic behavior of liquid with a free surface in a rigid moving tank // *Int. J. Nonlinear Sci. and Numer. Simul.* – 2000. – **1**, N1. – P. 105–118.
14. *Limarchenko O., Semenova I.* Nonlinear Wave Generation on a Fluid in a Moving Parabolic Tank // *Int. Appl. Mech.* – 2010. – **46**, N 8. – P. 864 – 868.
15. *Maksimyuk V.A., Storozhuk E.A., Chernyshenko I.S.* Variational Finite-Difference Methods in Linear and Nonlinear Problems of the Deformation of Metallic and Composite Shells (Review) // *Int. Appl. Mech.* – 2012. – **46**, N 6. – P. 613 – 687.
16. *Pal P.* Sloshing of liquid in partially filled container – an experimental study // *Int. J. Recent Trends in Eng.* – 2009. – **1**, N 6. – P. 1 – 5.
17. *Pal P., Bhattacharyya S.K.* Sloshing in partially filled liquid containers— Numerical and experimental study for 2-D problems // *J. Sound and Vibration*. – 2010. – **329**. – P. 4466 – 4485.
18. *Tyvand P.A., Miloh T.* Incompressible impulsive sloshing // *J. Fluid Mech.* – 2012. – **708**. – P. 279 – 302.
19. *Virella J.C., Prato C.A., Godoy L.A.* Linear and nonlinear 2D finite element analysis of sloshing modes and pressures in rectangular tanks subject to horizontal harmonic motions // *J. of Sound and Vibration*. – 2008. – **312**. – P. 442 – 460
20. *Yip T.L., Sahoo T., Chwang A.T.* Wave Oscillation in a Circular Harbor With Porous Wall // *J. Appl. Mech.* – 2001. – **68**, N 4. – P. 603–607.
21. *Zhuk A.P., Kubenko V.D., Zhuk Ya.A.* Acoustic Radiation Acting on a Liquid Sphere in a Circular Cylinder Filled with a Fluid // *Int. Appl. Mech.* – 2013. – **47**, N 5. – P. 501 – 511.

Поступила 28.12.2012

Утверждена в печать 03.12.2013