

Н. В. Олали¹, Л. В. Войтович²,
Н. М. Зазимко², М. П. Малевич²

О МОДЕЛИРОВАНИИ ПРОЦЕССОВ ПОЛЗУЧЕСТИ В ПОЛИМЕРАХ С УЧЕТОМ ИХ СТАРЕНИЯ

¹Найджа Дельта Университет,

Нигерия, штат Байелса, e-mail: diamant@ukr.net

²Национальный педагогический университет им. М.П. Драгоманова,
ул. Пирогова, 9, 06601, Киев, Украина, e-mail: malez@ukr.net

Abstract. The generalized relations of the polarizational-optical method are proposed for studying the processes of creep in the hereditary-aging materials. The curves of the simple optical creep and curves of mechanical creep as well as the curves of optical relaxation are used for interpretation of fringe patterns. It is shown that in the case of materials with the constant Poisson ratio the interpretation can be made by only the curves of mechanical or optical creep.

Key words: polarizational-optical method, hereditary-aging materials, optical creep, mechanical relaxation.

Введение.

Полимеры и композиты на их основе широко применяются для изготовления ответственных несущих элементов конструкций. Эти материалы не являются классическими упругими телами, в частности, их механические свойства и процесс разрушения существенно зависят от времени. Многие полимерные материалы (оргстекло, поликарбонат, целлулоид), а также материалы, полученные на основе эпоксидных смол, являются достаточно прозрачными и оптически-чувствительными. Известно, что моделирование напряженно-деформированного состояния успешно используется при решении статических и динамических задач механики деформируемых твердых тел [1, 2, 4, 7]. Эти обстоятельства приводят к поиску способов применения моделирования для решения задач ползучести элементов конструкций из современных полимерных и композитных материалов.

В данной статье для расшифровки интерференционной картины полос в вязкоупругой модели построена обобщенная зависимость, связывающая оптическую разность хода с напряжениями и временем.

§1. Основные соотношения поляризационно-оптического метода для моделирования процессов ползучести полимеров.

В упругих задачах, решаемых поляризационно-оптическим методом, величина оптической разности хода δ , количественно выражена через порядок интерференционной полосы m , пропорциональна относительному удлинению или нормальному напряжению, поскольку в рамках классической теории упругости напряжения σ и деформации ε связаны линейной зависимостью (закон Верггейма). В случае двухосного напряженного состояния эта зависимость имеет такой вид:

$$\delta = C_{\sigma} (\sigma_1 - \sigma_2) = C_{\varepsilon} (\varepsilon_1 - \varepsilon_2), \quad (1)$$

где C_{σ} и C_{ε} – оптические постоянные материала по напряжениям и деформациям.

Для материалов модели, обладающих вязкоупругими свойствами, связь между поляризационно-оптическими и механическими величинами имеет более сложный вид [8], при этом, в отличие от упругого материала, здесь трудно установить универсальный закон, который выполнялся бы для всех материалов. Исследуя целлулоид, в работе [6] показано, что оптическая разность хода линейно зависит от напряжения и деформации, т.е. имеет место равенство

$$\delta = C_{\sigma}\sigma + C_{\varepsilon}\varepsilon . \quad (2)$$

Предложенное соотношение (2) проверено для случая одноосного напряженного состояния. Многочисленные эксперименты [6, 7], проведенные разными авторами применительно к материалу – целлулоиду, позволяют предложить некоторые обобщения о характере зависимости между оптической разностью хода и механическими величинами в условиях ползучести при двухосном напряженном состоянии. В работе [7] принято, что оптическая разность хода зависит от разности главных напряжений и главных деформаций ползучести, т.е. имеет место равенство

$$\delta = C_{\sigma}(\sigma_1 - \sigma_2) = C_{\varepsilon}(\varepsilon_1^{nl} - \varepsilon_2^{nl}) . \quad (3)$$

Многими авторами [5, 8, 9] предложена более общая зависимость

$$\Delta_{\sigma} \delta = C_{\sigma}(\Delta_{\sigma}) + D(\Delta_{\varepsilon}), \quad (4)$$

где Δ_{σ} и Δ_{ε} – соответственно, разность главных напряжений и главных деформаций. В работе [7] для аппроксимации функции $D(\Delta_{\varepsilon})$ принято такое выражение для $D(\Delta_{\varepsilon})$:

$$D(\Delta_{\varepsilon}) = C_2\Delta_{\varepsilon}(1 - C_3\Delta_{\varepsilon}^2) \quad (5)$$

или в виде многочлена по степеням Δ_{ε} , т.е.

$$D(\Delta_{\varepsilon}) = C_{\varepsilon}^{(1)}\Delta_{\varepsilon} + C_{\varepsilon}^{(2)}\Delta_{\varepsilon}^2 + C_{\varepsilon}^{(k)}\Delta_{\varepsilon}^k ; D(\Delta_{\varepsilon}) = C_{\varepsilon}^{(1)}\Delta_{\varepsilon} + C_{\varepsilon}^{(2)}\Delta_{\varepsilon}^2 + C_{\varepsilon}^{(k)}\Delta_{\varepsilon}^k , \quad (6)$$

а также в виде зависимости

$$D(\Delta_{\varepsilon}) = C_2\Delta_{\varepsilon} + C_3\Delta_{\varepsilon}^{3/2} + C_4\Delta_{\varepsilon}^2 . \quad (7)$$

Отметим, что зависимость (7) проверена для целлулоида при различных режимах нагружения [8].

Из приведенных выше зависимостей (3) – (7) следует, что оптическая разность хода в условиях ползучести зависит как от разности главных напряжений, так и от разности главных деформаций. Для получения напряжений или деформаций в модели по измеренным значениям оптической разности хода к приведенным зависимостям следует присоединить реологические уравнения связи между напряжениями и деформациями. При этом для простоты расшифровки часто используют уравнения теории старения [2].

Множество эмпирических формул для одного и того же материала – целлулоида свидетельствует о том, что вряд ли целесообразно идти по пути осложнения зависимости (4), так как при этом затрудняется тарировка материала и расшифровка интерференционной картины полос.

С целью расшифровки интерференционной картины полос в вязкоупругой модели необходимо построить зависимость, связывающую оптическую разность хода с напряжениями и временем (оптическая ползучесть). Для многих прозрачных вязкоупругих материалов (целлулоид, эпоксидные материалы и др.) оптическая ползучесть протекает подобно механической ползучести, поэтому для получения количественных результатов целесообразно использовать опыт построения феноменологических теорий ползучести. В этом отношении наиболее универсальными являются наследственные теории, которые хорошо описывают ползучесть различных материалов. Для многих ядер составлены таблицы и получены аналитические значения резольвент.

§2. Основные зависимости для наследственно-стареющих оптически чувствительных материалов.

С целью установления основных зависимостей примем, что оптически чувствительный материал обладает свойствами ползучести и старения. Если же материал не стареет, то при необходимости подобный эффект можно получить путем равномерного изменения температуры в модели по определенному закону, установленному в соответствии с критериями подобия, т.е.

$$T = \omega(\tau). \quad (8)$$

При этом примем, что полная оптическая разность хода к моменту времени t при действии на образец постоянной осевой силы единичной интенсивности, приложенной при температуре $T(t)$ соответствует $\Delta(t, T)$. Значение ее можно определить зависимостью

$$\Delta(t, T) = \frac{1 + S_1^*(t, T)}{\sigma_0(T)}, \quad (9)$$

где $\sigma_0(T)$ – мгновенное значение цены полосы по напряжениям при температуре $T(t)$; $S_1^*(t, T)$ – приращение порядка полосы к моменту времени t .

С учетом (8) выражение (9) можно записать в таком виде:

$$\Delta(t, T) = \frac{1 + S_1^*(t, \tau)}{\sigma_0(t)}, \quad (10)$$

где τ – условный возраст оптически чувствительного материала.

В качестве исследуемого материала использован оптически-чувствительный полимер, полученный на основе эпоксидной смолы ЭД-20, отвержденной малеиновым ангидридом. Данный полимер широко применяется при изготовлении волоконных композитов и в клеевых соединениях.

На рис. 1 приведены характерные кривые удельных порядков полос $\Delta(t, \tau)$ оптической ползучести для эпоксидного материала в зависимости от возраста:

$$1 - \frac{1}{\sigma_0(\tau)}; 2 - \frac{1}{\sigma_0(t)}; 3 - \frac{S_1(t, \tau)}{\sigma_0(t)}.$$

По аналогии с мерой ползучести для стареющих материалов назовем $S_1^*(t, \tau)$ – мерой оптической ползучести. Для эпоксидных материалов она удовлетворяет свойствам, которые аналогичны приведенным в [8] для меры ползучести бетона.

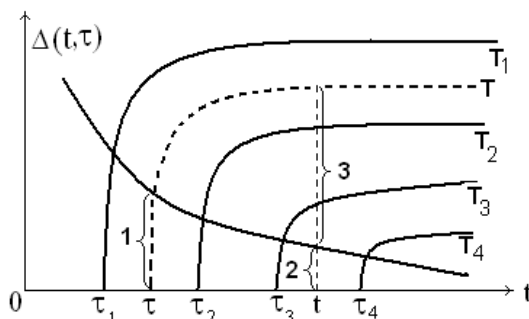


Рис. 1

Если в возрасте τ_1 к образцу приложено напряжение $\sigma_0(t)$, которое изменяется с течением времени, то согласно (10) и принципу наложения полная оптическая разность хода (или порядок полосы) в случае линейной ползучести определяется зависимостью

$$m(t) = \frac{1}{\sigma_0(t)} \left[\sigma(t) - \int_{\tau_1}^t \sigma(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} S_1^*(t, \tau) d\tau \right];$$

$$m(t) = \frac{1}{\sigma_0(t)} \left[\sigma(t) - \int_{\tau_1}^t \sigma(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} S_1^*(t, \tau) d\tau \right]. \quad (11)$$

В случае нелинейной ползучести имеем такое равенство:

$$m(t) = \frac{1}{\sigma_0(t)} \left[\sigma(t) - \int_{\tau_1}^t F_1[\sigma(\tau)] \frac{\partial}{\partial \tau} S_1^*(t, \tau) d\tau \right]. \quad (12)$$

При двухосном напряженном состоянии эпоксидных материалов разность главных напряжений $(\sigma_1 - \sigma_2)$ ($\sigma_1 - \sigma_2$) однозначно определяет порядок полосы $m(t)$ [8]. Заменяя в уравнениях (11) и (12) σ на $(\sigma_1 - \sigma_2)$, соответственно, получим формулы:

$$m(t) = \frac{1}{\sigma_0(t)} \left\{ \sigma_1(t) - \sigma_2(t) + \int_{\tau_1}^t [\sigma_1(\tau) - \sigma_2(\tau)] L_1(t, \tau) d\tau \right\};$$

$$\frac{1}{\sigma_0(t)} \left\{ \sigma_1(t) - \sigma_2(t) + \int_{\tau_1}^t [\sigma_1(\tau) - \sigma_2(\tau)] L_1(t, \tau) d\tau \right\}; \quad (13)$$

$$m(t) = \frac{1}{\sigma_0(t)} \left\{ \sigma_1(t) - \sigma_2(t) + \int_{\tau_1}^t F_1[\sigma_1(\tau) - \sigma_2(\tau)] L_1(t, \tau) d\tau \right\};$$

$$m(t) = \frac{1}{\sigma_0(t)} \left\{ \sigma_1(t) - \sigma_2(t) + \int_{\tau_1}^t F_1[\sigma_1(\tau) - \sigma_2(\tau)] L_1(t, \tau) d\tau \right\}; \quad (14)$$

$$[L_1(t, \tau) = -\frac{\partial}{\partial \tau} S_1^*(t, \tau); \quad F_1[\sigma_1 - \sigma_2] = \sigma_1 - \sigma_2 + \beta_1(\sigma_1 - \sigma_2)^2]. \quad (15)$$

Для расшифровки интерференционной картины полос, в общем случае необходимо иметь решения интегральных уравнений (13) и (14).

Решая уравнение (13) относительно $\sigma_1(t) - \sigma_2(t)$, получаем равенство

$$\sigma_1(t) - \sigma_2(t) = \sigma_0(t) m(t) - \int_{\tau_1}^t \sigma_0(\tau) R_1(t, \tau) d\tau, \quad (16)$$

где $R_1(t, \tau)$ – резольвента ядра $L_1(t, \tau)$;

$$L_1(t, \tau) - R_1(t, \tau) = \int_{\tau}^t R_1(\xi, \tau) L_1(t, \xi) d\xi. \quad (17)$$

Связь между разностями главных напряжений и деформаций примем в виде

$$\varepsilon_1(t) - \varepsilon_2(t) = \frac{1+\nu}{E(t)} \left\{ \sigma_1(t) - \sigma_2(t) + \int_{\tau_1}^t [\sigma_1(\tau) - \sigma_2(\tau)] L(t, \tau) d\tau \right\}. \quad (18)$$

Подставив значение $\sigma_1(t) - \sigma_2(t)$ из (16) в (18), получим выражение, связывающее разность главных деформаций $\varepsilon_1(t) - \varepsilon_2(t)$ с порядками полос $m(t)$:

$$\varepsilon_1(t) - \varepsilon_2(t) = \frac{1+\nu}{E(t)} \left[\sigma_0(t) m(t) + \int_{\tau_1}^t \sigma_0(\tau) m(t) H(t, \tau) d\tau \right] \quad (19)$$

$$[H(t, \tau) = L_1(t, \tau) - R_1(t, \tau) = \int_{\tau}^t R_1(\xi, \tau) L_1(t, \xi) d\xi]. \quad (20)$$

Отметим, что зависимость (19) можно получить и по кривым простой оптической релаксации, показанной на рис. 2. Здесь кривые оптической релаксации для исследуемого эпоксидного материала: 1 - $\frac{1}{\varepsilon_0(\tau)}$; 2 - $\frac{1}{\varepsilon_0(t)}$; 3 - $\frac{r_1^*(t, \tau)}{\varepsilon_0(t)}$.

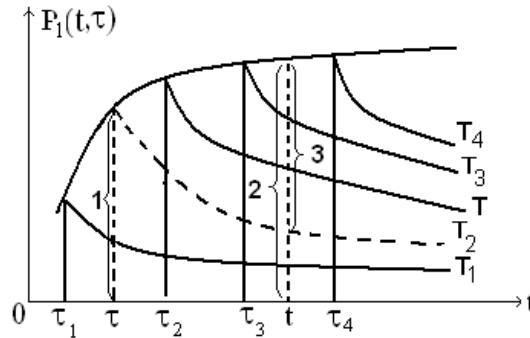


Рис. 2

По аналогии с удельным порядком полосы оптической ползучести $\Delta(t, \tau)$ введем понятие удельного порядка полосы оптической релаксации $P_1(t, \tau)$. Под удельным порядком полосы $P_1(t, \tau)$ понимаем количество интерференционных полос, которое имеется в образце в любой момент времени наблюдения t при постоянной во времени его полной единичной деформации. Отметим, что $P_1(t, \tau)$ определяется зависимостью

$$P(t, T) = \frac{1 - r_1^*(t, \tau)}{\varepsilon_0(t)}, \quad (21)$$

где $r_1^*(t, \tau)$ назовем мерой оптической релаксации; $\varepsilon_0(t)$ – цена полосы по деформациям, связанная с $\sigma_0(t)$ формулой

$$\varepsilon_0(t) = \frac{1+\nu}{E(t)} \sigma_0(t). \quad (22)$$

При переменных деформациях согласно (21) порядок полосы $m(t)$ определим такой зависимостью:

$$m(t) = \frac{1}{\varepsilon_0(t)} \left[\varepsilon(t) - \int_{\tau_1}^t \varepsilon(\tau) \Pi(t, \tau) d\tau \right] \quad \left\{ \Pi(t, \tau) = -\frac{\partial}{\partial \tau} r_1^*(t, \tau) \right\}. \quad (23)$$

Решив интегральное уравнение (23) относительно $\varepsilon(t)$ и заменив $\varepsilon(t)$ на $\varepsilon_1(t) - \varepsilon_2(t)$, получим

$$\begin{aligned} \varepsilon_1(t) - \varepsilon_2(t) &= \varepsilon_0(t) m(t) + \int_{\tau_1}^t \varepsilon_0(\tau) m(\tau) K(t, \tau) d\tau; \\ \varepsilon_1(t) - \varepsilon_2(t) &= \varepsilon_0(t) m(t) + \int_{\tau_1}^t \varepsilon_0(\tau) m(\tau) K(t, \tau) d\tau, \end{aligned} \quad (24)$$

$K(t, \tau)$ – резольвента ядра $\Pi(t, \tau)$.

Сравнив (24) с (19), получим связь между ядрами $H(t, \tau)$ и $K(t, \tau)$ в таком виде:

$$H(t, \tau) = \frac{E(t)}{E(\tau)} K(t, \tau). \quad (25)$$

Таким образом, для определения напряжений и деформаций по известным значениям порядков полос $m(t)$ необходимо иметь либо кривые простой механической и оптической ползучести (ядра и $L_1(t, \tau)$), либо кривые простой ползучести и релаксации (ядра $L_1(t, \tau)$ и $\Pi(t, \tau)$). Более просто технически реализовать получение кривых простой механической и оптической ползучестей. Для эпоксидных материалов, которые имеют коэффициент Пуассона, $\nu \approx 0,5$, кривые мер механической и оптической ползучести практически совпадают. Отсюда следует, что

$$L(t, \tau) = L_1(t, \tau); \quad R(t, \tau) = R_1(t, \tau); \quad H(t, \tau) = 0. \quad (26)$$

В этом случае основные зависимости для определения напряжений и деформаций принимают вид

$$\begin{aligned} \sigma_1(t) - \sigma_2(t) &= \sigma_0(t) m(t) - \int_{\tau_1}^t \sigma_0(\tau) m(\tau) R(t, \tau) d\tau; \\ \varepsilon_1(t) - \varepsilon_2(t) &= \frac{1+\nu}{E(t)} \sigma_0(t) m(t). \end{aligned} \quad (27)$$

Условием для применения формул (27) является отсутствие оптической релаксации у материала с $E(t) = \text{const}$ и $\sigma_0(t) = \text{const}$ при постоянной осевой деформации. Если же наблюдается оптическая релаксация, то расшифровку картин полос необходимо производить по формулам (16), (19) или (24). Если оптическая ползучесть имеет нелинейный характер, то для расшифровки картин полос необходимо иметь решение нелинейного интегрального уравнения (14). В общем случае решение этого уравнения представляет определенные математические трудности и (к настоящему времени не получено). При малых значениях параметра нелинейности β_1 приближенное решение уравнения (14) с точностью до β_1^2 согласно [6] можно представить в виде

$$\sigma_1(t) - \sigma_2(t) = \sigma_0(t) m(t) \left(1 - \tilde{R}_1 \right) - \frac{2\beta_1 \sigma_0^2(t) m^2(t) \tilde{L}_1}{(1 + \tilde{L}_1)^3}, \quad (28)$$

где \tilde{R}_1 и \tilde{L}_1 – операторы вида

$$\tilde{L}_1 f = \int_{\tau_1}^t f(\tau) L_1(t, \tau) d\tau; \quad \tilde{R}_1 f = \int_{\tau_1}^t f(\tau) R_1(t, \tau) d\tau. \quad (29)$$

Для получения выражения в замкнутом виде, преобразуем второй член правой части (28). В зависимости от реологического поведения материала модели с известным приближением можно использовать равенства

$$\frac{\tilde{L}_1}{(1 + \tilde{L}_1)^3} = \frac{1}{(1 + \tilde{L}_1)^2} - \frac{1}{(1 + \tilde{L}_1)^3} \approx \tilde{R}_3 - \tilde{R}_2 \quad (30)$$

или

$$\frac{\tilde{L}_1}{(1 + \tilde{L}_1)^3} = (1 - \tilde{R}_1)^2 - (1 - \tilde{R}_1)^3 \approx \tilde{R}_3 - \tilde{R}_1, \quad (31)$$

где \tilde{R}_1 , \tilde{R}_2 и \tilde{R}_3 операторы, ядра $R_1(t, \tau)$; $R_2(t, \tau)$ и $R_3(t, \tau)$, которых являются резольвентами ядер соответственно $L_1(t, \tau)$; $2L_1(t, \tau)$ и $3L_1(t, \tau)$.

С учетом (30) и (31) получим следующие приближенные выражения для основной зависимости в случае нелинейной ползучести:

$$\sigma_1(t) - \sigma_2(t) = \sigma_0(t) m(t) - \int_{\tau_1}^t \sigma_0(\tau) m(\tau) + 2\beta_1 \sigma_0^2(\tau) m^2(\tau) R_1(t, \tau) d\tau; \quad (32)$$

$$\begin{aligned} \sigma_1(t) - \sigma_2(t) = \sigma_0(t) m(t) - \int_{\tau_1}^t \sigma_0(\tau) m(\tau) R_1(t, \tau) d\tau - \\ - 2\beta_1 \int_{\tau_1}^t \sigma_0^2(\tau) m^2(\tau) [R_3(t, \tau) - R_2(t, \tau)] d\tau. \end{aligned} \quad (33)$$

Все ядра, входящие в соотношения (32) и (33), определяются с использованием кривых простой оптической ползучести.

Заключение.

Таким образом, получены основные зависимости поляризационно-оптического метода, которые позволяют исследовать процессы ползучести в наследственно-стареющих материалах. Для применения их, в общем случае, при расшифровке картин полос достаточно иметь кривые простой оптической ползучести и кривые либо механической ползучести, либо оптической релаксации. В случае материалов с постоянным коэффициентом Пуассона достаточно иметь кривые механической или оптической ползучести.

РЕЗЮМЕ. Запропоновано узагальнені співвідношення поляризаційно-оптичного методу для дослідження процесів повзучості в спадково-старіючих матеріалах. Використовуючи їх в загальному випадку для розшифрування картин інтерференційних смуг необхідно мати криві простої оптичної повзучості та криві механічної повзучості, або оптичної релаксації. У випадку матеріалів зі сталим коефіцієнтом Пуассона для розшифровки досить мати криві механічної чи оптичної повзучості.

1. *Метод фотоупругости* / Под ред. Г.Л.Хесина: В 3-х т. – М: Стройиздат., 1975.
2. *Работнов Ю.Н.* Элементы наследственной механики твердых тел. – М: Наука, 1977. – 384 с.
3. *Шарафутдинов Г.З.* Фотовязкоупругость. – М.: Изд-во МГУ, 1987. –199 с.

4. *Bayoumi S.E.A., Frankl E.K.* Fundamental Relations in Photoplasticity // Brit. J. Appl. Phys. – 1953. – N 4. – P. 155 – 165.
5. *Filon I. N., Gessop N. T.* On the Stress-Optical Effect in Transparent Solids Strained beyond the Elastic Limit // Phil. Trans., Royal Soc. – 1992. – Ser. A. – **223**. – P. 55 – 62.
6. *Malezhik M.P., Chernyshenko I.S.* Solution of Nonstationary Problems in the Mechanics of Anisotropic Bodies by the Method of Dynamic Photoviskoelastity // Int. Appl. Mech. – 2009. – **45**, N 9. – P. 954 – 980.
7. *Ohashi Y., Nishitani T.* Calibration Test for a Photo-Reological Method of Stress Analysis in the Plastically Flowing Body // Bull. JSME, 1967. – **10**. – P. 245 – 256.
8. *Tokuoka T., Miyakawa M.* Birefringent Formula in Elastic-Plastic Deformation Region of high Polymer Solids // Proc. 14th Japan Nat. Congr. Appl. Mech. – Kyoto, 1964. – Tokyo, 1965. – P. 100 – 108.
9. *Zazimko N.M., Malezhik M.P., Chernyshenko I.S.* Relationship between the Mechanical and Optical Characteristics of Photoviskoelastik Polymeric Materials Under Dynamic Loading // Int. Appl. Mech. – 2010. – **46**, N 8. – P. 950 – 954.

Поступила 28.12.2013

Утверждена в печать 31.03.2016