Я . Я . Р у щ и ц к и й

ОБ ОГРАНИЧЕНИЯХ ЗНАЧЕНИЙ ГРАДИЕНТОВ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ ДЛЯ УПРУГИХ МАТЕРИАЛОВ

Институт механики им. С.П.Тимошенко НАНУ,
ул. Нестерова, 3, 03057, Киев, Украина; e-mail: rushch@inmech.kiev.ua

Abstract. The classical and quite abstract restriction for the elastic materials $|u_{k,i}| \ll 1$ and a row of cases of possible mathematical and physical restrictions on the values of gradients of displacements are discussed.

Key words: elastically deforming material, nonlinear elasticity, restrictions, gradients of dis- placements.

1. Введение. О месте градиентов перемещений в описании деформирования материалов.

1.1. Общая теория. Одним из исходных понятий теории деформирования материала (тела) является мера деформации [5, 6, 8, 14, 16, 20 – 23, 26, 28, 29, 34], которую трактуют геометрически как изменение длин радиусов-векторов точки-частицы при деформировании тела

$$dX_m \vec{E}_m = dx_m \vec{e}_m + u_{m,k} dx_k \vec{e}_m .$$

Здесь принято, что точка $\vec{X} \equiv (X^1, X^2, X^3)$ тела в отсчетной конфигурации отображается в точку $\vec{x} \equiv (x^1, x^2, x^3)$ тела в актуальной конфигурации; радиус-вектор $\overrightarrow{OM} = \vec{R} = (X_1, X_2, X_3)$ в декартовой системе координат $OX_1X_2X_3$ определяет точку-частицу M тела и радиус-вектор $\overrightarrow{OM^*} = \vec{r} = (x_1, x_2, x_3)$ в декартовой системе координат $Ox_1x_2x_3$, когда точка-частица M в недеформированном состоянии переходит после деформирования в точку M^*; вектор перемещения точки-частицы M задают величиной

$$\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OM^*} = \vec{R} - \vec{r} = \vec{u}\left(x_1, x_2, x_3\right) \tag{1}$$

и $\vec{E}_m, \vec{e}_m$ являются ортами систем координат $OX_1X_2X_3, Ox_1x_2x_3$, соответственно.

Выражение для тензора деформации получают, рассматривая изменение квадратов длин векторов-радиусов точки-частицы при деформировании тела

$$dX_m = dx_m + u_{m,k} dx_k ; \tag{2}$$

$$\left[\left(dX_m\right)^2 \equiv \left(dL\right)^2\right] = \left(dx_m + u_{m,k}dx_k\right)\left(dx_m + u_{m,i}dx_i\right) =$$

$$= \left[\left(dx_m\right)^2 \equiv \left(dl\right)^2\right] + \left(2u_{i,k} + u_{m,k}u_{m,i}\right)dx_k dx_i \to \left(dL\right)^2 - \left(dl\right)^2 = \left(2u_{i,k} + u_{m,k}u_{m,i}\right)dx_k dx_i .$$

Примечание 1. Таким образом, для описания деформирования используются две группы параметров – перемещения (три параметра) и градиенты перемещений (девять параметров). Физический смысл, по определению, имеет лишь первая группа.

Примечание 2. В классических книгах по нелинейной механике [5, 6, 8, 14, 16, 20 – 23, 26, 28, 29, 34] факт введения меры деформации как линейной аппроксимации (2) перемещения в виде нелинейной функции практически не комментируется. Это не единственный случай взаимного согласия ученых-механиков довольствоваться принятым ограничением.

Примечание 3. Второй случай связан с новыми технологиями, которые позволили разработку метаматериалов. К настоящему времени, материалы разделяют на традиционные (классические) и нетрадиционные (метаматериалы). Метаматериалы включают механические метаматериалы, которые, в свою очередь, включают ауксетические материалы. Общее свойство метаматериалов состоит в том, что они представляют собой, главным образом, искусственные структуры и создаются с целью наличия у них свойств, не встречающихся в природе. В частности, ауксетические материалы проявляют нетрадиционное поведение в классическом механическом эксперименте на одностороннее растяжение образца в виде стержня (балки), к торцам которого приложены силы растяжения-сжатия. Традиционное свойство деформирования стержня состоит в том, что поперечное сечение стержня становится меньше при растяжении и больше при сжатии. Нетрадиционное свойство, напротив, состоит в том, что стержень из ауксетического материала увеличивает свое поперечное сечение при растяжении и уменьшает при сжатии. Эти механические явления описываются в классической теории упругости с помощью введения коэффициента Пуассона. Теория содержит специальное ограничение на изменение коэффициента Пуассона, допускающее изменения только в диапазоне $(-1;\, 0,5)$.

Примечание 4. Третий случай связан с нанотехнологиями, которые привели к созданию различных нанообъектов и материалов с внутренней структурой наноуровня [3, 16, 15, 17 – 19]. К настоящему времени в механике различают материалы четырех структурных уровней – макро-, мезо-, микро- и наноуровень. Их объединяет господствующая в механике материалов концепция континуума (сплошной среды). Континуумом (точнее, материальном континуумом) в механике называют некоторую область трехмерного пространства, в каждой точке которого задана плотность. Реальное тело в механике заменяют континуумом, который заполняет область с формой этого тела. Фактически вся механика материалов с взаимного согласия ученых-механиков построена на этой концепции. Исторически долгое время изучались материалы в рамках макроструктурного уровня. Можно считать, что термин «мезоуровень» вошел в механику при анализе структуры металлов и «микроуровень» – при анализе композитных материалов. В этих трех случаях компоненты внутренней структуры обоснованно моделировались тоже континуумом. При появлении материалов наноструктурного уровня концепция континуума формально используется так же, как и для первых трех уровней. Однако в ряде случаев внутренняя структура наноматериала уже имеет молекулярный уровень. В итоге, в современной механике возникла проблема с использованием фундаментальной концепции континуума, справедливость которой пару столетий не подвергалась сомнениям.

Возвратимся к формуле (2). Здесь в выражении $2u_{i,k}{+}u_{m,k}u_{m,i}$ выделяют симметричную и антисимметричную части

$$\varepsilon_{ik}{=}(1/2)\left(u_{i,k}+u_{k,i}+u_{m,k}u_{m,i}\right),\quad \omega_{ik}{=}(1/2)\left(u_{i,k}-u_{k,i}\right). \tag{3}$$

Именно ε_{ik} называют тензором деформации Коши – Грина и в ряде случаев запись (3) упрощают

$$\varepsilon_{ik}=(1/2)\left(u_{i,k}+u_{k,i}\right). \tag{4}$$

Примечание 5. Как подтверждают формулы (3), вся последующая структура кинематики деформирования строится на основе указанных в Примечании 2 параметров как структурных элементов («молекул»).

Примечание 6. Соотношения (4) называют в линейной теории упругости соотношениями Коши. В нелинейном подходе, когда деформации могут быть конечными, считается достаточным представление (3).

Примечание 7. В теории упругости считают, что соотношения (4) соответствуют линейной теории, тогда как соотношения (3) – нелинейной. При этом понятия геометрической и физической линейности или нелинейности связывают также с определяющими соотношениями и граничными условиями.

1.2. Комментарий к малости градиентов перемещений. Этот комментарий относится к возможности толкований малости градиентов перемещений. Начнем с указания комментариев из двух очень известных классических книг по теории упругости.

Примечание 8. Трусделл [22, глава IX, §1] отмечает, что «вводить перемещения в механике сплошных сред полезно, только если как перемещения, так и их градиенты малы в каком-нибудь смысле».

Примечание 9. Лурье [16, глава 2, §1, пункт 1.1] отмечает: «В линейной теории упругости нет нужды в использовании перечисленных мер деформации; в ней основываются на вполне приемлемом при рассмотрении деформации массивных и слабодеформируемых тел предположении о существенной малости элементов матрицы тензора $\nabla\vec{u}$: $\left|\partial u_k / \partial a_s\right| \ll 1$. Этим допускается последовательное пренебрежение квадратами и произведениями компонент тензора по сравнению с их первыми степенями».

При описании деформирования материалов очень часто используются понятия малых (бесконечно малых) и больших (конечных) деформаций. При этом, малые деформации понимают как такие, когда компоненты тензоров деформации и вращений настолько малые, что формы недеформированного и деформированного тела могут приближенно считаться одинаковыми. Большие деформации понимают как такие, когда компоненты тензоров деформации и вращений настолько большие, что формы недеформированного и деформированного тела существенно отличаются. Также рассматривают (гораздо реже) промежуточные понятия деформаций «компоненты тензора деформаций малые – компоненты тензора вращений большие» и «компоненты тензора деформаций большие – компоненты тензора вращений малые».

Следует заметить, что если для малых деформаций классическая теория упругости предлагает достаточно общие и абстрактные ограничения на величины перемещений и градиентов перемещений

$$\left|u_k\right| \ll 1; \ \left|u_{k,i}\right| \ll 1, \tag{5}$$

то для больших деформаций теория ограничения не вводит.

Ограничения малости деформаций (5) введены для описания деформирования «массивных и слабодеформируемых» материалов, для которых существуют более конкретные ограничения. В частности, для перемещений полагается предельное значение не более 1%, т. е.

$$\left|u_k\right| \le 0,01 . \tag{6}$$

Ограничение на градиенты перемещений в (5) обычно понимают, что оно введено для линейной теории чисто математически с целью пренебрежения произведений градиентов в формуле (4), представляющей деформации через перемещения. Это пренебрежение устанавливает в геометрически линейной теории физический смысл для градиентов перемещений – они тогда идентичны некоторым компонентам деформации тела.

Ограничение (6) понимают таким образом: по отношению к единице длины перемещения не превосходят 1% и форма тела после деформирования не более чем на 1% отличается от формы тела до деформирования. Геометрически это может быть интерпретировано как условие, что кривая линия, определяющая перемещения на единичном промежутке, должна находиться в прямоугольнике с основой 1 (единичный промежуток) и высотой 0,02 (максимальные и минимальные перемещения 0,01 и – 0,01).

2. Некоторые факты из теории определяющих соотношений в теории упругости.

2.1. Общий вид определяющих соотношений, два подхода. Как известно [1, 11], в классической теории упругости существует два подхода к построению определяющих соотношений (соотношений между напряжениями и деформациями), которые основаны на базовом свойстве упругого тела обратимости процесса деформирования после снятия нагрузки, вызвавшей деформацию. Это свойство наблюдается в двух взаимосвязанных явлениях: в полной восстанавливаемости формы тела после снятия нагрузки и полной потере телом энергии, накопленной им при деформировании, после снятия нагрузки. Указанные два явления лежат в основе двух подходов к построению определяющих соотношений.

Первый подход ведет начало от Коши. Он состоит в формулировке взаимнооднозначных соотношений между тензорами напряжений и деформаций. Если нулевые напряжения соответствуют нулевым деформациям, то первоначальная форма тела после снятия нагрузки, вызвавшей деформацию, восстанавливается полностью. Если до нагружения существовали начальные напряжения и некоторая начальная форма тела, то после снятия нагрузки условие взаимной однозначности обеспечивает те же напряжения и ту же начальную форму.

Второй подход ведет начало от Грина. Здесь потенциальную (внутреннюю) энергию упругой деформации представляют в виде функции тензора деформации при условии, что компоненты тензора деформации полностью определяют состояние тела при его деформировании. В таком случае внутренняя энергия равна нулю при нулевых деформациях, т. е., упругое тело полностью теряет энергию, накопленную при деформации.

Ограничимся случаем изотропии упругих свойств деформируемого тела. Тогда в рамках первого подхода определяющие соотношения можно представить в некотором общем виде [8, 9]

$$\sigma_{ik} = \psi_0\left(I_1, I_2, I_3\right)\delta_{ik} + \psi_1\left(I_1, I_2, I_3\right)\varepsilon_{ik} + \psi_2\left(I_1, I_2, I_3\right)\varepsilon_{in}\varepsilon_{nk}, \tag{7}$$

где тензор деформации (3) описывается его тремя первыми алгебраическими инвариантами (базисными инвариантами)

$$I_1 = g_{ik}\varepsilon_{ik} = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33};$$

$$I_2 = \varepsilon_{ik}\varepsilon_{ki} = (\varepsilon_{11})^2 + (\varepsilon_{22})^2 + (\varepsilon_{33})^2 + 2(\varepsilon_{12})^2 + 2(\varepsilon_{23})^2 + 2(\varepsilon_{31})^2;$$

$$I_3 = \varepsilon_{ik}\varepsilon_{nk}\varepsilon_{in} = \left(\varepsilon_{11}\right)^3 + \left(\varepsilon_{22}\right)^3 + \left(\varepsilon_{33}\right)^3 + 3\varepsilon_{11}\left(\varepsilon_{12}\right)^2 + 3\varepsilon_{11}\left(\varepsilon_{31}\right)^2 + \tag{8}$$

$$+3\varepsilon_{22}\left(\varepsilon_{12}\right)^2 + 3\varepsilon_{22}\left(\varepsilon_{23}\right)^2 + 3\varepsilon_{33}\left(\varepsilon_{31}\right)^2 + 3\varepsilon_{33}\left(\varepsilon_{23}\right)^2 + 6\varepsilon_{12}\varepsilon_{31}\varepsilon_{23}.$$

В (7) функции ψ_0, ψ_1, ψ_2 как функции базисных инвариантов также являются инвариантами. Они полагаются модулями упругих деформаций и должны определяться экспериментальным путем (т.е., они сначала задаются аналитически и далее согласовываются с экспериментальными данными). В научной практике используются функции ψ_k, достаточно простые в аналитическом представлении.

Примечание 10. В описании кинематики деформирования вместо компонентов тензора деформаций ε_{ik} кроме эквивалентных им инвариантов I_k также используется еще одна группа параметров λ_k, которые однозначно описывают тензор деформации и которые имеют смысл удлинений материальных волокон, соответствующих главным направлениям тензора деформаций,

$$I_1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3;\; I_2 = (\lambda_1)^2 + (\lambda_2)^2 + (\lambda_3)^2;\; I_3 = (\lambda_1)^3 + (\lambda_2)^3 + (\lambda_3)^3. \tag{9}$$

В линейной теории упругости соотношения (6) значительно упрощаются и имеют название закона Гука

$$\sigma_{ik} = \lambda\varepsilon_{mm}\delta_{ik} + \mu\varepsilon_{ik}\,. \tag{10}$$

Для описания второго подхода напомним, что существует деление упругих материалов на гиперупругие, упругие и гипоупругие. Гиперупругие материалы определяются как такие, для которых существует бесконечное количество раз дифференцируемый упругий потенциал $W(\varepsilon_{ik})$ и определяющие соотношения для которых получаются по формуле

$$\sigma_{ik} = \left(\partial W / \partial \varepsilon_{ik}\right). \tag{11}$$

Для упругих материалов внутреннюю энергию, зависящую от шести независимых переменных ε_{IK}, определяют в виде разложения в ряд Тейлора в окрестности «точки» с нулевыми координатами $\varepsilon_{IK} = 0$ (при этом полагается, что два первых члена ряда равны нулю)

$$\begin{gathered} W(\varepsilon_{IK}) = \sum_{M=1}^{M=N-1} (1/M!)\left[\partial^M W / (\partial\varepsilon_{ij})^{m_1} \cdots (\partial\varepsilon_{sr})^{m_N}\right]_{\varepsilon_{IK}=0} (\varepsilon_{ij})^{m_1} \cdots (\varepsilon_{sr})^{m_N} + \cdots = \\ = \cancel{\left[W(\varepsilon_{IK})\right]_{\varepsilon_{IK}=0}} + \cancel{\left(\partial W / \partial \varepsilon_{ij}\right)_{\varepsilon_{IK}=0} \varepsilon_{ij}} + (1/2!)\left[(\partial^2 W / \partial\varepsilon_{ij}\partial\varepsilon_{kl})_{\varepsilon_{IK}=0} \equiv C_{ijkl}\right]\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl} + \\ +(1/3!)\left[(\partial^3 W / \partial\varepsilon_{ij}\partial\varepsilon_{kl}\partial\varepsilon_{mn})_{\varepsilon_{IK}=0} \equiv C_{ijklmn}\right]\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl}\varepsilon_{mn} + \cdots; \quad m_1 + \cdots + m_N = M. \end{gathered} \tag{12}$$

Линейная модель упругого деформирования соответствует сохранению в разложении (12) только квадратично нелинейных составляющих, квадратично нелинейная модель – дополнительно еще кубически нелинейных. Нелинейности более высоких порядков не используются в моделях упругого деформирования. Порядок величин, которыми пренебрегают в таких случаях, определяется остаточным членом в форме Пеано

$$R_N = o\left(\left[(\varepsilon_{11})^2 + \cdots + (\varepsilon_{23})^2\right]^{N/2}\right)$$

или в форме Лагранжа

$$R_N = (1/N!)\left\{\partial^N W / \left[(\partial\varepsilon_{ij})^{m_1} \cdots (\partial\varepsilon_{sr})^{m_N}\right]\right\}_{\varepsilon^o_{IK} = \theta\varepsilon_{IK}} (\varepsilon_{ij})^{m_1} \cdots (\varepsilon_{sr})^{m_N} \quad \theta \in (0;1). \tag{13}$$

Таким образом, малость остаточного члена порядка N в приближенном представлении внутренней энергии (12) определяется как малостью деформаций, так и малостью N-ых частных производных (имеющих смысл упругих констант реальных материалов).

Константы могут еще записываться в обозначениях Фойгта: $C_{ijkl} \equiv C_{IJ}$, $C_{ijklmn} \equiv$ $\equiv C_{IJK}$. Для случая изотропии свойств внутренняя энергия (12) имеет вид

$$\begin{gathered} W(\varepsilon_{ik}) = (1/2)C_{12}(\varepsilon_{mm})^2 + (1/2)(C_{11} - C_{12})(\varepsilon_{ik})^2 + \\ +(4/3)C_{456}\varepsilon_{ik}\varepsilon_{im}\varepsilon_{km} + C_{144}(\varepsilon_{ik})^2\varepsilon_{mm} + (1/6)C_{123}(\varepsilon_{mm})^3 + \cdots. \end{gathered} \tag{14}$$

Если учесть представление (3), то внутренняя энергия (12) может также быть записана в эквивалентном (12) виде разложения через градиенты перемещений. Для случая изотропии свойств такое разложение имеет вид

$$\begin{gathered} W(u_{i,k}) = (1/2)C_{12}(u_{m,m})^2 + (1/4)(C_{11} - C_{12})(u_{i,k} + u_{k,i})^2 + \\ +\left[(1/2)(C_{11} - C_{12}) + C_{456}\right]u_{i,k}u_{m,i}u_{m,k} + (1/2)(C_{12} + C_{144})u_{m,m}(u_{i,k})^2 + (1/3)C_{456}u_{i,k}u_{k,m}u_{m,i} + \\ +(1/2)C_{144}u_{i,k}u_{k,i}u_{m,m} + (1/6)C_{123}(u_{m,m})^3 + (1/8)\lambda(u_{p,m}u_{p,m})^2 + (1/4)\mu(u_{n,k}u_{n,i})^2 + \\ +(1/6)C_{456}\begin{bmatrix} (u_{i,k} + u_{k,i})(u_{i,m} + u_{m,i})u_{n,k}u_{n,s} + \\ +(u_{i,k} + u_{k,i})(u_{s,k} + u_{k,s})u_{p,m}u_{p,i} + (u_{i,m} + u_{m,i})(u_{s,k} + u_{k,s})u_{q,k}u_{q,i} \end{bmatrix} + \end{gathered} \tag{15}$$

$$+(1/8)C_{144}\left[4(u_{i,k}+u_{k,i})u_{n,k}u_{n,i}u_{m,m}+(u_{i,k}+u_{k,i})^2 u_{p,m}u_{p,m}\right]+$$

$$+(1/8)C_{123}(u_{m,m})^2 u_{p,m}u_{p,m}+$$

$$+(1/6)C_{456}\left[(u_{i,k}+u_{k,i})u_{p,m}u_{p,i}u_{n,k}u_{n,s}+(u_{i,m}+u_{m,i})u_{q,k}u_{q,i}u_{n,k}u_{n,s}+\right.$$

$$\left.+(u_{s,k}+u_{k,s})u_{q,k}u_{q,i}u_{p,m}u_{p,i}\right]+$$

$$+(1/4)C_{144}\left[(u_{i,k}+u_{k,i})u_{n,k}u_{n,i}u_{p,m}u_{p,m}+u_{m,m}(u_{n,k}u_{n,i})^2\right]+(1/8)C_{123}u_{m,m}(u_{p,m}u_{p,m})^2+$$

$$+(4/3)C_{456}u_{n,k}u_{n,i}u_{p,i}u_{p,s}u_{q,k}u_{q,s}+C_{144}(u_{n,k}u_{n,i})^2 u_{m,n}u_{m,n}+(1/6)C_{23}(u_{p,m}u_{p,m})^3+\cdots.$$

В случае бесконечного количества раз дифференцируемости упругого потенциала $W(u_{i,k})$ определяющие соотношения получаются по формуле

$$t_{ik}=(\partial W/\partial u_{k,i}). \qquad (16)$$

Следующий анализ основан на том, что внутренняя энергия всегда ограничена и поэтому бесконечные разложения (12),(14),(15) в виде рядов по степеням компонентов тензора деформаций ε_{ik} или компонентов градиентов перемещений $u_{i,k}$ должны сходиться. Прежде всего, следует еще раз отметить, что ряды (12),(14),(15) имеют постоянные коэффициенты и эти коэффициенты имеют физический смысл упругих постоянных. Остаточный член в форме Лагранжа (13) в разложении (15) имеет вид

$$R_N=(1/N!)\left\{\partial^N W\Big/\left[(\partial u_{i,j})^{m_1}\cdots(\partial u_{s,r})^{m_N}\right]\right\}_{u^o_{I,K}=\theta u_{I,K}}(u_{i,j})^{m_1}\cdots(u_{s,r})^{m_N}\quad \theta\in(0;1). \qquad (17)$$

Поскольку все частные производные внутренней энергии суть ограниченные величины, то стремление остаточного члена (17) к нулю и, соответственно, сходимость ряда Тейлора (15) обеспечивается условием

$$\left|u_{k,i}\right|<1. \qquad (18)$$

Примечание 11. Ограничение на градиенты перемещений (18) можно считать наиболее общим, поскольку оно не связано с условиями на величину деформаций – большие они или умеренно большие, или умеренно малые, или малые.

Геометрически условие (18) может быть интерпретировано следующим образом: если перемещения описываются непрерывно дифференцируемой функцией, соответствующей выпуклой вверх или вниз кривой линии, то неравенство (18) определяет факт, что эта кривая линия находится внутри равнобедренного треугольника, основа которого лежит на оси Ox и стороны которого наклонены к основе на (в каждом случае малый) угол $\alpha=\operatorname{arc\,tan}1=45^\circ$.

2.2. Упругие потенциалы. Конечно, в случае больших деформаций ограничения на градиенты перемещений не столь важны как в случае малых. Дело в том, что в описании больших деформаций используются, главным образом, параметры λ_k. Основные модели для так называемых несжимаемых материалов определяются такими представлениями внутренней энергии [7, 8, 15]:

$$W=(1/2)\,\mu\left[(\lambda_1)^2+(\lambda_2)^2+(\lambda_3)^2-3\right]- \text{ потенциал Трелоара;}$$

$$W=(1/4)\,\mu\begin{Bmatrix}(1+\beta)\left[(\lambda_1)^2+(\lambda_2)^2+(\lambda_3)^2-3\right]+\\+(1-\beta)\left[(\lambda_1)^{-2}+(\lambda_2)^{-2}+(\lambda_3)^{-2}-3\right]\end{Bmatrix}-\text{ потенциал Муни;}$$

$$W = (1/2)\,\mu\left[\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 - 3\right] \text{ – потенциал Бартенева – Хазановича;}$$

$$W = \mu\left\{(1+\beta)\left[\lambda_1 + \lambda_2 + \ \ + \lambda_3 - 3\right] + (1-\beta)\left[(\lambda_1)^{-1} + (\lambda_2)^{-1} + (\lambda_3)^{-1} - 3\right]\right\} \text{ – потенциал Черныха.}$$

В описании малых деформаций, как правило, не используют параметры λ_k.

Конкретные представления упругих потенциалов образуют довольно ограниченную группу. Два из них можно считать имеющими достаточно общую форму: потенциал Синьйорини [3, 30]

$$W = W(I_I^A, I_2^A) = h_2(I_I^A - 3) + h_1(I_2^A - 3) + h_3(I_2^A - 3)^2 \qquad (19)$$

(h_1, h_2, h_3 –упругие постоянные Синьйорини; I_1^A, I_2^A – инварианты тензора деформаций Альманзи) и потенциал Мурнагана [3, 9, 10, 27]

$$W = W(I_1, I_2, I_3) = (1/2)\lambda(I_1)^2 + \mu I_2 + (1/3)A(I_1)^3 + BI_1I_2 + (1/3)CI_3 \qquad (20)$$

(λ, μ – упругие постоянные Ляме; A, B, C – упругие постоянные Мурнагана).

Потенциал Мурнагана (20) также может быть представлен через компоненты нелинейного тензора деформаций Коши – Грина ε_{ik}, т.е.

$$W(\varepsilon_{ik}) = (1/2)\,\lambda(\varepsilon_{mm})^2 + \mu(\varepsilon_{ik})^2 + (1/3)\,A\varepsilon_{ik}\varepsilon_{im}\varepsilon_{km} + B(\varepsilon_{ik})^2\varepsilon_{mm} + (1/3)\,C(\varepsilon_{mm})^3. \qquad (21)$$

Существует связь между представлениями (12), (14) и (15):

$$C_{ijkl} \equiv \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + 2\mu I_{ijkl}; \quad I_{ijkl} = (1/2)(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}); \qquad (22)$$

$$C_{ijklmn} = 2C\delta_{ij}\delta_{kl}\delta_{mn} + 2B(\delta_{ij}I_{klmn} + \delta_{kl}I_{mnij} + \delta_{mn}I_{ijkl}) +$$

$$+(1/2)A(\delta_{ik}I_{jlmn} + \delta_{il}I_{jkmn} + \delta_{jk}I_{ilmn} + \delta_{jl}I_{ikmn}).$$

Также существует связь между постоянными C_{IJK} и A, B, C:

$$C_{111} = 2(A + 3B + C);\ C_{112} = 2(B + C);\ C_{123} = 2C;$$
$$C_{144} = B;\ C_{166} = (1/2)A + B;\ C_{456} = (1/4)A. \qquad (23)$$

Материал	λ $(10^{10} Pa)$	μ $(10^{10} Pa)$	A $(10^{11} Pa)$	B $(10^{11} Pa)$	C $(10^{11} Pa)$
алюминий Al 99	6,10	2,50	– 0,47	– 3,42	– 2,48
алюминий Al B535	5,80	2,60	– 2,23	– 2,37	– 2,76
алюминий Al D545	4,90	2,60	– 3,87	– 3,58	– 3,28
алюминий Al 8091	4,50	3,10	– 2,18	– 3,78	– 4,35
армко-железо	11,0	8,2	– 3,48	– 10,3	+ 11,0
вольфрам	7,50	7,30	– 1,08	– 1,43	– 9,08
медь	10,7	4,80	– 2,80	– 1,72	– 2,40
медь Cu 99.9	10,4	4,60	– 5,42	– 3,72	– 4,01
молибден	15,7	11,0	– 0,26	– 2,83	+ 3,72
латунь ЛС-59-1	10,5	3,7	– 4,05	+ 17,0	+ 2,4
латунь Л-62			– 5,0	– 2,9	– 2,4
сталь Hecla17	11,1	8,21	– 4,61	– 6,36	– 7,08
сталь Hecla37	11,1	8,21	– 3,28	– 5,95	– 6,68
сталь Hecla138A	10,9	8,20	– 4,26	– 6,19	– 7,08
сталь HeclaATN	8,7	7,20	– 5,35	– 7,62	– 4,00
сталь 42	11,0	8,10	– 0,48	– 5,03	– 6,52
сталь E355	10,9	8,20	– 1,92	– 5,65	– 7,24
сталь рельсовая	11,6	8,00	– 2,48	– 6,23	– 7,14

Примечание 12. Из представления (21) более отчетливо видно, что (19) представляет собой полином по степеням компонент тензора с постоянными коэффициентами и включает лишь вторые и третьи степени компонентов тензора деформаций. Упругие постоянные λ, μ, A, B, C определены для многих используемых в инженерной практике материалов. Эти материалы относят к классу слабодеформируемых материалов. Этот класс еще можно охарактеризовать как материалы, деформирующиеся нелинейно упруго при малых деформациях. Значения постоянных λ, μ, A, B, C для некоторых характерных металлических материалов показаны в таблице [1, 10 – 12, 25, 32].

2.3. О различии в описании физической нелинейности разными тензорами напряжений. Продолжим анализ второго подхода и напомним, что компоненты тензора напряжений определяются из потенциала по формуле $\sigma_{ik} = (\partial W / \partial \varepsilon_{ik})$ или $t_{ik} = (\partial W / \partial u_{k,i})$.
В первом случае тензор напряжений Лагранжа имеет стандартный вид, следующий из представления (12)

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{2}(\lambda \delta_{ij}\delta_{kl} + 2\mu I_{ijkl})\varepsilon_{kl} +$$

$$+\frac{1}{6}\begin{bmatrix} 2C\delta_{ij}\delta_{kl}\delta_{mn} + 2B(\delta_{ij}I_{klmn} + \delta_{kl}I_{mnij} + \delta_{mn}I_{ijkl}) + \\ +(1/2)A(\delta_{ik}I_{jlmn} + \delta_{il}I_{jkmn} + \delta_{jk}I_{ilmn} + \delta_{jl}I_{ikmn}) \end{bmatrix}\varepsilon_{kl}\varepsilon_{mn} + \cdots. \qquad (24)$$

Примечание 13. Если в представлении (24) ограничиться первыми двумя составляющими, т.е. учесть только линейные и квадратично нелинейные составляющие, то можно получить прямую связь с потенциалом Мурнагана, для которого выражения для компонент тензора напряжений Лагранжа имеют вид (ниже показана лишь одна компонента, структура зависимости для остальных компонент подобна первой)

$$\begin{aligned} \sigma_{11} = (\lambda + 2\mu)\varepsilon_{11} + \lambda(\varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) + A\Big\{(\varepsilon_{11})^2 + (1/3)\Big[(\varepsilon_{12})^2 + (\varepsilon_{13})^2\Big]\Big\} + \\ +B\Big[3(\varepsilon_{11})^2 + 2\varepsilon_{11}(\varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})\Big] + C(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})^2. \end{aligned} \qquad (25)$$

Чтобы вычислить тензор напряжений Кирхгоффа как степенную функцию компонентов градиентов перемещений, следует записать его через градиенты перемещений и в итоге он оказывается уже степенной функцией более высокого порядка (второй порядок преобразуется в шестой, третий – в девятый и т.д.). К примеру, потенциал Мурнагана (21) становится степенной функцией градиентов перемещений от второго до шестого порядков [20]

$$W = (1/2)\lambda(u_{m,m})^2 + (1/4)\mu(u_{i,k} + u_{k,i})^2 + \big[\mu(1/4)A\big]u_{i,k}u_{m,i}u_{m,k} + \big(1/2\big)(\lambda + B)u_{m,m}(u_{i,k})^2 +$$

$$+(1/12)Au_{i,k}u_{k,m}u_{m,i} + (1/2)Bu_{i,k}u_{k,i}u_{m,m} + (1/3)C(u_{m,m})^3 +$$

$$+(1/8)\lambda(u_{p,m}u_{p,m})^2(1/4)\mu(u_{n,k}u_{n,i})^2 +$$

$$+\big(1/24\big)A\begin{bmatrix}(u_{i,k} + u_{k,i})(u_{i,m} + u_{m,i})u_{n,k}u_{n,s} + \\ +(u_{i,k} + u_{k,i})(u_{s,k} + u_{k,s})u_{p,m}u_{p,i} + (u_{i,m} + u_{m,i})(u_{s,k} + u_{k,s})u_{q,k}u_{q,i}\end{bmatrix} + \qquad (26)$$

$$+(1/8)B\Big[4(u_{i,k} + u_{k,i})u_{n,k}u_{n,i}u_{m,m} + (u_{i,k} + u_{k,i})^2 u_{p,m}u_{p,m}\Big] + (1/4)C(u_{m,m})^2 u_{p,m}u_{p,m} +$$

$$+(1/24)A\Big[(u_{i,k} + u_{k,i})u_{p,m}u_{p,i}u_{n,k}u_{n,s} + (u_{i,m} + u_{m,i})u_{q,k}u_{q,i}u_{n,k}u_{n,s} +$$

$$+(u_{s,k} + u_{k,s})u_{q,k}u_{q,i}u_{p,m}u_{p,i}\Big] +$$

$$+(1/4)B\left[(u_{i,k}+u_{k,i})u_{n,k}u_{n,i}u_{p,m}u_{p,m}+u_{m,m}(u_{n,k}u_{n,i})^2\right]+(1/4)Cu_{m,m}(u_{p,m}u_{p,m})^2+$$

$$+(1/3)Au_{n,k}u_{n,i}u_{p,i}u_{p,s}u_{q,k}u_{q,s}+B(u_{n,k}u_{n,i})^2u_{m,n}u_{m,n}+(1/3)C(u_{p,m}u_{p,m})^3.$$

Именно такой путь был избран в пионерской работе [7] и далее развивался во многих работах [3, 30]. В ней исследованы продольные и поперечные плоские волны и для вывода соответствующих нелинейных волновых уравнений в потенциале были сохранены составляющие второго и третьего порядков и пренебрежены составляющие четвертого-шестого порядков

$$\begin{gathered}W=(1/2)\left[(\lambda+2\mu)(u_{1,1})^2+\mu\left((u_{2,1})^2+(u_{3,1})^2\right)\right]+\\+\left[\mu+(1/2)\lambda+(1/3)A+B+(1/3)C\right](u_{1,1})^3+(1/2)(\lambda+B)u_{1,1}\left[(u_{2,1})^2+(u_{3,1})^2\right],\end{gathered}\tag{27}$$

где принято обычное для анализа плоских волн предположение $u_k=u_k(x_1,t)$ о распространении волн вдоль оси Ox_1. Тогда компоненты несимметричного тензора напряжений Кирхгоффа имеют вид квадратично нелинейных соотношений (далее показаны только 3 из 9)

$$\begin{gathered}t_{11}=(\lambda+2\mu)u_{1,1}+(3/2)\left[\lambda+2\mu+2(A+3B+C)\right](u_{1,1})^2+\\+(1/2)\left[\lambda+2\mu+(1/2)A+B\right]\left[(u_{2,1})^2+(u_{3,1})^2\right];\end{gathered}\tag{28}$$

$$t_{12}=\mu u_{2,1}+(1/2)\left[\lambda+2\mu+(1/2)A+B\right]u_{1,1}u_{2,1};\tag{29}$$

$$t_{13}=\mu u_{3,1}+(1/2)\left[\lambda+2\mu+(1/2)A+B\right]u_{1,1}u_{3,1}.\tag{30}$$

2.4. Ограничение на компоненты тензора деформаций и градиенты перемещений по причине линейности соотношений Коши. Возвратимся к факту сохранения в представлении потенциала (26) только составляющих не выше третьего порядка и пренебрежения составляющими более высокого порядка. Этот факт, к сожалению, ранее не комментировался, хотя он является конкретным проявлением различия ограничений на малость деформаций и малость градиентов деформаций для слабодеформируемых упругих материалов. Под различием в данном случае понимается факт, что внутренняя энергия при ее представлении квадратично и кубически нелинейными составляющими тензора деформаций эквивалентна представлению через градиенты перемещений составляющими от второго до шестого порядков и поэтому не эквивалентна представлению (25). Так возникает проблема различения малости деформаций и градиентов перемещений. Однако, исходным ограничением является ограничение на деформации – они не должны быть большими и их малость должна как-то регламентироваться.

Покажем далее один из путей ограничения на компоненты тензора деформаций по причине их малости, соответствующий концепции общего ограничения (5).

Примечание 14. Ограничение (5) имеет целью построение простейшей модели упругого деформирования – линейной модели малых упругих деформаций.

Ограничение связано с вопросом, когда деформации можно считать малыми и когда градиенты перемещений также малы. Исходным уравнением выберем нелинейные соотношения Коши (3) и частный случай деформации $u_k=u_k(x_1,t)$, характерный для плоских волн в направлении оси абсцисс. Тогда формула (3) упрощается и для продольной деформации ε_{11} имеет вид

$$\varepsilon_{11}=u_{1,1}+(1/2)\left[(u_{1,1})^2+(u_{2,1})^2+(u_{3,1})^2\right].\tag{31}$$

Покажем, что формула (31) позволяет установить простую приближенную связь между ε_{11} и $u_{1,1}, u_{2,1}, u_{3,1}$. Выберем градиент с наибольшим значением и завысим значения двух остальных, так что $u_{1,1} = u_{2,1} = u_{3,1} = \upsilon$. Перепишем уравнение (31) в виде

$$\upsilon^2 + (2/3)\upsilon - (2/3)\varepsilon_{11} = 0 .$$

Если выполняется условие $\varepsilon_{11} = 0 \to \upsilon = 0$, то $\upsilon = (1/3)(-1+\sqrt{1+6\varepsilon_{11}}\ )$. Последняя формула свидетельствует, что существует следующее различие между υ и ε_{11} (в процентах):

$$\varepsilon_{11} = 5\cdot 10^{-2} \to 4{,}7\%; \quad \varepsilon_{11} = 4\cdot 10^{-2} \to 3{,}8\%; \quad \varepsilon_{11} = 3\cdot 10^{-2} \to 2{,}9\%;$$

$$\varepsilon_{11} = 2\cdot 10^{-2} \to 1{,}9\%; \quad \varepsilon_{11} = 1\cdot 10^{-2} \to 0{,}99\%; \quad \varepsilon_{11} = 5\cdot 10^{-3} \to 0{,}5\%;$$

$$\varepsilon_{11} = 3\cdot 10^{-3} \to 0{,}3\%; \quad \varepsilon_{11} = 1\cdot 10^{-3} \to 0{,}1\%.$$

Из приведенных формул следует, что может быть приближенно определено значение деформации, при котором различие между значениями деформации и градиента деформации несущественно (может быть определено пороговое значение для значения деформации, ниже которой она может полагаться малой и не зависит от нелинейных составляющих в (3)).

Само понятие различия должно быть также определено: если различие составляет около 1 %, тогда пороговое значение малой деформации составляет около $1\cdot 10^{-2}$; если различие составляет около 0,1 %, тогда пороговое значение малой деформации составляет около $1\cdot 10^{-3}$.

Итак, в рамках геометрически линейной теории общее ограничение на компоненты тензора деформаций может быть приближенно уточнено к виду

$$\left|\varepsilon_{ki}\right| \le 1\cdot 10^{-2} \tag{32}$$

и ограничение (5) на градиенты перемещений $\left|u_{k,i}\right| \ll 1$ – к виду

$$\left|u_{k,i}\right| \le 1\cdot 10^{-2} . \tag{33}$$

Примечание 15. Показанная приближенная оценка (ограничение) (32) имеет только геометрический характер и не зависит от свойств материала. Она совпадает с показанным в формуле (6) ограничением, позволяющим считать деформации малыми.

Примечание 16. Знание порогового значения для конкретного типа малых деформаций позволяет решать, находимся ли мы действительно в рамках геометрически линейной теории и в области малых деформаций или нет, однако не дает ответ на вопрос, будут ли в этой области определяющие соотношения нелинейными (т. е., находимся ли мы в рамках физически линейной теории или нет).

Примечание 17. Определяющие соотношения (27) и (29) не идентичны и должны представляться геометрически различающимися нелинейными кривыми для одного и того же материала.

2.5. Степень отклонения кривых «напряжение – деформация» и «напряжение – градиент перемещения» от прямой линии, соответствующей линейному закону Гука. Рассмотрим далее степень отклонения кривых «напряжение – деформация» и «напряжение – градиент перемещения» от прямой линии, соответствующей линейному закону Гука, на частном примере сдвиговой деформации, т.е. рассмотрим далее в рамках принятого ограничения для движения в виде плоских волн только сдвиговую компоненту тензора напряжений Кирхгоффа (29) и соответствующую компоненту тензора напряжений

$$\sigma_{12} = 2\mu\varepsilon_{12} + 2\left[A + 2B\right]\varepsilon_{11}\varepsilon_{12} . \tag{34}$$

Для этого выберем три слабо деформируемых металлических материала из таблицы и наиболее неблагоприятный случай максимальных значений $\varepsilon_{11}=\varepsilon_{12}=\varepsilon,\ u_{1,1}=u_{2,1}=\upsilon$. Запишем соответствующие формулы

$$\sigma_{12}=2\mu\varepsilon+2\left(A+2B\right)\varepsilon^2; \tag{35}$$

$$t_{12}=\mu\upsilon+\left(1/2\right)\left[\lambda+2\mu+\left(1/2\right)A+B\right]\upsilon^2. \tag{36}$$

Ограничим далее анализ областью значений ε и υ ниже их пороговых значений $\varepsilon=\upsilon=1\cdot10^{-2}$, вычисленных для оценки применимости геометрически нелинейной теории упругости с точностью до 1% , и определим для выбранных трех материалов отклонения (в %) от прямых линий $\sigma_{12}=2\mu\varepsilon$ и $t_{12}=\mu\upsilon$.

Алюминий:

$$\varepsilon=0{,}01;\ 0{,}005;\ 0{,}001;\ 0{,}00057\to\ (\%=)17{,}25;\ 8{,}63;\ 1{,}73;\ 1{,}00; \tag{37}$$

$$\upsilon=0{,}01;\ 0{,}005;\ 0{,}0048;\ 0{,}0046\ \to (\%=)\ 2{,}20;\ 1{,}10;\ 1{,}06;\ 1{,}00;$$

Медь:

$$\varepsilon=0{,}01;\ 0{,}005;\ 0{,}001;\ 0{,}00077\to (\%=)13{,}0;\ 6{,}50;\ 1{,}30;\ 1{,}00; \tag{38}$$

$$\upsilon=0{,}01;\ 0{,}008;\ 0{,}007;\ 0{,}0065\ \to (\%=)\ 1{,}54;\ 1{,}23;\ 1{,}08;\ 1{,}00;$$

Сталь Hecla37:

$$\varepsilon=0{,}01;\ 0{,}005;\ 0{,}001;\ 0{,}00082\to (\%=)12{,}3;\ 6{,}15;\ 1{,}23;\ 1{,}00; \tag{39}$$

$$\upsilon=0{,}01;\ 0{,}005;\ 0{,}001;\ 0{,}00082\ \to (\%=)1{,}83;\ 1{,}28;\ 1{,}10;\ 1{,}00.$$

Примечание 18. Напомним, что пороговое значение деформации и градиента перемещений определено как такое значение, при превышении которого они уже не могут рассматриваться как малые величины. Поэтому сравнение определенных приближенно отклонений нелинейных кривых $\sigma\sim\varepsilon$ и $t\sim\upsilon$ от их линейного прототипа реализуется здесь для геометрически линейной теории деформирования. Основной результат, следующий из сравнения, может быть разделен на два: 1) данные (37) – (39) подтверждают факт, что многие металлы деформируются нелинейно упруго при малых деформациях (деформируются слабо) и что модель Мурнагана описывает эту особенность металлов; 2) нелинейные кривые $\sigma\sim\varepsilon$ и $t\sim\upsilon$ отличаются друг от друга примерно в 8 раз – если отклонения около порогового значения $\varepsilon=\upsilon=1\cdot10^{-2}$ для кривых $\sigma\sim\varepsilon$ существенно большие (от 17% до 12%), то для кривых $t\sim\upsilon$ отклонения значительно меньше (от 1.5% до 2.2%).

Таким образом, ограничение на градиенты деформаций (33) обеспечивает приближенно геометрическую линейность деформирования многих металлов, но не обеспечивает физическую линейность их деформирования. Для обеспечения последней необходимо более жесткое ограничение

$$\left|u_{k,i}\right|\le 8\cdot10^{-4}. \tag{40}$$

3. Описание динамики упругого нелинейного деформирования в перемещениях. Пример ограничения на градиенты перемещений в теории плоских волн.

3.1. Общий вид уравнений движения. Для построения уравнений движения упругой среды используют уравнения баланса (массы, количества движения, момента количества движения, энергии). В отличие от кинематической части классической теории упругости эта часть относится к кинетике движения и требует введения кинетических параметров (сил и напряжений).

Если факторы изменения массы и моментов движения отсутствуют, то достаточно проанализировать уравнения баланса количества движения. Локальная запись этих уравнений имеет стандартный для классической теории упругости вид

$$\sigma_{ik,k} + F_i = \rho \ddot{u}_i \quad \text{или} \quad t_{ki,k} + F_i = \rho \ddot{u}_i, \tag{41}$$

где σ_{ik} – симметричный тензор напряжений Лягранжа; t_{ik} – несимметричный тензор напряжений Кирхгоффа; F_i – компоненты главного вектора внешних сил.

3.2. Нелинейные уравнения движения в перемещениях. Эти уравнения как обобщения классических уравнений Ляме находятся в несколько шагов [30]. В первом подходе в балансовое уравнение (40) подставляется представление (6)

$$\left[\psi_0(I_1, I_2, I_3)\right]_{,k} \delta_{ik} + \left[\psi_1(I_1, I_2, I_3)\right]_{,k} \varepsilon_{ik} +$$

$$+\psi_1(I_1, I_2, I_3)\varepsilon_{ik,k} + \left[\psi_2(I_1, I_2, I_3)\right]_{,k} \varepsilon_{in}\varepsilon_{nk} + \psi_2(I_1, I_2, I_3)(\varepsilon_{in}\varepsilon_{nk})_{,k} + F_i = \rho\ddot{u}_i \rightarrow$$

$$\rightarrow \left(\frac{\partial\psi_0}{\partial I_1} I_{1,k} + \frac{\partial\psi_0}{\partial I_2} I_{2,k} + \frac{\partial\psi_0}{\partial I_3} I_{3,k} \right)\delta_{ik} + \left(\frac{\partial\psi_1}{\partial I_1} I_{1,k} + \frac{\partial\psi_1}{\partial I_2} I_{2,k} + \frac{\partial\psi_1}{\partial I_3} I_{3,k} \right)\varepsilon_{ik} +$$

$$+ \psi_1(I_1, I_2, I_3)\varepsilon_{ik,k} + \left(\frac{\partial\psi_2}{\partial I_1} I_{1,k} + \frac{\partial\psi_2}{\partial I_2} I_{2,k} + \frac{\partial\psi_2}{\partial I_3} I_{3,k} \right)\varepsilon_{in}\varepsilon_{nk} +$$

$$+ \psi_2\left(I_1, I_2, I_3\right)\left(\varepsilon_{in}\,\varepsilon_{nk}\right)_{,k} + F_i = \rho\ddot{u}_i \tag{42}$$

и затем вычисляются при известных функциях ψ_0, ψ_1, ψ_2 производные $\psi_{0,m}, \psi_{1,m}, \psi_{2,m}$ и производные от инвариантов. В итоге для всех известных представлений может быть выделена линейная (соответствующая линейному закону Гука (9) и уравнениям Ляме) и нелинейная (зависящая от произведений градиентов перемещений и их производных с порядком нелинейности два и более) части

$$\left(\lambda + \mu\right)u_{k,ki} + \mu u_{i,kk} + F_i - \rho\ddot{u}_i = N_i(u_{n,m},\, u_{n,mp},\, u_{n,mpq},\, ...). \tag{43}$$

Во втором подходе в балансовое уравнение (43) подставляются компоненты тензора напряжений Кирхгоффа t_{ik}. Подстановка соотношений (27 – 29) в уравнения движения $t_{ik,i} + X_k = \rho\ddot{u}_k$ дает квадратично нелинейные волновые уравнения для трех поляризованных плоских волн [3, 30]

$$\rho\, u_{1,tt} - (\lambda + 2\mu)u_{1,11} = N_1\, u_{1,11}u_{1,1} + N_2(u_{2,11}u_{2,1} + u_{3,11}u_{3,1}); \tag{44}$$

$$\rho u_{2,tt} - \mu u_{2,11} = N_2(u_{2,11}u_{1,1} + u_{1,11}u_{2,1}); \tag{45}$$

$$\rho u_{3,tt} - \mu u_{3,11} = N_2(u_{3,11}u_{1,1} + u_{1,11}u_{3,1}); \tag{46}$$

$$N_1 = 3\left[\left(\lambda + 2\mu\right) + 2\left(A + 3B + C\right)\right],\ N_2 = \lambda + 2\mu + \left(1/2\right)A + B. \tag{47}$$

Примечание 19. Интуитивно рациональное решение о пренебрежении в потенциале Мурнагана (20) составляющих порядка выше третьего имеет следствием включение в тензор напряжений и волновые уравнения нелинейных составляющих только второго порядка. В итоге, поля деформаций и напряжений описываются одинаково с точностью до величин градиентов деформации третьего порядка (третий порядок уже не учитывается). Однако вопрос о том, следует ли учитывать третий-пятый порядки в тензоре напряжений и в волновых уравнениях, в то время как в тензоре деформаций учитывается лишь второй порядок, остается открытым. Учет третьего порядка (кубической нелинейности) показал, что поперечные плоские волны описываются лучше, поскольку в случае такого учета описывается нелинейное взаимодействие и самогенерация поперечных волн. Следовательно, волны в рамках учета более высоких приближений желательно изучать. При этом возникает коллизия между описанием деформаций в квадратичном приближении и напряжений в более высоких приближениях.

3.3. Ограничение на значение градиента перемещения, возникающее при решении нелинейного волнового уравнения в перемещениях. Рассмотрим задачу о распространении нелинейно упругой плоской продольной волны перемещения при условии, что изначально возбуждается только эта волна (поперечные волны не возбуждаются). Тогда в упругой среде возникают лишь продольные перемещения и математически задача описывается несколько упрощенным нелинейным волновым уравнением (44)

$$\rho u_{1,tt} - (\lambda + 2\mu) u_{1,11} = N_1 u_{1,11} u_{1,1} . \tag{48}$$

Предположим, что первоначально волна не обязательно гармоническая и имеет профиль, характерный для простой волны $u_1(x,0) = F_1(x)$ (дважды непрерывно дифференцируемая функция). Будем искать решение уравнения (48) в виде волны Даламбера с неизвестной скоростью v, т.е.

$$u_1(x,t) = F_1(x - vt) . \tag{49}$$

Примечание 20. Фазовую скорость v можно понимать согласно Лайтхиллу [23] как местную скорость волны в точке x и в момент времени t. Тогда можно применить приближенную процедуру нахождения функции F_1, которая совпадает с трактованием Лайтхиллом простой волны Римана.

Указанная процедура основана на первичном предположении, что фазовая скорость определяется уравнением (48) и имеет вид [3]

$$v = c_1 \sqrt{1 + \alpha\left(\partial u / \partial x\right)} , \tag{50}$$

где $c_1 = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$, $\alpha = 3 + 2\left[(A + 3B + C)/(\lambda + 2\mu)\right]$. (51)

Следующий шаг в процедуре состоит в приближенном представлении решения в виде

$$u(x,t) = F_1\left\{x - c_1\left[1 + \alpha\left(\partial u/\partial x\right)\right]^{1/2}\right\} \approx F_1\left\{x - c_1 t - (1/2)\alpha t\left(\partial u/\partial x\right)\right\}. \tag{52}$$

Приближенность в (52) состоит в замене $\left[1 + \alpha\left(\partial u/\partial x\right)\right]^{1/2} \approx 1 + (1/2)\alpha\left(\partial u/\partial x\right)$, которая возможна лишь при малых значениях $\alpha\left(\partial u/\partial x\right)$. Если ограничиться случаем слабодеформируемых металлов из таблицы, то можно указать более определенное ограничение на градиент перемещения. Для этого сначала необходимо оценить значения параметра α. В данном случае он изменяется в диапазоне $2 \le \alpha \le 19$. Далее следует определить приемлемую точность в формуле (52). Пусть она составляет 0,1% подобно одному из предыдущих случаев приближенных оценок значений градиента перемещений. На основании равенств $\sqrt{1,094} = 1,00459455...$, $\sqrt{1 + 0,094} \approx 1 + (1/2)0,094 = 1,0047$ можно принять, что $\left|\alpha\left(\partial u/\partial x\right)\right| \le 0,01$. Следовательно, получим оценку

$$\left|\left(\partial u/\partial x\right)\right| \le 0,0005 = 5 \cdot 10^{-4} . \tag{53}$$

3.4. О геометрической интерпретации конкретных ограничений на градиенты перемещений в анализе волн. Начнем с того, что максимальная амплитуда волны перемещения является индикатором для принятия решения, какую модель деформирования следует принимать – модель малых или модель конечных деформаций. Однако также в теории волн перемещения очень важным параметром является отношение максимальной амплитуды волны к длине волны (для гармонических волн) или максимальной амплитуды волны к величине подошвы волны (для одиночных или простых волн). Эта длина соответствует введенному в [16] геометрическому параметру L, характеризующему изменяемость механических полей. Поэтому указанное выше отношение является индикатором для принятия решения – соответствуют ли длины или подошвы волн континуальной или дискретной модели материала. Напомним, что в задачах устойчивости таким индикатором является отношение длины волны моды потери устойчивости L к геометрическому параметру h – характерной длине внутренней структуры материала и в задачах статики минимальной длине L, на которой изменяются существенно механические поля, к геометрическому параметру h.

Ограничения на градиенты перемещений (как общее (18), так и менее общие (6), (32), (40), (53)) также могут играть роль индикаторов для принятия решения, находимся ли мы в рамках континуального подхода к упругому деформированию материала. Дело в том, что если учесть, что форма волны задается перемещением $u(x,t)$, и вспомнить, что градиент перемещения $\partial u/\partial x$ геометрически трактуется как касательная к кривой $u = u(x,t)$, определяющей форму волны, то любое ограничение на значения градиента перемещения

$$\left|(\partial u/\partial x)\right| \le c \tag{54}$$

может трактоваться как основание для двух ограничений.

Первое имеет в каждом конкретном случае значения постоянной c свою интерпретацию:

для случая (5) – определяет общую (геометрическую и физическую одновременно) линейность для всех возможных упругих материалов;

для случая (18) – определяет общую (геометрическую и физическую одновременно) нелинейность для всех возможных упругих материалов;

для случая (33) – приближенно определяет геометрическую линейность для определенно го класса упругих материалов (слабодеформируемых металлических материалов;

для случая (40) – приближенно определяет общую (геометрическую и физическую одновременно) линейность для того же класса упругих материалов;

для случая (53) – определяет возможность приближенного подхода к построению решения в виде плоских гармонических и одиночных волн для того же класса упругих материалов.

Второе ограничение – общее для всех случаев и имеет следующую геометрическую интерпретацию: если перемещения описываются непрерывно дифференцируемой функцией, соответствующей выпуклой вверх или вниз кривой линии, то неравенство (54) определяет факт, что эта кривая линия находится внутри равнобедренного треугольника, основа которого лежит на оси Ox и стороны которого наклонены к основе на угол $\alpha = \arctan c$. Если при этом известно значение параметра h изменяемости механических полей, то оказывается возможным решать – находимся ли мы в рамках континуального подхода к упругому деформированию материала.

Следует также отметить четыре факта: 1) в большинстве случаях ограничений угол очень малый (поэтому с большой точностью $\alpha = c$ – к примеру, $= \tan 5° = 0,0875$); 2) основа треугольника в теории волн определяется длиной волны или равноценным параметром; 3) верхняя вершина треугольника всегда превосходит значение максимальной амплитуды; 4) кривая $u_i(x_k)$ внутри треугольника не обязательно симметрична.

Итак, ограничение типа (54) может служить основой для обоих индикаторов, указанных в начале этого пункта: какую модель деформирования следует принимать – модель малых или модель конечных деформаций – и соответствуют ли длины или подошвы волн континуальной модели материала.

4. Заключение.

Описаны некоторые возможные математические и физические ограничения на значения градиентов перемещений, возникающие при анализе задач теории упругости, уточняющие достаточно абстрактное классическое ограничение $|u_{k,i}| \ll 1$, и прокомментирована геометрическая интерпретация ограничений.

Инициатором в проведенном исследовании выступил академик Гузь А.Н., который в дискуссии на одном из заседаний ученого совета Института механики НАН Украины им. С.П.Тимошенко сформулировал идею о недостаточности существующего анализа ограничений на градиенты перемещений в теории упругости. Также он предложил одну из возможных геометрических интерпретаций ограничения на градиент перемещения при описании упругой плоской волны.

Последующее изучение автором этого элемента основ теории упругости показало, что здесь существуют определенные умалчивания, что-то не акцентируется и считается само собой разумеющимся, какие-то моменты просто не описаны в существующих монографиях и учебниках по теории упругости. Потребовались беседы с эрудированными и креативными учеными и внимательное чтение их работ. Здесь снова основным генератором выступил академик Гузь А.Н., общение с которым позволило наполнить проведенный анализ фактами и рассуждениями. Внимательный читатель может увидеть в тексте статьи вкрапления из научных публикаций нескольких мировых авторитетов в этой области, в том числе и академика Гузя А.Н.

Поэтому автор полагает приятным долгом и абсолютно необходимым действием выразить признательность Гузю Александру Николаевичу за практическую помощь в выполнении настоящего исследования.

Р Е З Ю М Е . Розглянуто класичне і досить абстрактне обмеження для пружних матеріалів $|u_{k,i}| \ll 1$ та ряд випадків можливих математичних та фізичних обмежень на значення градієнтів зміщень.

1. *Bogdanov V.L., Guz A.N., Nazarenko V.M.* Spatial Problems of the Fracture of Materials Loaded along Cracks (Review) // Int. Appl. Mech. – 2015. – **51**, N 5. – P. 489 – 560.
2. *Carneiro V.H., Meireles J., Puga H.* Auxetic Materials – A Review // Materials Science-Poland. – 2013. – **31**, N 4. – P. 561 – 571.
3. *Cattani C., Rushchitsky J.J.* Wavelet and Wave Analysis as applied to Materials with Micro or Nanostructures. – Singapore – London: World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2007. – 466 p.
4. *Dudek K.K., Attard D., Caruana-Gauci R., Wojciechowski K.W., Grima J.N.* Unimode metamaterials exhibiting negative linear compressibility and negative thermal expansion // Smart Materials and Structures. – 2016. – **25**, N 2. – P.025009.
5. *Fu Y.B., Ogden R.W.* (Eds) Nonlinear Elasticity: Theory and Applications // London Mathematical Society Lecture Note Series, **283**. – Cambridge: Cambridge University Press, 2001. – 525 p.
6. *Germain P.* Cours de mechanique des milieux continua. T.1. Theorie generale. – Paris: Masson et Cie Editeurs, 1973. – 417 p.
7. *Goldberg Z.A.* On interaction of plane longitudinal and transverse waves // Akusticheskii Zhurnal. – 1960. – **6**, N 2. – P. 307 – 310.
8. *Goldenblatt I.I.* Nonlinear Problems of the Theory of Elasticity. – Moscow: Nauka, 1969. – 336 p.
9. *Green A.E., Adkins J.E.* Large Elastic Deformations and Nonlinear Continuum Mechanics. – London: Oxford University Press, Clarendon Press, 1960. – 348 p.
10. *Guz A.N.* Elastic Waves in Bodies with Initial Stresses. Vol.1, General Problems, Vol.2, Regularities of Propagation. – Kiev: Naukova Dumka, 1986. – 376 p., 536 p.
11. *Guz A.N.* Fundamentals of the Three-Dimensional Theory of Stability of Deformable Bodies / Series: Foundations of Engineering Mechanics. – Berlin: Springer, 1999. – 555 p.
12. *Guz A.N.* Ultrasonic Nondestructive Method for Stress Analysis of Structural Members and Near-Surface Layers of Materials. Focus on Ukrainian Research (Review) // Int. Appl. Mech. – 2014. – **50**, N 3. – P. 231 – 252.
13. *Guz A.N.* Recognation of the Achievements of the S.P.Timoshenko Institute of Mechanics by the World’s Scientific Community // Int. Appl. Mech. – 2015. – **51**, N1. – P. 1 – 11.
14. *Guz A.N., Makhort F.G., Gushcha O.I.* Introduction in Electroelasticity. – Kiev: Naukova Dumka, 1977. –152 p.
15. *Guz A.N., Rushchitsky J.J.* Establishing foundations of the mechanics of nanocomposites // Int.Appl. Mech. – 2011. – **47**, N 1. – P. 2 – 44.

16. *Guz A.N., Rushchitsky J.J.* Short Introduction to Mechanics of Nanocomposites. – Rosemead, CA: Scientific and Academic Publishing, 2013. – 280 p.
17. *Guz A.N., Rushchitsky J.J.* Some fundamental aspects of mechanics of nanocomposite materials // J. of Nanotechnologies. – 2013. – **24**, special issue «Nanocomposites 2013». – P. 1 – 15.
18. *Guz A.N., Rushchitsky J.J.* On features of continuum description of nanocomposite material // J. of Research in Nanotechnology. – 2014. – **1**, N 1. – P. 50 – 60.
19. *Guz I.A., Rushchitsky J.J.* Comparison of mechanical properties and effects in micro- and nanocomposites with carbon fillers (carbon microfibers, graphite microwhiskers, and carbon nanotubes) / Mechanics of Comp. Materials. – 2004. – **40**, N 3. – P. 179 – 190.
20. *Hanyga A.* Mathematical Theory of Nonlinear Elasticity. – California: Ellis Horwood, 1983. – 430 p.
21. *Hetnarski R.B., Ignaczak J.* The Mathematical Theory of Elasticity. – Boca Raton: CRC Press, Taylor and Francis Group, 2010. – 837 p.
22. *Holzapfel G.A.* Nonlinear Solid Mechanics. A Continuum Approach for Engineering. – Chichester: Wiley, 2006. – 470 p.
23. *Lighthill J.* Waves in Fluids. – Cambridge: Cambridge University Press, 1978. – 504 p.
24. *Lim T.C.* Auxetic Materials and Structures. – Singapore: Springer, 2015. – 835 p.
25. *Lur'e A.I.* Nonlinear Theory of Elasticity. – Amsterdam: North-Holland, 1990. – 617 p.
26. *Lurie A.I.* Theory of Elasticity / Series: Foundations of Engineering Mechanics. – Berlin: Springer, 2005. –1050 p.
27. *Murnaghan F.D.* Finite Deformation in an Elastic Solid. – New York: John Wiley, 1951(1967). – 218 p.
28. *Novozhilov V.V.* Foundations of the Nonlinear Theory of Elasticity. – New York: Graylock Press, 1953; Dover, 2011. – 256 p.
29. *Ogden R.W.* Nonlinear Elastic Deformations. – New York: Dover, 1997. – 544 p.
30. *Rushchitsky J.J.* Nonlinear Elastic Waves in Materials / Series: Foundations of Engineering Mechanics. – Heidelberg: Springer, 2014. – 454 p.
31. *Rushchitsky J.J.* Auxetic linearly elastic isotropic materials: restrictions on elastic moduli // Arch. of Appl. Mech. – 2015. – **72**, N 1. – P. 72 – 76.
32. *Structural and Residual Stress Analysis*. Ed. V.Hauk. – Amsterdam: Elsevier Science B.V., 1997 (e-variant 2006). – 640 p.
33. *Truesdell, C.* A First Course in Rational Continuum Mechanics. – Baltimore: The John Hopkins University,1972; New York: Academic Press, 2nd edition, 1991. – 352 p.
34. *Truesdell C., Noll W.* The Nonlinear Field Theories of Mechanics / Flügge Handbuch der Physik, Band III /3. – Berlin: Springer Verlag, 1965; revised and enlarged edition, Springer, 2004. – 636 p.
35. *Zhu R., Liu X.N., Huang G.L.* Study of anomalous wave propagation and reflection in semi-infinite elastic metamaterials // Wave Motion. – 2015. – **55**. – P. 73 – 83.

Поступила 30.12.2014 Утверждена в печать 22.12.2015