

Я. Я. Рушицкий

О ВОЛНАХ В ЛИНЕЙНО УПРУГОМ ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ
СО СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЕЙ

*Институт механики им. С.П.Тимошенко НАНУ,
ул. Нестерова, 3, 03057, Киев, Украина; e-mail: rushch@inmech.kiev.ua*

Abstract. A problem of the linear theory of elasticity on free harmonic (periodic) and solitary bell-shaped (non-periodic) waves in an isotropic half-plane with free of stresses plane boundary is considered. The material of half-space is assumed to be conventional (classical engineering) or non-conventional (nonclassical auxetic). Two variants of attenuation of wave amplitudes are studied: quick attenuation (surface wave) and periodic attenuation (nonsurface wave). The conclusions from analysis of the free harmonic wave are as follows: the wave with quick attenuation (surface wave) exists for both classes of materials, but the auxetic materials admit somewhat smaller ratio of the wave velocity to velocity of plane transverse wave in this material as compared with analogous ratio for the conventional materials; the wave with periodic attenuation (nonsurface wave) can not be described within the realized approach for the conventional materials, but is admitted theoretically for the auxetic materials, where two variants of wave velocity exist. In an analysis of solitary (bell-shaped) wave, the assumption on dependence of the wave velocity on the wave phase is substantiated and some restriction is made on time of wave propagation and changing with time the wave velocity. The following conclusions are obtained: the bell-shaped wave with quick attenuation can not be described for both classes of materials within the framework of realized approach, whereas the bell-shaped wave with periodic attenuation can be described.

Key words: harmonic and solitary bell-shaped free waves, elastic half-space with free plane boundary, existence of waves, conventional (classical engineering) and nonconventional (auxetic) materials.

1. Постановка задачи.

Рассмотрим волны, которые распространяются с амплитудами, определенными с точностью до произвольного амплитудного множителя (так называемые свободные волны). К примеру, к таким волнам могут быть отнесены классические плоские волны и поверхностные волны Рэлея [1 – 6, 11, 12, 21, 23, 24]. Из публикаций, где в настоящее время изучаются свободные волны, можно упомянуть публикации [1, 13, 14, 16, 19, 20].

Пусть свободная волна смещения распространяется в линейно-упругом изотропном полупространстве с плоской границей $x_3 = 0$, которое определено в декартовых координатах Ox_1x_3 неравенством $x_3 > 0$, и волна распространяется в направлении Ox_1 . Другими словами, рассматривается массивное тело, которое изотропно и деформируемо линейно упруго.

Пусть также движение волны смещения не зависит от координаты x_2 . Тогда смещение $\vec{u}(x_1, x_2, x_3, t)$ может быть представлено в виде

$$\vec{u}(x_1, x_2, x_3, t) = \{u_1(x_1, 0, x_3, t); 0; u_3(x_1, 0, x_3, t)\}. \quad (1)$$

Таким образом, задача становится плоской и можно рассматривать полуплоскость Ox_1x_3 в рамках плоского деформированного состояния. Для такой задачи классические уравнения Ляме упрощаются к виду

$$\rho \ddot{u}_1 - (\lambda + 2\mu)u_{1,11} - (\lambda + \mu)u_{3,13} - \mu u_{1,33} = 0; \quad (2)$$

$$\rho \ddot{u}_3 - (\lambda + 2\mu)u_{3,33} - (\lambda + \mu)u_{1,13} - \mu u_{3,11} = 0, \quad (3)$$

где ρ, λ, μ – плотность и постоянные Ляме упругого материала. Обычно, к системе (2), (3) применяют скалярное преобразование Кельвина путем введения скалярных функций-потенциалов $\varphi(x_1, x_3, t)$, $\psi(x_1, x_3, t)$

$$u_1(x_1, x_3, t) = \varphi_{,1} + \psi_{,3}, \quad u_3(x_1, x_3, t) = \varphi_{,3} - \psi_{,1}. \quad (4)$$

Тогда уравнения (2),(3) могут быть записаны как два несвязанные волновые уравнения относительно потенциалов

$$\ddot{\varphi} - c_L^2 \Delta \varphi = 0, \quad \ddot{\psi} - c_T^2 \Delta \psi = 0, \quad (5)$$

со стандартными обозначениями: $c_L = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$ – фазовая скорость плоской продольной гармонической волны; $c_T = \sqrt{\mu/\rho}$ – фазовая скорость плоской поперечной гармонической волны.

Предположим, что на границе $x_3 = 0$ отсутствуют напряжения (граница свободна)

$$\sigma_{33}(x_1, 0, t) = 0, \quad \sigma_{31}(x_1, 0, t) = 0 \rightarrow \quad (6)$$

$$\rightarrow [c_L^2 \varphi_{,33} + (c_L^2 - 2c_T^2)\varphi_{,11} - 2c_T^2 \psi_{,13}]_{x_3=0} = 0, \quad [2\varphi_{,13} + \psi_{,33} - \psi_{,11}]_{x_3=0} = 0. \quad (7)$$

Рассмотрим далее свободные волны двух видов.

1. Гармоническая (периодическая) волна, которая задается аналитическим выражением

$$\begin{aligned} \varphi(x_1, x_3, t) &= \varphi_1(x_1, t)\varphi_3(x_3) = A_\varphi^o \varphi_3(x_3) e^{i(k_{FH}x_1 - \omega t)}, \\ \psi(x_1, x_3, t) &= \psi_1(x_1, t)\psi_3(x_3) = A_\psi^o \psi_3(x_3) e^{i(k_{FH}x_1 - \omega t)}, \end{aligned} \quad (8)$$

где k_{FH} – неизвестное волновое число свободной гармонической волны; ω – ее частота; A_φ^o, A_ψ^o – постоянные произвольные множители в выражениях для неизвестных амплитуд (8) и фаза волны задается выражением $\sigma = k_{FH} \{x_1 - [v_{FH} = (\omega/k_{FH})]t\}$.

2. Одиночная (непериодическая) волна, которая задается аналитическим выражением

$$\begin{aligned} \varphi(x_1, x_3, t) &= \varphi_1(x_1, t)\varphi_3(x_3) = A_\varphi^o \varphi_3(x_3) e^{-\sigma^2/2}, \\ \psi(x_1, x_3, t) &= \psi_1(x_1, t)\psi_3(x_3) = A_\psi^o \psi_3(x_3) e^{-\sigma^2/2}, \end{aligned} \quad (9)$$

где волна имеет конкретный колоколообразный профиль и ее фаза задана выражением

$$\sigma = a(x_1 - c_{FS}t). \quad (10)$$

Здесь о величине a следует сказать, что она аналогична волновому числу гармонической волны и имеет такую же размерность m^{-1} . Она характеризует форму колокола – форма может быть растянутой или сжатой в зависимости от a . Скорость распространения свободной одиночной волны v_{FS} неизвестна и, скорее всего, не постоянна.

2. Свободные гармонические (периодические) волны.

2.1 Ограничения на амплитуды. Процедуры решения задач о распространении свободных гармонических и одиночных волн совпадают по ряду компонентов. Постановки задач основаны на предположении, что решение уравнений (2), (3) (или (4), (5))

описывает при граничных условиях (7) распространение или гармонической, или одиночной волн в направлении вдоль границы (т.е., в направлении Ox_1).

Рассмотрим далее свободную гармоническую волну (8) и подставим представление (8) в уравнение (5), в результате чего получаются уравнения для амплитуд $\varphi_3(x_3), \psi_3(x_3)$

$$\varphi_3'' - (k_{FH}^2 - k_L^2)\varphi_3 = 0, \quad \psi_3'' - (k_{FH}^2 - k_T^2)\psi_3 = 0, \quad (11)$$

где волновое число свободной волны $k_{FH} = (\omega/c_{FH})$ неизвестно и скорость свободной волны c_{FH} считают постоянной; волновые числа $k_L = (\omega/c_L)$, $k_T = (\omega/c_T)$ плоских гармонических волн известны.

Поскольку для всех упругих волн справедливо неравенство $c_L > c_T$, т.е. скорость плоской продольной волны c_L больше скорости плоской поперечной волны c_T , то уравнение допускает четыре варианта неравенств, из которых рассмотрим два.

$$\text{Вариант 1. } k_{FH}^2 - k_L^2 > 0, \quad k_{FH}^2 - k_T^2 > 0 \quad \text{или} \quad c_L^2 - c_{FH}^2 > 0, \quad c_T^2 - c_{FH}^2 > 0, \quad (12)$$

из которого следует, что скорость свободной гармонической волны c_{FH} меньше скорости плоской поперечной волны c_T .

$$\text{Вариант 2. } k_{FH}^2 - k_L^2 < 0, \quad k_{FH}^2 - k_T^2 < 0 \quad \text{или} \quad c_L^2 - c_{FH}^2 < 0, \quad c_T^2 - c_{FH}^2 < 0, \quad (13)$$

из которого следует, что скорость свободной гармонической волны c_{FH} больше скорости плоской продольной волны c_L .

Прокомментируем (12) и (13) с точки зрения соответствующих решений уравнений (11).

Вариант 1. Общее решение уравнений (11) имеет вид экспоненциальных функций

$$\varphi_3(x_3) = \varphi_3^{o-} e^{-\sqrt{k_{FH}^2 - k_L^2} x_3} + \varphi_3^{o+} e^{+\sqrt{k_{FH}^2 - k_L^2} x_3}, \quad \psi_3(x_3) = \psi_3^{o-} e^{-\sqrt{k_{FH}^2 - k_T^2} x_3} + \psi_3^{o+} e^{+\sqrt{k_{FH}^2 - k_T^2} x_3}. \quad (14)$$

Естественно, произвольные постоянные $\varphi_3^{o-}, \varphi_3^{o+}, \psi_3^{o-}, \psi_3^{o+}$ должны быть объединены с неизвестными постоянными A_φ^o, A_ψ^o . Случай положительного корня в экспонентах (14) не рассматривается, поскольку тогда амплитуда волны возрастает с увеличением расстояния от граничной поверхности (линии). Случай отрицательного корня в экспонентах (14) соответствует классической задаче о поверхностной волне Рэлея. Тогда выражения

$$\varphi_3(x_3) = \varphi_3^{o-} e^{-\sqrt{k_{FH}^2 - k_L^2} x_3}; \quad \psi_3(x_3) = \psi_3^{o-} e^{-\sqrt{k_{FH}^2 - k_T^2} x_3} \quad (15)$$

описывают затухание амплитуды свободной гармонической волны при отходе от границы (локализацию волны в приповерхностной области полупространства (полуплоскости)).

Таким образом, если скорость свободной гармонической волны c_{FH} меньше скорости плоской поперечной волны c_T , то можно говорить, что свободная волна является поверхностной и обе амплитуды $A_\varphi(x_3), A_\psi(x_3)$ должны уменьшаться быстро с увеличением координаты x_3 . В этом случае решение уравнений (11) имеет вид

$$A_\varphi(x_3) = A_\varphi^o e^{-\sqrt{k_{RH}^2 - k_L^2} x_3} = A_\varphi^o e^{-\sqrt{c_L^2 - c_{RH}^2}/\omega} x_3; \quad A_\psi(x_3) = A_\psi^o e^{-\sqrt{k_{RH}^2 - k_T^2} x_3} = A_\psi^o e^{-\sqrt{c_T^2 - c_{RH}^2}/\omega} x_3, \quad (16)$$

где постоянные A_φ^o, A_ψ^o неизвестны и скорость свободной гармонической волны c_{FH} является скоростью гармонической поверхностной волной Рэлея $c_{RH} = (\omega/k_{RH})$.

Решение, которое описывает распространение гармонической свободной волны, может быть представлено в виде

$$\varphi(x_1, x_3, t) = A_\varphi^o e^{i(k_{RH}x_1 - \omega t) - \sqrt{k_{RH}^2 - k_L^2} x_3}, \quad \psi(x_1, x_3, t) = A_\psi^o e^{i(k_{RH}x_1 - \omega t) - \sqrt{k_{RH}^2 - k_T^2} x_3}. \quad (17)$$

Итак, свободная гармоническая поверхностная волна распространяется с постоянной скоростью вдоль свободной поверхности и локализована в приповерхностной области.

Сосредоточимся далее на определении неизвестной скорости волны и существовании решения (17).

Вариант 2. В этом случае решение уравнений (11) имеет вид периодической функции

$$\varphi_3(x_3) = \widehat{\varphi}_3^o e^{\pm i\sqrt{k_L^2 - k_{FH}^2} x_3}; \quad \psi_3(x_3) = \widehat{\psi}_3^o e^{\pm i\sqrt{k_T^2 - k_{FH}^2} x_3},$$

где произвольные амплитуды $\widehat{\varphi}_3^o, \widehat{\psi}_3^o$ объединяются с постоянными A_φ^o, A_ψ^o .

Решение, которое описывает распространение гармонической волны с периодическим затуханием, записывается в виде

$$\varphi(x_1, x_3, t) = A_\varphi^o e^{i(k_{RH}x_1 - \omega t) + i\sqrt{k_L^2 - k_{RH}^2} x_3}; \quad \psi(x_1, x_3, t) = A_\psi^o e^{i(k_{RH}x_1 - \omega t) + i\sqrt{k_T^2 - k_{RH}^2} x_3}. \quad (18)$$

Таким образом, скорость свободной гармонической волны в случае варианта 2 больше скоростей плоской продольной и поперечной волн. Эта волна уже не концентрируется вблизи поверхности: изменение амплитуды вглубь от поверхности имеет периодический характер, волновое движение наблюдается во всей полуплоскости. Период изменения амплитуды зависит от подкоренного выражения в (18), т.е., от величин, на которые скорость свободной волны c_{FH} превышает скорости продольной и поперечной волн c_L, c_T .

Окончательный ответ дает анализ существования такой волны, проведенный на основании граничных условий при ограничениях (13).

2.2. Анализ уравнения для определения скорости свободной гармонической волны. Рассмотрим граничные условия (7). Сначала уравнения (17), (18) должны быть подставлены в (7). В итоге получается система двух линейных однородных алгебраических уравнений относительно амплитуд A_φ^o, A_ψ^o . В случае решения (17) система имеет вид

$$\begin{aligned} \left[2k_{FH}^2 - (c_L^2/c_T^2)k_L^2 \right] A_\varphi^o + 2ik_{FH}\sqrt{k_{FH}^2 - k_T^2} A_\psi^o &= 0; \\ -2ik_{FH}\sqrt{k_{FH}^2 - k_L^2} A_\varphi^o + (2k_{FH}^2 - k_T^2) A_\psi^o &= 0. \end{aligned} \quad (19)$$

Заметим, что решение (8) включает три неизвестные величины – две амплитуды A_φ^o, A_ψ^o и одно волновое число k_{FH} (или одну скорость c_{FH}). Граничные условия дают лишь два уравнения (19), поэтому обычно одну амплитуду выражают через другую и полагают ее произвольной. Таким образом, волна идентифицируется как свободная.

Система (19) приводится к уравнению относительно волнового числа k_{FH}

$$\left(2k_{FH}^2 - (c_L^2/c_T^2)k_L^2 \right) \left(2k_{FH}^2 - k_T^2 \right) - 4k_{FH}^2 \sqrt{k_{FH}^2 - k_L^2} \sqrt{k_{FH}^2 - k_T^2} = 0 \quad (20)$$

или в обозначениях $(c_{FH}^2/c_T^2) = z, c_{FH} = (1/\theta) -$

$$z \left\{ z^3 - 8(z-1) \left[z - 2 \left(1 - (c_T^2/c_L^2) \right) \right] \right\} = 0; \quad (21)$$

$$\left(2\theta^2 - (1/c_T^2) \right)^2 - 4\theta^2 \sqrt{\theta^2 - (1/c_T^2)} \sqrt{\theta^2 - (1/c_L^2)} = 0. \quad (22)$$

Уравнение (22) соответствует варианту 1 ($z < 1, k_{FH} \equiv k_{RH}, c_{FH} \equiv c_{RH}$). Его также называют уравнением Рэлея.

Обычно обращается внимание на такую особенность уравнения (21): значение корня (значение скорости волны Рэлея) зависит только от отношения скоростей продольной и поперечной волн, которое равно $\lceil (\lambda + 2\mu)/\mu \rceil$, и может быть оценено сверху и снизу.

Остановимся на варианте 1 и рассмотрим наиболее известные способы анализа существования гармонической поверхностной волны в рамках уравнения (21). Заметим, что условие “скорость свободной гармонической поверхностной волны” записывается в обозначениях (21) как $z < 1$ или $\theta > (1/c_T)$.

Графический способ [11].

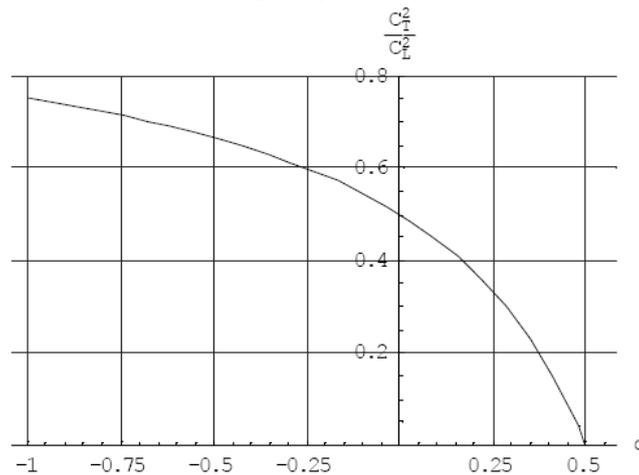
Уравнение (21) рассматривается как сумма двух слагаемых $Z_1 + Z_2 = 0$. Первое слагаемое $Z_1 = z^3$ описывает кубическую параболу с верхней ветвью в квадранте 1 плоскости zOZ_1 . Второе слагаемое описывает квадратную параболу $Z_2 = -8(z-1)\{z - 2[1 - (c_T^2/c_L^2)]\}$, которая выпукла вниз в направлении координатной оси OZ_2 . Далее возникает необходимость рассмотреть отношение

$$(c_T^2/c_L^2) = (\mu/(\lambda + 2\mu)) = (2\sigma - 1)/[2(\sigma - 1)]. \quad (23)$$

Для традиционных материалов оно всегда меньше 0,5 вследствие положительности обоих модулей Ляме. Однако в последние десятилетия появились новые материалы, для которых это ограничение следует пересмотреть. Поэтому уместно предложить читателю краткую информацию о современных нетрадиционных материалах.

О метаматериалах, механических метаматериалах, ауксетических материалах.

В настоящее время материалы разделяют на традиционные (классические) и нетрадиционные (метаматериалы). Метаматериалы еще называют интеллектуальными материалами, они включают как часть механические метаматериалы, которые, в свою очередь, включают как часть ауксетические материалы. Общее свойство всех метаматериалов состоит в том, что они представляют собой, главным образом, искусственные формирования и создаются с целью получения свойств, неизвестных в природе. Первичное наблюдение ауксетических материалов показало, что они проявляют нетрадиционное свойство в классическом эксперименте для образца в виде стержня (балки), к концам которого приложена сила растяжения или сжатия. Традиционное свойство состоит в том, что поперечное сечение образца становится меньше при растяжении и больше при сжатии. Нетрадиционное свойство противоположно – образец из ауксетического материала увеличивает свое поперечное сечение при растяжении и уменьшает при сжатии. Это физическое явление описывается в классической теории упругости введением коэффициента Пуассона. Поэтому коэффициент Пуассона является ключевым понятием в анализе ауксетических материалов (см. обзоры [7, 8, 15, 18, 22, 26] и последнюю монографию [17] по ауксетикам).



Отрицательное значение коэффициента Пуассона сопровождается отрицательным значением модуля Ляме λ [25]. Показательным является график отношения (23), показанный на рисунке. Из рисунка следует, что для отрицательных значений коэффициента Пуассона (т.е. для ауксетических материалов) значения отношения (23) превы-

шают предельное для традиционных материалов значение 0,5. Поэтому рассмотрим далее отдельно случаи традиционного и нетрадиционного (ауксетического) материалов.

Традиционный материал. Из-за положительности упругих модулей Ляме отношение (23) может быть оценено с двух сторон

$$0 \leq c_T^2/c_L^2 \leq 0,5. \quad (24)$$

Тогда кубическая и квадратная параболы обязательно пересекаются на интервале $(0;1)$. С учетом минимального значения отношения $c_T^2/c_L^2 = 0$ (когда квадратная парабола частично опускается в квадрант 4 и имеет корни $z=1, z=2$) и максимального значения (когда парабола касается оси абсцисс и имеет двойной корень $z=1$) один из корней уравнения (21) принимает значения из узкого интервала $0,764 \leq (z_R = (c_R/c_T)^2) \leq 0,912$. Таким образом, скорость свободной поверхностной волны Рэлея близка к скорости плоской поперечной волны, но меньше этой скорости:

$$0,874 \leq (c_R/c_T) \leq 0,955 \text{ для } 0 \leq \sigma \leq 0,5. \quad (25)$$

Ауксетический материал. В этом случае модуль Ляме λ может быть отрицательным и интервал значений коэффициента Пуассона изменяется: $-1 \leq \sigma \leq 0$. Отношение c_T^2/c_L^2 изменяется от $(c_T^2/c_L^2)(\sigma=0) = 0,5$ до $(c_T^2/c_L^2)(\sigma=-1) = 0,75$ (с промежуточными значениями $(c_T^2/c_L^2)(\sigma=-0,4) = 0,643, (c_T^2/c_L^2)(\sigma=-0,7) = 0,706$). Тогда квадратная парабола $Z_2 = -8(z-1)\{z-2[1-(c_T^2/c_L^2)]\}$ имеет два корня: правый корень $z=1$ постоянен и левый корень изменяется от значения $z=1$ до значения 0,5 при $\sigma \rightarrow -1$. Следовательно, квадратная и кубическая параболы пересекаются при значениях $z < 0,5$. Эти значения получаются значительно меньше 1: $(c_R^2/c_T^2)(\sigma=-0,5) = 0,764, (c_R^2/c_T^2)(\sigma=-1) = 0,668$. Поэтому неравенства (25) должны быть дополнены следующими неравенствами:

$$0,817 \leq (c_R/c_T) \leq 0,874 \text{ для } -1 \leq \sigma \leq 0. \quad (26)$$

Следовательно, минимальная скорость свободной упругой гармонической поверхностной волны в ауксетических материалах может быть на 18% меньше скорости упругой плоской поперечной волны, тогда как для традиционных материалов это отличие составляет 12%.

Способ 1 определения интервала, на концах которого уравнение (22) принимает разные по знаку значения [6]. Способ основан на анализе уравнения Рэлея в виде (22). Сначала определяется значение, которое уравнение принимает в точке $c_R = c_T$. Оно положительно и равно 1. Другая точка выбирается как $c_R = \varepsilon c_T$, где ε предполагается малой величиной, вследствие чего эта точка близка к 0. Если подставить значение $c_R = \varepsilon c_T$ в уравнение (22), то выражение $-2\varepsilon^2[1-(c_T^2/c_L^2)]$ получается всегда отрицательным. Таким образом, хотя бы один корень уравнения (22) лежит в интервале $(\varepsilon c_T, c_T)$.

Способ 2 определения интервала, на концах которого уравнение (22) принимает разные по знаку значения [4]. Правая точка выбирается как в способе 1 $\theta = ((1/c_T))$ и тогда уравнение (22) принимает положительное значение. Левая точка выбирается как соответствующая значению $\theta \rightarrow \infty$. Далее выражение (22) разлагается в ряд в окрестности бесконечно удаленной точки. Ряд начинается с отрицательного выражения $-2\theta^2[(1/c_T^2) - (1/c_L^2)]$.

В итоге, уравнение принимает в выбранных точках разные по знаку значения. Поэтому уравнение (22) имеет по крайней мере один корень в интервале $((1/c_T), \infty)$.

Способ, основанный на ограничении на коэффициент Пуассона [21].

Коэффициента Пуассона в виде $\nu = \lambda/[2(\lambda + \mu)] = (1/4) \rightarrow \lambda = \mu$, который часто используется в сейсмологии при изучении сейсмических волн в земной коре. Тогда кубическое уравнение (22) может быть решено точно и его корни равны $\theta_2 = 4$, $\theta_3 = 2 + (2/\sqrt{3})$, $\theta_4 = 2 - (2/\sqrt{3})$ (нулевой корень $\theta_1 = 0$ не учитывается из физических рассуждений – волна отсутствует). Поскольку должно выполняться условие $\theta < 1$, то соответствующий корень равен $\theta_4 = 0,8453$. Итак, свободная гармоническая поверхностная волна в рамках теоретического варианта 1 существует.

Рассмотрим вариант 2 для ответа на вопрос, существует ли свободная гармоническая волна при условии (13) $k_{FH}^2 - k_L^2 < 0$, $k_{FH}^2 - k_T^2 < 0$ при ее описании уравнением (21). Сведем граничные условия к однородной системе двух линейных алгебраических уравнений, для чего найдем необходимые производные и подставим в уравнение (7). В итоге получим

$$(k_T^2 - 2k_{FH}^2)A_\varphi^0 - 2k_{FH}\sqrt{k_L^2 - k_{FH}^2}A_\psi^0 = 0; \quad -2k_{FH}\sqrt{k_L^2 - k_{FH}^2}A_\varphi^0 + (2k_{FH}^2 - k_T^2)A_\psi^0 = 0; \quad (27)$$

$$\left[2k_{FH}^2 - (c_L^2/c_T^2)k_L^2\right](2k_{FH}^2 - k_T^2) + 4k_{FH}\sqrt{k_{FH}^2 - k_L^2}\sqrt{k_{FH}^2 - k_T^2} = 0. \quad (28)$$

Если сравнить с соответствующим уравнением (22), то можно увидеть, что второе слагаемое имеет иной знак. Поэтому изменится и уравнение (21)

$$z^3 + 8(z-1)\left[z - 2\left(1 - (c_T^2/c_L^2)\right)\right] = 0. \quad (29)$$

Применим к уравнению (29) описанный выше графический способ. График кубической параболы далее размещается в квадрантах 1 и 3. График квадратной параболы изменяет выпуклость. Тогда они могут пересечься только при значениях $z > 1$. Интервал, где лежит точка пересечения, находится по такой процедуре: корни квадратной параболы определяются положительными значениями: первый нуль $z = 1$; второй зависит от отношения c_T^2/c_L^2 и изменяется от $z = 1$ (когда $c_T^2/c_L^2 = 1/2$, корень двойной и парабола касается оси абсцисс) до $z = 2$ (когда $c_T^2/c_L^2 = 0$ и парабола уходит частично вверх в квадрант 1). Наибольшая возможность пересечения двух парабол возникает в случае максимальной длины интервала (1; 2). Вершина квадратной параболы имеет координаты (1,5; 2), тогда как соответствующая точка кубической параболы имеет координаты (1,5; 3.375). Следовательно, параболы не пересекаются. Итак, вариант 2 не реализуется для свободной гармонической волны в случае традиционного материала.

Рассмотрим отдельно случай ауксетического материала, когда модуль Ляме λ может быть отрицательным и интервал значений коэффициента Пуассона равен $-1 \leq \sigma \leq 0$. Отношение c_T^2/c_L^2 изменяется от $(c_T^2/c_L^2)(\sigma = 0) = 0,5$ до $(c_T^2/c_L^2)(\sigma = -1) = 0,75$. Квадратная парабола имеет постоянный правый нуль $z = 1$ и левый нуль, изменяющийся в зависимости от изменения c_T^2/c_L^2 : от $z = 0,5$ (когда $c_T^2/c_L^2 = 0,75$; парабола выпукла вверх и уходит частично вверх в квадрант 1) до $z = 1$ (когда $c_T^2/c_L^2 = 1/2$, корень двойной и парабола касается оси абсцисс). Следовательно, квадратная и кубическая параболы пересекаются в интервале $0,5 < z < 1$. Максималь-

ное значение $Z_2 = 0,5$ достигается вершиной квадратной параболы в точке $z = 0,75$ и соответствующая точка кубической параболы имеет координаты $(0,75; 0,422)$. Поэтому параболы пересекаются дважды в точках $z = 0,548$ и $z = 0,787$. Это соответствует таким значениям отношения c_{FS}/c_T :

$$0,740 \leq (c_{FS}/c_T) \leq 0,887 \quad \text{для } -1 \leq \sigma \leq 0. \quad (30)$$

Итак, в случае ауксетических материалов вариант 2 описывает распространение свободной гармонической волны с периодическим затуханием и минимально допустимой скоростью, которая меньше скорости поперечной волны на 26%.

Из приведенного анализа следует, что в рамках линейной классической теории упругости применительно к традиционным материалам рассмотрение только варианта 1 для свободной гармонической волны (варианта поверхностной волны Рэлея), как это принято в учебниках по теории упругости, выглядит рациональным. Учет свойств нетрадиционных (ауксетических) материалов показывает, что эти материалы допускают существование двух типов волн: свободной гармонической поверхностной волны со скоростью, несколько меньшей соответствующей скорости в традиционных материалах, и свободных гармонических волн с периодическим затуханием и двумя вариантами значения скорости.

3. Свободная одиночная (непериодическая) волна (9).

3.1. Ограничения на амплитуды. Пусть волна одиночная, имеет конкретный колоколообразный профиль и ее фаза задана формулой $\sigma = a(x_1 - c_{FS}t)$. Потенциалы задаются по формуле

$$\varphi(x_1, x_3, t) = A_\varphi^0 \varphi_3(x_3) e^{-\sigma^2/2}, \quad \psi(x_1, x_3, t) = A_\psi^0 \psi_3(x_3) e^{-\sigma^2/2}.$$

Предположим, что зависимость амплитуд $\varphi_3(x_3), \psi_3(x_3)$ от вертикальной координаты x_3 такая же, как и для гармонической волны

$$\varphi_3(x_3) = e^{-s_\varphi x_3}, \quad \psi_3(x_3) = e^{-s_\psi x_3}, \quad (31)$$

где коэффициенты затухания s_φ, s_ψ могут быть действительными (как в поверхностной волне) или мнимыми (как в периодически затухающей волне) величинами.

Подставим представления (9), (31) в уравнения (5) и получим уравнения

$$\ddot{\varphi}_1 - (v_L)^2 \left[\varphi_{1,11} + (s_\varphi)^2 \varphi_1 \right] = 0, \quad \ddot{\psi}_1 - (v_T)^2 \left[\psi_{1,11} + (s_\psi)^2 \psi_1 \right] = 0. \quad (32)$$

Уравнения (32) известны как линейные уравнения Кляйна – Гордона [3]. Они допускают решения в виде свободных гармонических волн, дисперсия которых описывается соотношением между скоростью волны c_{KG} и ее волновым числом k_{KG}

$$c_{KG} = \pm (1/k_{KG}) v_{L(T)} \sqrt{(k_{KG})^2 \pm (s_{\varphi(\psi)})^2}. \quad (33)$$

Показанное дисперсионное уравнение (33) одинаково как для гармонических, так и для одиночных волн. Различие между волнами проявляется при изучении зависимости скорости c_{RS} от фазы волны $\sigma = a(x_1 - c_{RS}t)$ по причине различного аналитического представления профилей этих волн. Прежде всего, при вычислении производных $\varphi_{1,11}, \psi_{1,11}, \ddot{\varphi}_1, \ddot{\psi}_1$.

Несмотря на то, что оба представления ($e^{i\sigma}$ и $e^{-(\sigma^2/2)}$) нелинейны, анализ гармонической волны допускает постоянную скорость волны, тогда как колоколообразный профиль запрещает такое допущение. Формально это можно объяснить тем, что фаза

в $e^{i\sigma}$ линейна ($i\sigma$) и фаза в $e^{-(\sigma^2/2)}$ нелинейна ($\sigma^2/2$). В случае колоколообразного профиля фаза σ всегда содержится в множителях впереди экспонент, входящих в уравнение типа Рэлея.

К примеру, $\varphi_{,1,1} = \left(A_\varphi^0 e^{-(\sigma^2/2)} \right)_{,1} = A_\varphi^0 e^{-(\sigma^2/2)} (-\sigma_{,1}) = -(\sigma_{,1}) \varphi_1$, где указанное выше присутствие ясно видно, так как производная $\sigma_{,1}$ может иметь разные представления в зависимости от того, постоянна или нет скорость c_{FS} .

Поэтому в задаче о свободной гармонической волне традиционно используется предположение о постоянстве скорости волны. В задаче о свободной колоколообразной волне вынужденно предполагается, что скорость переменна и зависит от фазы волны.

Подставим теперь представление (9) в уравнение (32) и получим условия на коэффициенты s_φ, s_ψ . При вычислении этих коэффициентов возникает проблема вычисления частных производных для обоих потенциалов, поскольку потенциалы зависят от фазы волны. Поэтому сначала необходимо вычислить частные производные

$$\begin{aligned} \sigma_{,1} &= (x_1 - c_{SF}t)_{,1} = 1 - t [c_{FS}(\sigma)]'_\sigma \rightarrow \sigma_{,1} = \left\{ 1 + t [c_{FS}(\sigma)]'_\sigma \right\}^{-1}; \\ \sigma_{,t} &= (x_1 - c_{FS}t)_{,t} = -c_{FS}(\sigma) \left\{ 1 + t [c_{FS}(\sigma)]'_\sigma \right\}^{-1}; \\ \sigma_{,11} &= (x_1 - c_{FS}t)_{,11} = t [c_{FS}(\sigma)]''_\sigma \left\{ 1 + t [c_{FS}(\sigma)]'_\sigma \right\}^{-2}; \\ \sigma_{,tt} &= (x_1 - c_{FS}t)_{,tt} = \left\{ [c_{FS}(\sigma)]'_\sigma + t [c_{FS}(\sigma)]''_\sigma \right\} \left\{ 1 + t [c_{FS}(\sigma)]'_\sigma \right\}^{-2}. \end{aligned} \quad (34)$$

Введем далее ограничения на изменения величины $t [c_{FS}(\sigma)]'_\sigma$: пусть она существенно меньше единицы. Тогда можно предложить приближенные равенства

$$\sigma_{,1} = \left\{ 1 + t [c_{FS}(\sigma)]'_\sigma \right\}^{-1} \approx 1; \quad \sigma_{,t} = -c_{FS}(\sigma) \left\{ 1 + t [c_{FS}(\sigma)]'_\sigma \right\}^{-1} \approx -c_{FS}(\sigma) \quad (35)$$

и получить формулы

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}_1(x_1, t) &= \left\{ (-\sigma)^2 (-ac_{FS})^2 + (-(-ac_{FS}))(-ac_{FS}) \right\} A_\varphi e^{-[a(x_1 - c_{FS}t)]^2/2} = (\sigma^2 - 1)(ac_{FS})^2 \varphi_1(x, t); \\ \varphi_{1,11}(x_1, t) &= \sigma^2 (a)^2 A_\varphi e^{-[a(x_1 - c_{FS}t)]^2/2} + A_\varphi (-a)(a) e^{-[a(x_1 - c_{FS}t)]^2/2} = (\sigma^2 - 1)(a)^2 \varphi_1(x_1, t); \quad (36) \\ \dot{\psi}_1(x_1, t) &= \left\{ (-\sigma)^2 (-ac_{FS})^2 + (-(-ac_{FS}))(-ac_{FS}) \right\} A_\psi e^{-[a(x_1 - c_{FS}t)]^2} = (\sigma^2 - 1)(ac_{FS})^2 \psi_1(x, t); \\ \psi_{1,11}(x_1, t) &= \sigma^2 (a)^2 A_\psi e^{-[a(x_1 - c_{FS}t)]^2/2} + A_\psi (-a)(a) e^{-[a(x_1 - c_{FS}t)]^2/2} = (\sigma^2 - 1)(a)^2 \psi_1(x_1, t). \end{aligned}$$

Формулы (36) позволяют вычислить коэффициенты s_φ, s_ψ :

$$s_\varphi^{(0)} = a \sqrt{(1 - \sigma^2) \left[1 - (c_{FS}/c_L)^2 \right]}, \quad s_\psi^{(0)} = a \sqrt{(1 - \sigma^2) \left[1 - (c_{FS}/c_T)^2 \right]}. \quad (37)$$

Выражения (37) показывают, что значения коэффициентов могут быть действительными или мнимыми для различных значений фазы $\sigma = a(x_1 - c_{FS}t)$.

На этом этапе анализа потенциалы можно представить в виде

$$\varphi(x_1, x_3, t) = A_\varphi^0 e^{-[a(x_1 - c_{FS}t)]^2/2} e^{-s_\varphi x_3}, \quad \psi(x_1, x_3, t) = A_\psi^0 e^{-[a(x_1 - c_{FS}t)]^2/2} e^{-s_\psi x_3}. \quad (38)$$

При этом, волна затухает при отходе от границы, если коэффициенты s_φ, s_ψ действительные положительные величины, и затухает периодически, если коэффициенты мнимые.

3.2. Комментарии к выражениям для коэффициентов (37) в случае свободной одиночной волны.

Комментарий 1. Рассмотрим характер изменения фазы волны во времени при условии, что принято ограничение (35) на произведение величины времени распространения волны на производную от скорости волны мало по сравнению с единицей. Если скорость волны имеет порядок 10^3 м/с, то она проходит расстояние 1 метр за время 1 миллисекунда. Для обычного конструкционного материала ограничение на время распространения в несколько миллисекунд вполне приемлемо и тогда условие (35) гарантировано при ограничении изменения скорости волны, т. е. малость времени распространения волны вполне допустима в инженерных расчетах.

Следует заметить, что одиночная волна характеризуется подошвой начального профиля. К примеру, колоколообразная волна с начальным профилем $e^{-(ax_1)^2/2}$ характеризуется подошвой в виде интервала $(-3/\sqrt{a}; 3/\sqrt{a})$ (правило трех сигма для функции Гаусса). Подошва является такой же характеристикой для одиночной волны, как длина волны для гармонической волны. Обычно расстояние, пройденное волной, сравнивают с величиной этой характеристики. Поэтому время наблюдения волны не является абсолютной характеристикой. Его необходимо сравнивать с длиной волны или длиной подошвы: если время наблюдения соответствует многим повторениям этих длин, тогда полученное на основе ограничения (35) решение может считаться информативным и длительность волнового движения может считаться приемлемой.

Также необходимо указать на то, что принятое ограничение относительно медленности изменения фазы и скорости волны похоже на ограничение на медленность изменения времени $\tau = \epsilon t$ (введение медленного времени) в предыдущих исследованиях одиночных поверхностных волн [9, 10]. Укажем еще один родственник принятому в статье подход – подход, основанный на медленности изменения амплитуды волны, лежащий в основе метода ван дер Поля [3, 12].

Комментарий 2. Рассмотрим коэффициенты затухания (37). В случае свободной поверхностной волны они должны быть по определению положительными. Подкоренные выражения в (37) тоже должны быть положительными. Эти условия имеют следствием то, что скорость свободной поверхностной волны всегда меньше скорости плоской поперечной волны. В случае свободной одиночной волны условия на коэффициенты (37) распадаются на два условия, зависящие от фазы волны. Для точек центральной части начального профиля (колокола) $\sigma \in (-1; 1)$ скорость волны удовлетворяет условие $c_{RS} < c_T$. Если это не так, то волна не поверхностная. Для точек хвостовой части профиля $\sigma \notin (-1; 1)$ скорость волны удовлетворяет условие $c_{RS} > c_L$. Если это не так, то волна не поверхностная. Окончательный ответ дает анализ граничных условий.

Повторим процедуру вывода уравнений, которые обобщают уравнение Рэлея для случая свободной поверхностной колоколообразной волны. Для этого подставим решение (9), (31) в граничные условия (7) и получим:

в случае поверхностной волны –

$$A_\varphi \sqrt{\sigma^2 - 1} (v_R^2 - 2v_T^2) - A_\psi 2v_T^2 \sigma \sqrt{(v_R/v_T)^2 - 1} = 0;$$

$$A_\varphi 2\sigma\sqrt{(v_R/v_L)^2 - 1} + A_\psi\sqrt{\sigma^2 - 1}\left[(v_R/v_T)^2 - 2\right] = 0; \quad (39)$$

в случае периодически затухающей волны –

$$\begin{aligned} A_\varphi\sqrt{\sigma^2 - 1}(v_R^2 - 2v_T^2) - A_\psi 2iv_T^2\sigma\sqrt{(v_R/v_T)^2 - 1} &= 0; \\ A_\varphi 2i\sigma\sqrt{(v_R/v_L)^2 - 1} + A_\psi\sqrt{\sigma^2 - 1}\left[(v_R/v_T)^2 - 2\right] &= 0. \end{aligned} \quad (40)$$

Уравнения (39), (40) представляют собой, как и классические уравнения (24), линейную однородную систему алгебраических уравнений. Однако (39),(40) включают дополнительно параметр σ – фазу волны. Приравняв детерминант систем (39),(40) к нулю, получим уравнения, которые обобщают:

классическое уравнение Рэлея на случай одиночной волны

$$\left[(v_{FS}/v_T)^2 - 2\right]^2(\sigma^2 - 1) + 4\sigma^2\sqrt{(v_{FS}/v_L)^2 - 1}\sqrt{(v_{FS}/v_T)^2 - 1} = 0 \quad (41)$$

или уравнение для периодически затухающей волны на случай одиночной волны

$$\left[(v_{FS}/v_T)^2 - 2\right]^2(\sigma^2 - 1) - 4\sigma^2\sqrt{(v_{FS}/v_L)^2 - 1}\sqrt{(v_{FS}/v_T)^2 - 1} = 0. \quad (42)$$

Выпишем для сравнения классическое уравнение Рэлея (25)

$$\left[2 - (v_R/v_T)^2\right]^2 - 4\sqrt{1 - (v_R/v_L)^2}\sqrt{1 - (v_R/v_T)^2} = 0 \quad (43)$$

и уравнение для гармонической периодически затухающей волны

$$\left[2 - (v_R/v_T)^2\right]^2 + 4\sqrt{1 - (v_R/v_L)^2}\sqrt{1 - (v_R/v_T)^2} = 0. \quad (44)$$

Итак, уравнения (41) и (42) свидетельствуют о зависимости скорости волны от фазы волны, что проявляется в разной скорости движения точек профиля волны – начальный профиль изменяется. Также важно, что, несмотря на ограничения (35) медленности изменения скорости волны, эта скорость все равно зависит от фазы волны. Границы применимости ограничения (35) следует еще установить.

3.3. Анализ граничных условий с целью определения скорости волны. Рассмотрим уравнения (41) и (42), зависящие от дополнительного параметра – фазы σ . Выделим несколько ключевых значений σ и определим соответствующие им значения скорости v_{RS} .

3.3.1. Центральная точка начального профиля $\sigma = 0$. В этом случае уравнения (41), (42) существенно упрощаются и корень обоих уравнений может быть определен легко

$$(v_{FS}/v_T)^2 - 2 = 0 \rightarrow v_{FS} = \sqrt{2}v_T \approx 1,414v_T. \quad (45)$$

Таким образом, скорость v_{FS} в этой точке превосходит скорость плоской гармонической поперечной волны, что запрещено в классической задаче для свободной гармонической волны. Поскольку соотношение $v_L = \sqrt{2}v_T$ является нижним пределом для упругих материалов (если не учитывать ауксетические материалы), то фактически v_{FS} совпадает с наименьшим значением скорости свободной плоской гармонической продольной волны. Однако условия (37) записаны для двух случаев – волна затухает быстро (волна поверхностная) и волна затухает периодически. Тогда условия (37) противоречат значению (45) в первом случае и не противоречат – в другом случае.

Следовательно, свободная одиночная поверхностная волна не может быть описана и свободная периодически затухающая волна возможно может быть описана в рамках принятого подхода.

Можно попробовать подправить ситуацию с помощью известного в механике подхода. Пусть ε – величина, малая по сравнению с единицей, и предположим, что фаза уже ненулевая $\sigma = \varepsilon$. Тогда уравнения (41),(42) преобразуются к виду

$$\begin{aligned} & \left[(v_{FS}/v_T)^2 - 2 \right]^2 (\varepsilon^2 - 1) - 4\varepsilon^2 \sqrt{(v_{FS}/v_L)^2 - 1} \sqrt{(v_{FS}/v_T)^2 - 1} = 0 \rightarrow \\ & \rightarrow - \left[(v_{FS}/v_T)^2 - 2 \right]^2 + \varepsilon^2 \left\{ \left[(v_{FS}/v_T)^2 - 2 \right]^2 - 4 \sqrt{(v_{FS}/v_L)^2 - 1} \sqrt{(v_{FS}/v_T)^2 - 1} \right\} = 0. \quad (46) \end{aligned}$$

Из (46) следует, что с точностью до ε^2 (ε в (46) отсутствует) скорость v_{FS} постоянна.

Таким образом, к примеру, с точностью до 1% на интервале скорость $\sigma \in (-0,1; 0,1)$ может быть принята постоянной. Другими словами, на этом интервале начальный колоколообразный профиль не будет изменяться при движении волны – эволюция профиля будет отсутствовать.

3.3.2. *Область вокруг особой точки на начальном профиле $\sigma = 1$.* Уравнения (41), (42) упрощаются и имеют два корня

$$\sqrt{(v_R/v_L)^2 - 1} \sqrt{(v_R/v_T)^2 - 1} = 0 \rightarrow v_R = v_L, v_R = v_T. \quad (47)$$

Определим, уменьшается ли постепенно скорость от максимального значения в центральной точке $v_{FS}(\sigma = 0) = \sqrt{2}v_T$ до значений $v_{FS}(\sigma = 1) = v_T$ или $v_{FS}(\sigma = 1) = v_L$. Введем снова малую величину ε , подставим в уравнение (42) значения фазы слева $\sigma = 1 - \varepsilon$ и справа $\sigma = 1 + \varepsilon$ от точки $\sigma = 1$ и пренебрежем составляющими с ε^2 . В итоге получим

$$\pm 2\varepsilon \left\{ \left[(v_{FS}/v_T)^2 - 2 \right]^2 + 4 \sqrt{(v_{FS}/v_L)^2 - 1} \sqrt{(v_{FS}/v_T)^2 - 1} \right\} - 4 \sqrt{(v_{FS}/v_L)^2 - 1} \sqrt{(v_{FS}/v_T)^2 - 1} = 0. \quad (48)$$

Итак, уравнение (47) содержит дополнительные составляющие с разными знаками для левой и правой окрестности точки $\sigma = 1$. Поэтому корни уравнения (48) для больших значений фазы будут слегка больше и для меньших – меньше корней в точке $\sigma = 1$. Это свидетельствует о том, что скорость волны убывает в окрестности особой точки с увеличением значения фазы.

3.3.3. *Точки, далеко отстоящие от центральной точки.* Для таких точек уравнение (42) может быть записано в виде

$$\left[(v_{FS}/v_T)^2 - 2 \right]^2 (\sigma^2 - 1) - 4\sigma^2 \sqrt{(v_{FS}/v_L)^2 - 1} \sqrt{(v_{FS}/v_T)^2 - 1} = 0. \quad (49)$$

При условии $\sigma \rightarrow \infty$ (когда справедливо равенство $\lim_{\sigma \rightarrow \infty} \left[(\sigma^2 - 1)/\sigma^2 \right] = 1$) уравнение (49) преобразуется в классическое уравнение Рэлея (43)

$$\left[2 - (v_R/v_T)^2 \right]^2 - 4 \sqrt{1 - (v_R/v_L)^2} \sqrt{1 - (v_R/v_T)^2} = 0, \quad (50)$$

которое имеет решение в виде свободной гармонической поверхностной волны

$$0,764c_T \leq c_{RH} \leq 0,912c_T. \quad (51)$$

Таким образом, для больших значений фазы волны, соответствующих точкам хвостовой части колокола, скорость волны приближается к скорости классической поверхностной волны Рэлея.

Из проведенного анализа трех частей начального профиля колоколообразной волны следует, что предварительно можно считать: в интервале $0 \leq \sigma \leq 1$ скорость v_{FS} уменьшается от значения $v_{FS}(\sigma=0) = \sqrt{2}v_T$ до значения $v_{FS}(\sigma=1) = v_L > v_T$ и далее в хвостовой части уменьшается постепенно до значения (51). Также возможен иной вариант, когда скорость $v_{FS}(\sigma)$ максимальна $v_{FS} = \sqrt{2}v_T \approx 1,414v_T$ для $\sigma=0$, потом достигает в точке $\sigma=1$ значения $v_{FS} = v_T$ и далее в хвостовой части уменьшается постепенно до значения (51).

3.4. Некоторые выводы из анализа свободной колоколообразной волны в рамках принятого линейного подхода.

3.4.1. Используемый в анализе подход основан на предположении, что скорость волны $c_{FS}(\sigma)$ зависит от значений фазы волны и что время распространения волны и изменение со временем скорости волны ограничены.

3.4.2. Из двух вариантов свободной колоколообразной волны – волны, которая быстро затухает при удалении от свободной поверхности, и волны, которая затухает периодически при удалении от свободной поверхности – первый вариант не реализуется теоретически и второй вариант реализуется.

3.4.3. Волна, которая затухает периодически, изменяет при распространении свой начальный колоколообразный профиль таким образом, что профиль становится более покатым.

Каждая фиксированная точка на профиле соответствует некоторому значению фазы волны $\sigma^o = a(\{x = x^o\} - c_{FS}\{t = 0\})$ для $x = x^o$, $t = 0$ и для выбранного параметра покатости колокола a . Для любых выбранных моментов времени $0 < t^* < t^{**}$ значение фазы σ^o определено расстоянием $x^* < x^{**}$, пройденным начальной точкой x^o за время t^* и t^{**} . Представление фазы остается одинаковым: $\sigma^o = a(x^* - c_{FS}t^*)$ и $\sigma^o = a(x^{**} - c_{FS}t^{**})$, т.е. точка на начальном профиле x^o движется вдоль прямой линии $\sigma^o = a(x - c_{FS}t)$. Однако эти линии для разных точек профиля не параллельны – для всех $t > 0$ они расходятся лучами и никогда не пересекаются. Именно этот факт имеет следствием изменение начального профиля волны.

4. Комментарии и выводы из анализа свободных гармонической и одиночной (колоколообразной) волн в рамках линейного подхода.

4.1. Используемый подход соответствует линейной теории упругости. Только одно ограничение принято при анализе свободной одиночной (колоколообразной) волны: время распространения волны должно быть таким, что изменение скорости волны во времени незначительно. Относительно этой волны предположено, что скорость волны зависит от значений фазы волны $c_{RS}(\sigma)$. Несмотря на то, что представление гармонического профиля $e^{i\sigma}$ и колоколообразного профиля $e^{-(\sigma^2/2)}$ нелинейны, анализ гармонической волны допускает постоянную скорость волны, тогда как колоколообразный профиль запрещает такое допущение. Формально это можно объяснить тем, что фаза в представлении $e^{i\sigma}$, $\sigma = kx - \omega t$ – линейна ($i\sigma$) и фаза в представлении $e^{-(\sigma^2/2)}$ – нелинейна ($\sigma^2/2$).

4.2. Рассмотрение двух вариантов затухания волны – быстрого и периодического – показало, что для разных типов волн они теоретически реализуемы по-разному: для гармонической волны реализуем первый вариант, а для одиночной (колоколообразной) волны реализуем второй вариант.

4.3. Рассмотрение отдельно случаев классических (традиционных) и ауссетических (нетрадиционных) материалов показало, что ауссетические материалы допускают расширение теоретического описания рассмотренных двух типов волн относительно скоростей распространения волн.

Для свободных гармонических волн ауссетические материалы допускают существование свободных поверхностных волн и свободных периодически затухающих волн со скоростями, меньшими по величине, разрешенной для традиционных материалов.

РЕЗЮМЕ. Розглянуто задачу лінійної теорії пружності про вільні гармонічні (періодичні) і поодинокі (дзвіноподібні) хвилі в ізотропному півпросторі з вільною від напружень плоскою границею. Матеріал півпростору вважається традиційним (класичним конструкційним) або нетрадиційним (ауссетичним, з від'ємним коефіцієнтом Пуассона). Вивчено два варіанти затухання хвилі: швидке затухання (хвиля поверхнева) і періодичне затухання (хвиля не поверхнева). Щодо вільної гармонічної хвилі отримано такі висновки: поверхнева хвиля існує для обох класів матеріалів, однак ауссетичні матеріали допускають дещо менше відношення швидкості хвилі до швидкості плоскої поперечної хвилі у цьому ж матеріалі порівняно з таким же відношенням для традиційних матеріалів; неповерхнева хвиля не може бути описана в рамках реалізованого підходу для традиційних матеріалів, але допустима теоретично для ауссетичних матеріалів, де мають місце два варіанти швидкості. Щодо поодинокі (дзвіноподібної) хвилі обґрунтовано припущення про залежність швидкості хвилі від фази хвилі і накладено певне обмеження на час поширення хвилі та зміну з часом швидкості хвилі. Отримано такі висновки: дзвіноподібна хвиля з швидким затуханням не може бути описана в рамках реалізованого підходу для обох типів матеріалів, тоді як дзвіноподібна хвиля з періодичним затуханням може бути описана.

1. *Бабич В.М., Киселев А.П.* Упругие волны. Высокочастотная теория. – СПб: БХВ-Петербург, 2014. – 310 с.
2. *Викторов В.И.* Физические основы применения ультразвуковых волн Рэлея и Лэмба в технике. – М.: Наука, 1966. – 168 с. (Viktorov I.A. Rayleigh and Lamb waves. – New York: Plenum Press, 1967. – 168 p.)
3. *Руцицький Я.Я., Цурнал С.І.* Хвилі в матеріалах з мікроструктурою. – К.: Ін-т механіки ім. С.П. Тимошенка, 1997. – 377 с.
4. *Седов Л.И.* Механика сплошной среды: В 2-х т. – М.: Наука, 1970. – 568 с. (Sedov L.I. A Course in Continuum Mechanics. In vols. I-IV. Amsterdam: Wolters Noordhoff Publishing, 1971.)
5. *Федоров Ф.И.* Теория упругих волн в кристаллах. – М.: Наука, 1965. – 388 с. (Fedorov F.I. Theory of Elastic Waves in Crystals. – New York: Plenum Press, 1968. – 388 p.)
6. *Achenbach J.D.* Wave Propagation in Elastic Solids. – Amsterdam: North-Holland, 1973. – 425 p.
7. *Alderson A., Alderson K.L.* Auxetic materials // I. Mech. E.: J. Aerosp. Eng. – 2007. – **221**, N4. – P. 565 – 575.
8. *Carneiro V.H., Meireles J., Puga H.* Auxetic Materials – A Review // Materials Science – Poland. – 2013. – **31**, N4. – P. 561 – 571.
9. *Chadwick P.* Surface and interfacial waves of arbitrary form in isotropic elastic media // J. Elasticity. – 1976. – **6**. – P. 73 – 80.
10. *Friedlander F.G.* On total reflection of plane waves // Quart. J. Mech. Appl. Math. – 1948. – **1**. – P. 376 – 384.
11. *Dieulesaint, E., Royer D.* Ondes elastiques dans les solides. Application au traitement du signal. – Paris: Masson et Cie, 1974. – 434 p.
12. *Hetnarski R.B., Ignaczak J.* The Mathematical Theory of Elasticity. – Boca Raton: CRC Press, Taylor & Francis Group, 2011. – 837 p.
13. *Erbas B., Kaplunov J., Prikazchikov D.* The Rayleigh wave field in mixed problem for a half-space // IMA J. Appl. Math. – 2013. – **78**(5). – P. 1078 – 1086.
14. *Fu Y.B., Rogerson G.A., Wang W.F.* Surface waves guided by topography in an anisotropic elastic half-space // Proc. Roy. Soc. London. Ser.A. – 2013. – **469**(2149). – P. 2012 – 2037.
15. *Grima J.N.* Auxetic metamaterials // European Summer Campus, Strasbourg, France. – 2010. – P.1 – 13. <http://www.auxetic.info>.

16. *Lawrie J.B., Kaplunov J.D.* Edge waves and resonance on elastic structures // *Math. and Mech. Solids.* – 2012. – **1**, N1. – P. 1 – 17.
17. *Lim T.C.* Auxetic Materials and Structures. – Singapore: Springer, 2015. – 634 p.
18. *Liu Y.P., Hu H.* A review on auxetic structures and polymeric materials // *Scientific Research and Essays.* – 2010. – **5**, N10. – P.1052 – 1063.
19. *Kiselev A.P., Rogerson G.A.* Laterally dependent surface waves in an elastic medium with a general depth dependence // *Wave Motion.* – 2009. – **46**, N8. – P. 539 – 547.
20. *Kiselev A.P.* Rayleigh wave with a transverse structure // *Proc. Roy. Soc. London, Ser.A.* – 2004. – **460** (2050). – P. 3059 – 3064.
21. *Nowacki W.* Theory of Elasticity. – Warszawa: PWN, 1970. – 683 p. (In Polish)
22. *Pravoto Y.* Seeing auxetic materials from the mechanics point of view: A structural review on the negative Poisson's ratio // *Comp. Mater. Scie.* – 2012. – **58**. – P. 140 – 153.
23. *Royer D., Dieulesaint E.* Elastic Waves in Solids (I,II). *Advanced Texts in Physics.* – Berlin: Springer, 2000. – 384 p., 322 p.
24. *Rushchitsky J.J.* Nonlinear elastic waves in materials. – Heidelberg: Springer, 2014. – 474 p.
25. *Rushchitsky J.J.* Auxetic linearly elastic isotropic materials: restrictions on elastic moduli // *Arch. Appl. Mech.* – 2015. – **72**, N1. – P.72 – 76.
26. *Scarpa F.* Auxetics: From Foams to Composites and Beyond (presentation to Sheffield May 2011). – <http://www.bris.ac.uk/composites>.

Поступила 28.12.2015

Утверждена в печать 05.07.2016