

В.Ф.Мейш, А.В.Павлюк

**НЕСТАЦИОНАРНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ТРЕХСЛОЙНЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ  
ОБОЛОЧЕК ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ  
С ПРОДОЛЬНОМ ДИСКРЕТНЫМ РЕБРИСТЫМ НАПОЛНИТЕЛЕМ**

*Институт механики им. С.П. Тимошенко НАНУ;  
ул. Нестерова, 3, 03057, Киев, Украина; e-mail: desc@inmech.kiev.ua*

**Abstract.** The equations of vibrations of three-layer cylindrical shell of elliptic cross-section under non-stationary loading are obtained. In analysis of elements of elastic structure the models of Timoshenko theory of shells and rods are used. The numerical method of solving of equations of dynamics is based on application of the integro-interpolation method of constructing the difference schemes for equations with discontinuous coefficients. The problem is solved on the dynamical behavior of three-layer cylindrical shell of elliptic cross-section with allowance for discreteness of the longitudinal ribbed filler.

**Key words:** three-layer cylindrical shell, elliptic cross-section, Timoshenko-type theory, forced vibrations, numerical solution.

**Введение.**

Оценка напряженно-деформированного состояния трехслойных цилиндрических оболочек с дискретным ребристым наполнителем является достаточно сложной задачей, решение которой требует развития определенных теоретических моделей слоистых пластин и оболочек. Реализация этих моделей вызывает необходимость совершенствования и разработки эффективных численных методов расчета указанных элементов конструкций. Сложность построения механических моделей многослойных оболочек и применение принципиально разных кинематических и статических гипотез приводит к значительному разнообразию расчетных схем и уравнений [1 – 22]. Известно, что при построении вариантов многослойных оболочек существует два основных подхода построения математических моделей, которые основаны на использовании единых гипотез ко всему пакету [3, 5, 7 – 11, 14 – 22] и гипотез, которые учитывают кинематические и статические особенности каждого слоя [1, 6]. Согласно терминологии, предложенной в [3, 6], модели и теории второго подхода получили название «дискретно-структурных». При рассмотрении трехслойных оболочек с ребристым наполнителем также справедливы указанные подходы – конструктивно-ортотропная модель трехслойных оболочек и модель с учетом дискретного расположения элементов наполнителя. В рамках второго подхода рассмотрены осесимметричные и неосесимметричные колебания трехслойных оболочек с ребристым наполнителем при нестационарных нагрузках [11, 12].

В данной работе рассмотрены трехслойные цилиндрические оболочки эллиптического поперечного сечения с учетом продольного дискретного ребристого наполнителя. Очевидно, что оболочки с учетом дискретности наполнителя можно отнести ко второму подходу построения моделей многослойных оболочек. Принимая ограничения, соответствующие гипотезам Тимошенко для оболочек и стержней, согласно геометрически линейной теории получены уравнения колебаний. При решении конкретных краевых задач использована явная конечно-разностная схема интегрирования уравнений. В качестве числового примера представлено решение задачи о вынужденных неосесимметричных колебаниях рассматриваемой неоднородной оболочечной структуры при действии распределенной нестационарной нагрузки.

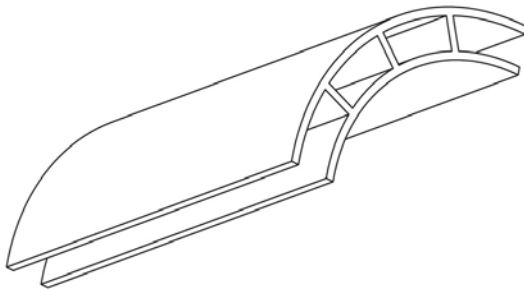


Рис. 1

### §1. Постановка задачи. Основные уравнения.

Рассмотрим трехслойную цилиндрическую оболочку эллиптического сечения с дискретным продольным наполнителем при действии внутреннего распределенного нестационарного нагружения. Неоднородная трехслойная упругая структура представляет собой коаксиальные цилиндрические оболочки (внутренняя и внешняя обшивки),

которые жестко соединены между собой системой продольных дискретных ребер. Схематическое представление исходной конструкции представлено на рис. 1.

Коэффициенты первой квадратичной формы и кривизны координатной поверхности исходных оболочек принимают такой вид:

$$A_1 = 1; \quad k_2 = 0; \quad A_2 = (a_k^2 \cos^2 \alpha_2 + b_k^2 \sin^2 \alpha_2)^{1/2}; \quad (1.1)$$

$$k_2 = a_k b_k (a_k^2 \cos^2 \alpha_2 + b_k^2 \sin^2 \alpha_2)^{-3/2},$$

где  $a_k$  и  $b_k$  – полуоси эллипса, который характеризует поперечное сечение соответствующей цилиндрической оболочки.

Принято, что деформированное состояние внутренней и внешней обшивок (соответственно, индексы 1 и 2) может быть определено обобщенными векторами перемещений соответствующих срединных поверхностей  $\bar{U}_1 = (u_1^1, u_2^1, u_3^1, \varphi_1^1, \varphi_2^1)^T$  и  $\bar{U}_2 = (u_1^2, u_2^2, u_3^2, \varphi_1^2, \varphi_2^2)^T$ . При рассмотрении элементов дискретного наполнителя предполагается, что деформированное состояние продольного  $i$ -го ребра может быть определено обобщенным вектором перемещений  $\bar{U}_i = (u_{1i}, u_{2i}, u_{3i}, \varphi_{1i}, \varphi_{2i})^T$ .

Для вывода уравнений колебаний трехслойной упругой структуры с дискретным наполнителем используем вариационный принцип стационарности Гамильтона – Остроградского, согласно которому

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (K - \Pi + A) dt = 0, \quad (1.2)$$

где  $K$  – полная кинетическая энергия упругой системы;  $\Pi$  – ее полная потенциальная энергия;  $A$  – работа внешних сил.

В формулах (1.2) приняты обозначения:

$$\delta \Pi = \delta \sum_{k=1}^2 \Pi^k + \delta \sum_{i=1}^l \Pi_i; \quad \delta K = \delta \sum_{k=1}^2 K^k + \delta \sum_{i=1}^l K_i; \quad (1.3)$$

$\Pi^k, \Pi_i$  – потенциальная энергия  $k$ -й обшивки и соответствующего  $i$ -го ребра;  $K^k, K_i$  – соответствующие кинетические энергии.

После стандартных преобразований в вариационном уравнении (1.2), с учетом выражений для потенциальной и кинетической энергий для обшивок и ребер согласно [3] получены две группы уравнений. Уравнения колебаний трехслойной цилиндрической оболочки эллиптического сечения с учетом дискретности продольного наполнителя представим в таком виде:

для внутренней и внешней обшивок –

$$\frac{\partial T_{11}^k}{\partial s_1} + \frac{\partial S^k}{\partial s_2} = \rho_k h_k \frac{\partial^2 u_1^k}{\partial t^2}; \quad \frac{\partial S^k}{\partial s_1} + \frac{\partial T_{22}^k}{\partial s_2} + k_2 T_{23}^k = \rho_k h_k \frac{\partial^2 u_2^k}{\partial t^2};$$

$$\frac{\partial T_{13}^k}{\partial s_1} + \frac{\partial T_{23}^k}{\partial s_2} - k_2 T_{22}^k + P_3^k(s_1, s_2, t) = \rho_k h_k \frac{\partial^2 u_3^k}{\partial t^2}; \quad (1.4)$$

$$\frac{\partial M_{11}^k}{\partial s_1} + \frac{\partial H^k}{\partial s_2} - T_{13}^k = \rho_k \frac{h_k^3}{12} \frac{\partial^2 \varphi_1^k}{\partial t^2}; \quad \frac{\partial H^k}{\partial s_1} + \frac{\partial M_{22}^k}{\partial s_2} - T_{23}^k = \rho_k \frac{h_k^3}{12} \frac{\partial^2 \varphi_2^k}{\partial t^2}; \quad k = 1, 2;$$

для  $i$ -го продольного ребра –

$$\begin{aligned} [S]_i + \frac{\partial T_{11i}}{\partial s_1} &= \rho_i F_i \frac{\partial^2 u_{1i}}{\partial t^2}; & [T_{22}]_i + \frac{\partial T_{12i}}{\partial s_1} &= \rho_i F_i \frac{\partial^2 u_{2i}}{\partial t^2}; \\ [T_{23}]_i + \frac{\partial T_{13i}}{\partial s_1} &= \rho_i F_i \frac{\partial^2 u_{3i}}{\partial t^2}; & [H]_i + \frac{\partial M_{11i}}{\partial s_1} - T_{13i} &= \rho_i I_{1i} \frac{\partial^2 \varphi_{1i}}{\partial t^2}; \\ [M_{22}]_i + \frac{\partial M_{12i}}{\partial s_1} &= \rho_i I_{kri} \frac{\partial^2 \varphi_{2i}}{\partial t^2}; & i &= \overline{1, I}. \end{aligned} \quad (1.5)$$

В соотношениях (1.5) величины типа  $[S]_i, [T_{22}]_i, [T_{23}]_i, [H]_i, [M_{22}]_i$  отвечают суммарным значениям усилий-моментов внешней и внутренней обшивок, которые действуют на  $i$ -й дискретный элемент заполнителя.

Системы уравнений (1.4) – (1.5) связаны между собой кинематическими условиями контакта обобщенных векторов перемещений срединной поверхности обшивок и центров тяжести поперечного сечения  $i$ -го дискретного элемента согласно формулам

$$\begin{aligned} u_{1i}(s_1) &= u_1^k(s_1, s_{2i}) \pm H_i^* \varphi_1^k(s_1, s_{2i}); & u_{2i}(s_1) &= u_2^k(s_1, s_{2i}) \pm H_i^* \varphi_2^k(s_1, s_{2i}); \\ u_{3i}(s_1) &= u_3^k(s_1, s_{2i}); & \varphi_{1i}(s_1) &= \varphi_1^k(s_1, s_{2i}); \\ \varphi_{2i}(s_1) &= \varphi_2^k(s_1, s_{2i}); & H_i^*(s_1) &= 0,5(h_k + h_i) \quad (k = 1, 2). \end{aligned} \quad (1.6)$$

В соотношениях (1.4) – (1.6) величины  $\rho_k (k = 1, 2), \rho_i (i = \overline{1, I})$  отвечают плотностям материала обшивок и соответствующих дискретных элементов заполнителя;  $h_k (k = 1, 2), h_i (i = \overline{1, I})$  – толщины и высоты соответствующих обшивок и дискретных элементов.

Величины усилий – моментов обшивок определены через величины деформаций согласно формулам

$$\begin{aligned} T_{11}^k &= B_{11}^k(\varepsilon_{11}^k + \nu_{21}^k \varepsilon_{22}^k); & T_{22}^k &= B_{22}^k(\varepsilon_{22}^k + \nu_{12}^k \varepsilon_{11}^k); \\ T_{13}^k &= B_{13}^k \varepsilon_{13}^k; & S &= B_{12}^k \varepsilon_{12}^k; & T_{13}^k &= B_{13}^k \varepsilon_{13}^k; & S &= B_{12}^k \varepsilon_{12}^k; & H &= D_{12}^k \kappa_{12}^k; \\ M_{11}^k &= D_{11}^k(\kappa_{11}^k + \nu_{21}^k \kappa_{22}^k); & M_{22}^k &= D_{22}^k(\kappa_{22}^k + \nu_{12}^k \kappa_{11}^k), \end{aligned} \quad (1.7)$$

а величины деформаций выражаются через компоненты обобщенных векторов перемещений срединных поверхностей обшивок согласно равенствам [2, 11, 12]

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11}^k &= \frac{\partial u_1^k}{\partial s_1}; & \varepsilon_{22}^k &= \frac{\partial u_2^k}{\partial s_2} + k_2 u_3^k; & \varepsilon_{12}^k &= \frac{\partial u_2^k}{\partial s_1} + \frac{\partial u_1^k}{\partial s_2}; & \varepsilon_{13}^k &= \varphi_1^k + \theta_1^k; & \varepsilon_{23}^k &= \varphi_2^k + \theta_2^k; \\ \theta_1^k &= \frac{\partial u_3^k}{\partial s_1}; & \theta_2^k &= \frac{\partial u_3^k}{\partial s_2} - k_2 u_2^k; & \kappa_{11}^k &= \frac{\partial \varphi_1^k}{\partial s_1}; & \kappa_{22}^k &= \frac{\partial \varphi_2^k}{\partial s_2}; & \kappa_{12}^k &= \frac{\partial \varphi_2^k}{\partial s_1} + \frac{\partial \varphi_1^k}{\partial s_2}. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Для усилий – моментов продольных дискретных элементов заполнителя, связанных с соответствующими деформациями, имеем формулы

$$T_{11i} = E_i F_i \varepsilon_{11i}; T_{12i} = G_i F_i \varepsilon_{12i}; T_{13i} = G_i F_i \varepsilon_{13i}; M_{11i} = E_i I_i \kappa_{11i}; M_{21i} = G_i I_{kri} \kappa_{12i}; \quad (1.9)$$

$$\varepsilon_{11i} = \frac{\partial u_{1i}}{\partial s_1}; \varepsilon_{12i} = f_{2i} + \theta_{2i}; \varepsilon_{13i} = f_{1i} + \theta_{1i}; \theta_{1i} = \frac{\partial u_{3i}}{\partial s_1}; \theta_{2i} = \frac{\partial u_{2i}}{\partial s_1}; \kappa_{11i} = \frac{\partial \varphi_{1i}}{\partial s_1}; \kappa_{12i} = \frac{\partial \varphi_{2i}}{\partial s_1},$$

где  $E_i, G_i$  – характеристики материала  $i$ -го элемента дискретного заполнителя;  $F_i, I_i, I_{kri}$  – геометрические параметры  $i$ -го дискретного элемента.

Уравнения колебаний (1.4) – (1.9) дополняются соответствующими начальными и граничными условиями.

## §2. Численный алгоритм решения задачи.

Построение численного алгоритма основано на совместном использовании интегро-интерполяционного метода построения разностных схем по пространственным координатам  $s_1, s_2$  и явной конечно-разностной схемы интегрирования по временной координате  $t$  [2]. Одной из особенностей задач колебаний неоднородных оболочек с учетом дискретного расположения ребер является наличие разрывных коэффициентов в исходных уравнениях. Учитывая вышеизложенное, решения задач теории трехслойных цилиндрических оболочек эллиптического сечения с учетом продольного ребристого наполнителя сведено к рассмотрению следующих этапов: 1) поиск решения в гладкой области; 2) поиск решения на  $i$ -той линии разрыва вдоль оси  $OX$  [11, 12].

Рассмотрим построение разностного алгоритма для уравнений (1.4) в гладкой области

$$\Omega_1 = \{s_{1l-1/2} \leq s_1 \leq s_{1l+1/2}, s_{2m-1/2} \leq s_2 \leq s_{2m+1/2}\} \text{ при } t_{n-1/2} \leq t \leq t_{n+1/2};$$

$$\int_t \int_{\Omega_1} \left[ \frac{\partial T_{11}^k}{\partial s_1} + \frac{\partial S^k}{\partial s_2} \right] d\Omega_1 dt = \int_t \int_{\Omega_1} \left[ \rho_k h_k \frac{\partial^2 u_1^k}{\partial t^2} \right] d\Omega_1 dt; \quad (2.1)$$

$$\int_t \int_{\Omega_1} \left[ \frac{\partial S^k}{\partial s_1} + \frac{\partial T_{22}^k}{\partial s_2} + k_2 T_{23}^k \right] d\Omega_1 dt = \int_t \int_{\Omega_1} \left[ \rho_k h_k \frac{\partial^2 u_2^k}{\partial t^2} \right] d\Omega_1 dt;$$

.....

После стандартных преобразований в (2.1) получим разностные соотношения, которые аппроксимируют исходные уравнения (1.4) в гладкой области, т.е. имеем

$$\frac{T_{11l+1/2,m}^{kn} - T_{11l-1/2,m}^{kn}}{\Delta s_1} + \frac{S_{l,m+1/2}^{kn} - S_{l,m-1/2}^{kn}}{\Delta s_2} = \rho h (U_{1lm}^{kn})_{ii}; \quad (2.2)$$

$$\frac{S_{l+1/2,m}^{kn} - S_{l-1/2,m}^{kn}}{\Delta s_1} + \frac{T_{22l,m+1/2}^{kn} - T_{22l,m-1/2}^{kn}}{\Delta s_2} + \frac{1}{2} k_{2l,m} (T_{23l,m+1/2}^{kn} + T_{23l,m-1/2}^{kn}) = \rho h (U_{2lm}^{kn})_{ii};$$

.....

В результате такого подхода величины компонент обобщенных векторов  $\bar{U}_1, \bar{U}_2$  соотнесены к целым точкам разностной схемы ( $l, m$ ). Величины усилий – моментов, которые используются при дифференцировании по координате  $s_1$ , соотнесены к полужелым точкам ( $l \pm 1/2, m$ ), а величины, которые используются при дифференцировании по координате  $s_2$ , – к ( $l, m \pm 1/2$ ).

Для согласования величин усилий – моментов в (2.2) уравнения (1.7) интегрируются в областях:

$$\Omega_2 = \{s_{1l-1} \leq s_1 \leq s_{1l}, s_{2m-1/2} \leq s_2 \leq s_{2m+1/2}\};$$

$$\Omega_3 = \{s_{1l-1/2} \leq s_1 \leq s_{1l+1/2}, s_{2m-1} \leq s_2 \leq s_{2m}\} \text{ при } t_{n-1/2} \leq t \leq t_{n+1/2}.$$

В частности, в области  $\Omega_2$  имеем следующие соотношения:

$$\int_t \iint_{\Omega_2} [T_{11}^k] d\Omega_2 dt = \int_t \iint_{\Omega_2} [B_{11}^k (\varepsilon_{11}^k + \nu_{21}^k \varepsilon_{22}^k)] d\Omega_2 dt; \quad (2.3)$$

$$\int_t \iint_{\Omega_2} [S] d\Omega_2 dt = \int_t \iint_{\Omega_2} [B_{12}^k \varepsilon_{12}^k] d\Omega_2 dt;$$

.....

Применяя формулы численного интегрирования, получаем следующие разностные соотношения, которые связывают величины усилий-моментов с соответствующими величинами деформаций:

$$T_{11\pm 1/2,m}^{kn} = B_{11}^k (\varepsilon_{11\pm 1/2,m}^{kn} + \nu_{21}^k \varepsilon_{22\pm 1/2,m}^{kn});$$

$$S_{\pm 1/2,m}^{kn} = B_{12}^k \varepsilon_{12\pm 1/2,m}^{kn}; \quad (2.4)$$

.....

Аналогичные соотношения записываем в области  $\Omega_3$ .

Для получения разностных соотношений для величин деформаций в соотношениях (2.4) интегрируем соотношение (1.8), соответственно, по областям  $\Omega_2$  и  $\Omega_3$  при  $t_{n-1/2} \leq t \leq t_{n+1/2}$ ; тогда имеем

$$\int_t \iint_{\Omega_2} [\varepsilon_{11}^k] d\Omega_2 dt = \int_t \iint_{\Omega_2} \left[ \frac{\partial u_1^k}{\partial s_1} \right] d\Omega_2 dt;$$

$$\int_t \iint_{\Omega_2} [\varepsilon_{22}^k] d\Omega_2 dt = \int_t \iint_{\Omega_2} \left[ \frac{\partial u_2^k}{\partial s_2} + k_2 u_3^k \right] d\Omega_2 dt; \quad (2.5)$$

.....

После операции численного интегрирования в (2.5) получим следующие разностные соотношения, которые связывают соответствующие деформации с компонентами обобщенного вектора перемещений:

$$\varepsilon_{11\pm 1/2,m}^{kn} = \frac{u_{1\pm 1,m}^{kn} - u_{1l,m}^{kn}}{\Delta s_1}; \quad (2.6)$$

$$\varepsilon_{22\pm 1/2,m}^{kn} = \frac{u_{2\pm 1/2,m+1/2}^{kn} - u_{2\pm 1/2,m-1/2}^{kn}}{\Delta s_1} + k_{2\pm 1/2,m} \frac{u_{3\pm 1,m}^{kn} + u_{3l,m}^{kn}}{2};$$

.....

При построении численного решения для  $i$ -го продольного ребра рассматриваем области

$$\Omega_{1i} = \{ s_{l-1/2} \leq s_1 \leq s_{l+1/2} \}; \quad \Omega_{2i} = \{ s_{l-1} \leq s_1 \leq s_l \}; \quad \Omega_{3i} = \{ s_{1l} \leq s_1 \leq s_{l+1} \}$$

при  $t_{n-1/2} \leq t \leq t_{n+1/2}$ . Уравнения колебаний  $i$ -го продольного ребра (1.5) интегрируются в области  $\Omega_{1i}$ :

$$\int_t \int_{\Omega_{1i}} \left\{ \frac{\partial T_{11i}}{\partial s_1} + [S]_i \right\} d\Omega_{1i} dt = \rho_i F_i \int_t \int_{\Omega_{1i}} \frac{\partial^2 u_{1i}}{\partial t^2} d\Omega_{1i} dt;$$

$$\int_t \int_{\Omega_{1i}} \left\{ \frac{\partial \bar{T}_{12i}}{\partial s_1} + [T_{22}]_i \right\} d\Omega_{1i} dt = \rho_i F_i \int_t \int_{\Omega_{1i}} \frac{\partial^2 u_{2i}}{\partial t^2} d\Omega_{1i} dt;$$

$$\begin{aligned}
\int_t \int_{\Omega_i} \left\{ \frac{\partial \bar{T}_{13i}}{\partial s_1} + [\bar{T}_{23}]_i \right\} d\Omega_i dt &= \rho_i F_i \int_t \int_{\Omega_i} \frac{\partial^2 u_{3i}}{\partial t^2} d\Omega_i dt; \\
\int_t \int_{\Omega_i} \left\{ \frac{\partial M_{11i}}{\partial s_1} - T_{13i} + [H]_i \right\} d\Omega_i dt &= \rho_i I_i \int_t \int_{\Omega_i} \frac{\partial^2 \varphi_{1i}}{\partial t^2} d\Omega_i dt; \\
\int_t \int_{\Omega_i} \left\{ \frac{\partial M_{12i}}{\partial s_1} + [M_{22}]_i \right\} d\Omega_i dt &= \rho_i I_{kri} \int_t \int_{\Omega_i} \frac{\partial^2 \varphi_{2i}}{\partial t^2} d\Omega_i dt.
\end{aligned} \tag{2.7}$$

В результате интегрирования уравнений (2.7) получаем разностные соотношения вида

$$\begin{aligned}
\frac{T_{11il+1/2}^n - T_{11il-1/2}^n}{\Delta s_1} + [S]_i^n &= \rho_i F_i (u_{1il}^n)_{\bar{i}}; \quad \frac{T_{12il+1/2}^n - T_{12il-1/2}^n}{\Delta s_1} + [T_{22}]_i^n = \rho_i F_i (u_{2il}^n)_{\bar{i}}; \\
\frac{T_{13il+1/2}^n - T_{13il-1/2}^n}{\Delta s_1} + [T_{23}]_i^n &= \rho_i F_i (u_{3il}^n)_{\bar{i}}; \\
\frac{M_{11il+1/2}^n - M_{11il-1/2}^n}{\Delta s_1} - \frac{1}{2} (T_{13il+1/2}^n + T_{13il-1/2}^n) + [H]_i^n &= \rho_i I_i (\varphi_{1il}^n)_{\bar{i}}; \\
\frac{M_{12il+1/2}^n - M_{12il-1/2}^n}{\Delta s_1} + [M_{22}]_i^n &= \rho_i I_{kri} (\varphi_{2il}^n)_{\bar{i}}.
\end{aligned} \tag{2.8}$$

Получение согласованных величин усилий-моментов для  $i$ -го продольного ребра для уравнения (2.8) производится аналогично формулам (2.3) – (2.6) для оболочки.

Вышеизложенный подход построения конечно-разностных соотношений для обшивок и ребер позволяет выполнять закон сохранения полной механической энергии на разностном уровне.

### §3. Числовой пример.

Рассмотрим задачу о вынужденных колебаниях трехслойной цилиндрической оболочки с дискретным продольным ребристым заполнителем при внутренней распределенной импульсной нагрузке. Полагаем, что края оболочки и элементов продольного заполнителя жестко закреплены. Граничные условия в этом случае при  $s_1 = 0$ ,  $s_1 = L$  имеют следующий вид:

$$u_1^k = u_2^k = u_3^k = \varphi_1^k = \varphi_2^k = 0 \quad (k = \overline{1, 2}); \quad u_{1i} = u_{2i} = u_{3i} = \varphi_{1i} = \varphi_{2i} = 0 \quad (i = \overline{1, I}).$$

Начальные условия для системы (1.1) – (1.6) при  $t = 0$  имеют вид:

для обшивок –

$$u_1^k = u_2^k = u_3^k = \varphi_1^k = \varphi_2^k = 0; \quad \frac{\partial u_1^k}{\partial t} = \frac{\partial u_2^k}{\partial t} = \frac{\partial u_3^k}{\partial t} = \frac{\partial \varphi_1^k}{\partial t} = \frac{\partial \varphi_2^k}{\partial t} = 0 \quad (k = \overline{1, 2});$$

для продольных дискретных элементов заполнителя –

$$u_{1i} = u_{2i} = u_{3i} = \varphi_{1i} = \varphi_{2i} = 0; \quad \frac{\partial u_{1i}}{\partial t} = \frac{\partial u_{2i}}{\partial t} = \frac{\partial u_{3i}}{\partial t} = \frac{\partial \varphi_{1i}}{\partial t} = \frac{\partial \varphi_{2i}}{\partial t} = 0 \quad (i = \overline{1, I}).$$

Задача рассмотрена при следующих геометрических и физико-механических параметрах:  $L/h_1 = 80$ ;  $h_1 = h_2$ ;  $a_1/b_1 = 1,1$ ;  $h_j = h_i$ ;  $j = \overline{1, J}$ ;  $E_1^1 = E_1^2 = E_i = E_j = 70$  ГПа;  $\nu_1^1 = \nu_1^2 = 0,3$ ;  $\rho_1 = \rho_2 = \rho_i = \rho_j = 2,7 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup>, где  $L$  – длина конструкции.

Рассмотрим случай продольного дискретного заполнителя при  $I = 4$ , когда дискретные элементы равномерно расположены по пространственным координатам меж-

ду внутренней и внешней обшивки. Центры тяжести поперечного сечения дискретных элементов заполнителя проецируются на соответствующие срединные поверхности обшивок по линиям  $s_{2j} = (j-1)A_{2j}\alpha_{2j}$ ,  $j = \overline{1, 4}$ . Нормальная импульсная нагрузка задана согласно формуле  $P_3^1 = A \cdot [\eta(t) - \eta(t-T)]$ , где  $\eta(t)$  – функция Хевисайда;  $A$  – амплитуда нагрузки;  $T$  – длительность нагрузки. В расчетах принято:  $A = 10^6$  Па;  $T = 50 \cdot 10^{-6}$  с.

Числовые результаты решения данной задачи представлены на рис. 2 – 7, где кривые с индексом 1 соответствуют величинам внутренней обшивки (деформация, напряжение), а кривые с индексом 2 – величинам внешней. Исследования напряженно-деформированного состояния динамического поведения трехслойных оболочек эллиптического сечения с учетом ребристого заполнителя проведены на временном интервале  $t = 60T$ .

Ниже представлены характерные зависимости напряженно-деформированного состояния трехслойной оболочки; в частности, рассмотрены моменты времени, когда соответствующие кинематические и статические величины достигают максимальных по модулю значений.

На рис. 2 приведены зависимости величин  $u_3$  по пространственной координате  $s_1$  в сечении  $\alpha_2 = 0$  (кривая 1) и сечении  $\alpha_2 = \pi/2$  (кривая 2). Кривые 1 – 2 соответствуют моменту времени  $t = 4T$  (момент времени достижения величины  $u_3$  максимального значения в сечении  $\alpha_2 = 0$ ).

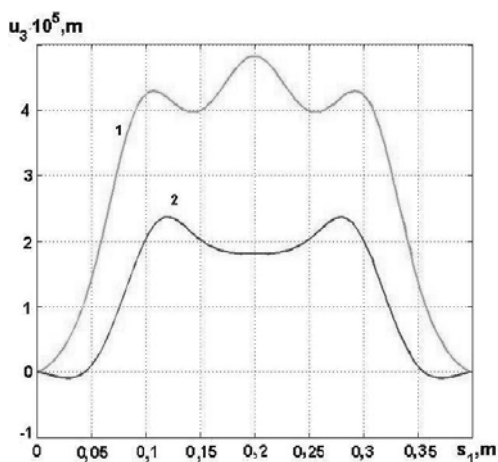


Рис. 2

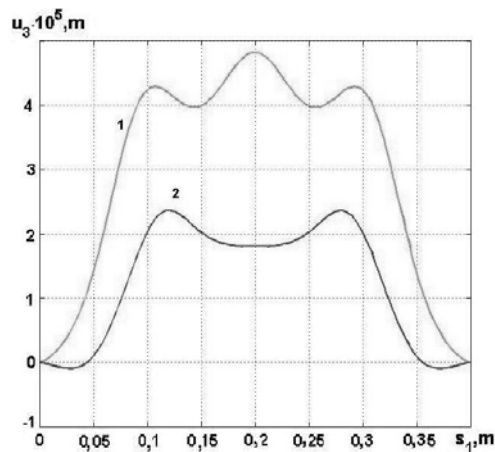


Рис. 3

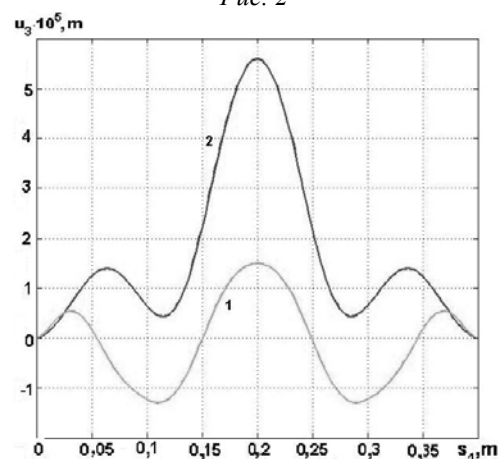


Рис. 4

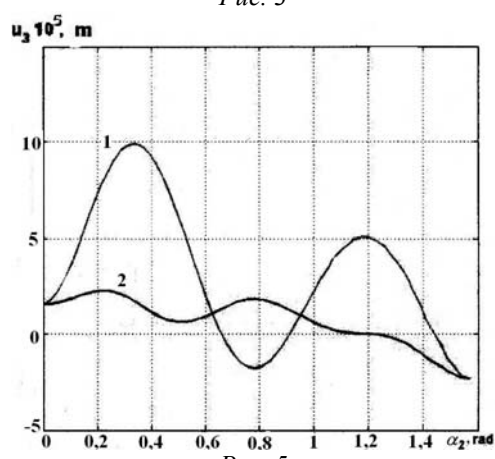


Рис. 5

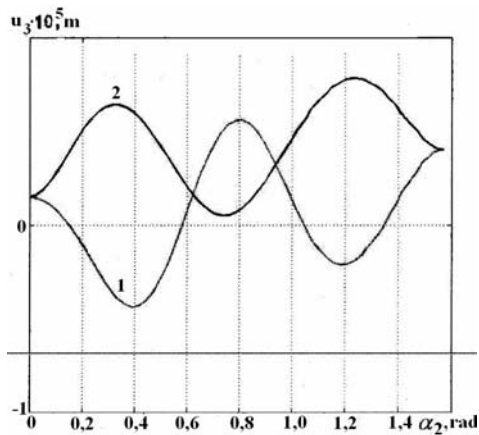


Рис. 6

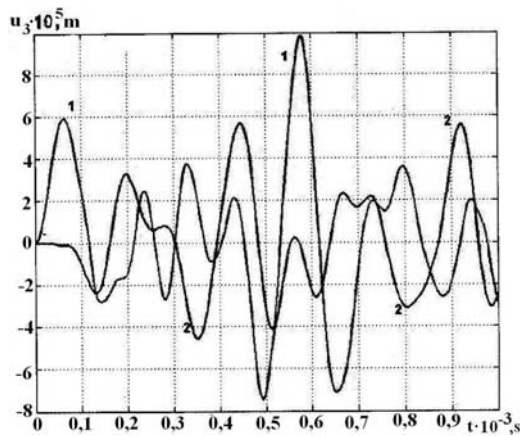


Рис. 7

Кривая 1 соответствует прогибу внутренней оболочки, кривая 2 – прогибу внешней оболочки. Согласно полученным данным, наблюдается задержка начала колебаний верхней оболочки по отношению к внутренней. Замедление начала колебательного процесса внешней оболочки объясняется временем прохождения поперечной волны от линии проекции поперечного сечения центра тяжести продольного ребра на внешнюю оболочку до исследуемой точки ( $\Delta t \approx 3,25e^{-5}$ ).

**Заключение.** В работе, исходя из вариационного принципа Гамильтона-Остроградского, получены уравнения колебаний трехслойных цилиндрических оболочек эллиптического сечения с дискретным наполнителем. При рассмотрении элементов упругой структуры используются модели оболочек и стержней согласно гипотез Тимошенко. Для решения полученных уравнений развит эффективный численный метод, который основан на применении интегро-интерполяционных соотношений по пространственным координатам и явной конечно-разностной схеме по временной координате. Получено решение задачи о динамическом поведении трехслойной цилиндрической оболочки эллиптического сечения с дискретным наполнителем при действии импульсного нагружения. Приведен анализ полученных результатов.

На рис. 3 изображены зависимости величин  $u_3$  по координате  $s_1$  в сечении  $\alpha_2 = \pi/4$ . Кривая 1 соответствует величине  $u_3$  внутренней оболочки при  $t = 4,5T$  – времени достижения максимального значения на исследуемом интервале времени; кривая 2 – величине  $u_3$  для внешней оболочки в тот же момент времени. На рис. 4 представлены аналогичные кривые в момент времени  $t = 9T$  – момент времени достижения максимального значения величиной  $u_3$  внешней оболочки.

На рис. 5 приведены зависимости величин  $u_3$  по пространственной координате  $\alpha_2$  в сечении  $s_1 = L/2$  ( $0 \leq \alpha_2 \leq \pi/2$ ). Кривая 1 соответствует величине  $u_3$  внутренней оболочки при  $t = 2,5T$  (время достижения максимального значения на исследуемом интервале времени). Кривая 2 соответствует величине  $u_3$  в тот же момент времени для внешней оболочки. На рис. 6 представлены аналогичные кривые в момент времени  $t = 9T$  – момент достижения максимального значения величиной  $u_3$  внешней оболочки.

На рис. 7 изображены зависимости величин  $u_3$  в точке ( $s_1 = L/2; \alpha_2 = \pi/4$ ).



РЕЗЮМЕ. Наведено рівняння коливань тришарових циліндричних оболонок еліптичного перерізу з дискретним наповнювачем при нестационарному навантаженні. При розгляді елементів пружної структури використано моделі оболонок згідно з гіпотезами Тимошенка. Чисельний метод розв'язання динамічних рівнянь базується на застосуванні інтегро-інтерполяційного методу побудови скінчено-різницевої схем для рівнянь з розривними коефіцієнтами. Дано розв'язок задачі про динамічну поведінку тришарової циліндричної оболонки еліптичного перерізу з врахуванням дискретності позовжнього ребристого заповнювача.

1. Болотин В.В., Новичков Ю.Н. Механика многослойных конструкций. – М.: Машиностроение, 1980. – 376 с.
2. Головки К.Г., Луговой П.З., Мейш В.Ф. Динамика неоднородных оболочек при нестационарных нагрузках / Под ред. акад. НАН Украины А.Н. Гузя. – К.: Изд.-полиграф. центр «Киевский ун-т», 2012. – 541 с.
3. Григолюк Э.И., Куликов Г.Н. Развитие общего направления в теории многослойных оболочек // Механика композитных материалов. – 1988. – № 2. – С. 287 – 298.
4. Гузь А.Н., Кубенко В.Д. Методы расчета оболочек. Т.5. Теория нестационарной аэрогидроупругости оболочек. – К.: Наук. думка, 1982. – 400 с.
5. Дудченко А.А., Лурье С.А., Образцов И.Ф. Анизотропные многослойные пластины и оболочки. – М.: ВИНТИ. Итоги науки и техники. Сер. Механика твердого деформируемого тела. – 1983. – 15. – С. 3 – 68.
6. Пискунов В.Г., Рассказов А.О. Развитие теории слоистых пластин и оболочек / Успехи механики: в 6-ти томах / Под ред. А.Н. Гузя. Том 3. – К.: «А.С.К.», 2007. – С. 141 – 175.
7. Altenbach H. An alternative determination of transverse shear stiffnesses for sandwich and laminated plates // Int. J. of Solids Struct. – 2000. – 37. – P. 3503 – 3520.
8. Altenbach H. Theories for laminated and sandwich plates: A review // Mechanics of composite materials. – 1998. – 34, N 3. – P. 243 – 252.
9. Carrera E., Developments, ideas, and evaluations based upon Reissner's Mixed Variational Theorem in the modeling of multilayered plates and shells // Appl. Mech. Reviews. – 2001. – 54. – P. 301 – 329.
10. Leonenko D. V., Starovoitov E. I. Vibrations of Cylindrical Sandwich Shells with Elastic Core under Local Loads // Int. Appl. Mech. – 2016. – 52, N 4. – P. 359 – 367.
11. Lugovoi P.Z., Meish V.F., Shtantsel S.E. Forced Nonstationary Vibrations of a Sandwich Cylindrical Shell with Cross-Ribbed Core // Int. Appl. Mech. – 2005. – 41, N 2. – P. 161 – 167.
12. Meish V.F., Shtantsel S.E. Dynamic Problems in the Theory of Sandwich Shells of Revolution with a Discrete Core under Nonstationary Loads // Int. Appl. Mech. – 2002. – 38, N 12. – P. 1501 – 1507.
13. Meish Yu. A. Nonstationary Vibrations of Transversely Reinforced Elliptic Cylindrical Shells on an Elastic Foundation // Int. Appl. Mech. – 2016, – 52, N 6. – P. 359 – 647.
14. Noor A.K., Burton W.S. Assessment of Computational Models for Multilayered Composite Shells // Appl. Mech. Rev. – 1990. – 43, N 4, – P. 67 – 97.
15. Noor A.K., Burton W.S., Bert C.W. Computational Models for Sandwich Panels and Shells // Appl. Mech. Rev. – 1996. – 49, N 3. – P. 155 – 200.
16. Noor A.K., Burton W.S., Peters J.M. Assessment of Computation Models for Multilayered Composite Cylinders // Int. J. of Solids and Structures – 1991. – 27, N 10. – P. 1269 – 1286.
17. Pagano N. Free edge stress fields in composite laminates // Int. J. of Solids Struct. – 1978. – P. 401 – 406.
18. Pagano, N.J. Exact Solutions for Rectangular Bidirectional Composites and Sandwich Plates // J. of Composite Materials. – 1970. – 4. – P. 20 – 34.
19. Qatu M. S. Recent Research Advances in the Dynamic Behavior of Shells: 1989-2000, Part 1: Laminated Composite Shells // Appl. Mech. Rev. – 2002. – 55, N 4 – P. 325 – 350.
20. Qatu M. S., Sullivan R. W., Wang W. Recent Research Advances in the Dynamic Behavior of Composite Shells: 2000 – 2009 // Composite Structures. – 2010. – 93, N 1. – P. 14 – 31.
21. Reddy J. N. On refined computational models of composite laminates // Int. J. for Numerical Methods in Engineering. – 1989. – P. 361 – 382.
22. Soldatos K. P. Mechanics of Cylindrical Shells with Non – Circular Cross Section // Appl. Mech. Rev. – 1999. – 49, N 8. – P. 237 – 274.

Поступила 25.05.2015

Утверждена в печать 29.11.2016