

С.А.Калоеров, А.И.Занько

О МЕТОДЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ ПЛАСТИН С КРИВОЛИНЕЙНЫМ ОТВЕРСТИЕМ

*Донецкий национальный университет;
ул. 600-летия, 21, 83055, Винница, Украина;
e-mail: kaloerov@mail.ru; all53700@mail.ru*

Abstract. The new approximate method of determination of the stress state of plates with curvilinear hole is proposed. It consists in approximation of the hole contours by the ellipses arcs, using the conform mappings and generalized least-squares method. The high exactness is reached in the numerical analysis. As an example, the plate with the squared hole is considered, where the essential difference between results/ obtained by the method of series and the proposed in this article for bending plates.

Key words: anisotropic and isotropic plates, curvilinear hole, complex potentials, generalized least-squares method.

Введение.

В современной науке и технике в качестве элементов конструкций широко используются тонкие пластины с отверстиями и трещинами. Под различными внешними воздействиями вблизи их контуров могут возникать высокие концентрации напряжений, которые могут приводить к разрушению пластин. Поэтому необходимо иметь достаточно простые и эффективные методы определения напряженного состояния таких пластин с отверстиями и трещинами. Для изотропных пластин с круговыми или эллиптическими контурами разработаны достаточно оптимальные методы решения указанного класса задач [2, 9]. Но если контур отверстия является криволинейным, то при решении задач возникают серьезные трудности математического и вычислительного характера. К настоящему времени предложен ряд методов для решения таких задач.

Впервые задача для изотропной пластины с отверстием в виде многоугольника рассмотрена в [9]. Решение задачи получено, используя комплексные потенциалы Колосова – Мусхелишвили $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ обычного комплексного переменного z и конформное отображение внешности единичного круга на внешность многоугольника. При этом для построения отображающих функций использован интеграл Кристоффеля – Шварца, когда приближенную формулу для отображающей функции можно получать в виде полинома. Раскладывая подынтегральную функцию в ряд в окрестности бесконечно удаленной точки и интегрируя, получено отображающую функцию в виде

$$\omega(\zeta) = R \left(\zeta + \sum_{k=1}^n \frac{c_k}{\zeta^k} \right), \quad (1)$$

где R , c_k – постоянные, определяемые из геометрических характеристик контура отверстия. Сохраняя в отображающей функции (1) несколько начальных слагаемых, Г.Н.Савин впервые решил ряд задач для пластины с отверстием в форме квадрата, прямоугольника, трапеции, равностороннего треугольника. При этом, удовлетворяя

граничным условиям на контуре отверстия и используя методы интегралов типа Коши, т.е. восстановления функций из граничных условий, получены точные аналитические выражения для комплексных потенциалов и напряжений, вычислены значения напряжений в точках контура, на площадках, перпендикулярных ему. Но таким подходом можно решать задачи лишь для пластины с одним отверстием, так как в той форме, в какой использовался метод интегралов типа Коши, многосвязные области рассматриваться не могут. Космодамианский А.С. и его ученики, решая аналогичные задачи, при удовлетворении граничным условиям на контуре криволинейного отверстия использовали метод рядов и получили приближенные решения. Ими была исследована роль кривизны контуров в угловых точках на аппроксимацию сторон углов и на значения напряжений; полученные результаты были распространены на случай многосвязных областей, решено большое количество разнообразных задач для свободных, жестко и упруго подкрепленных контуров. Но такие приближенные решения задач, когда функция (1) отображает внешность единичной окружности на внешность контура, несколько отличного от заданного контура, а для определения комплексных потенциалов используется метод рядов, приводят к результатам, значительно отличным от истинных, особенно вблизи угловых точек.

В случае анизотропных сред для решения плоской задачи следует из соответствующих граничных условий получить комплексные потенциалы С.Г.Лехницкого [8] $\Phi_k(z_k)$ ($k=1, 2$), определенные в двух различных плоскостях обобщенных комплексных переменных z_k , получаемых из заданной плоскости аффинными преобразованиями

$$z_k = x + \mu_k y, \quad (2)$$

где μ_k – корни характеристического уравнения

$$a_{11}\mu^4 - 2a_{16}\mu^3 + (2a_{12} + a_{66})\mu^2 - 4a_{26}\mu + a_{22} = 0; \quad (3)$$

a_{ij} – коэффициенты деформаций материала пластины. При этом, если на основной плоскости комплексного переменного z отверстие имеет контур L , то в плоскостях z_k ему соответствуют два различных контура L_k , получаемых из L аффинными преобразованиями (2). При конформных отображениях внешности единичного круга на внешности контуров L и L_k точки, соответствующие одним и тем же точкам плоскостей основной и обобщенных переменных, переходят в одну и ту же точку только в случае эллиптических (круговых) контуров L и L_k . Причем в этих случаях задачи для анизотропных пластин решаются такими же методами, как для изотропных пластин. Таким подходом получено решение различных задач для пластин с одним [8, 9] и с многими отверстиями [5]. Если же контур L , а следовательно и L_k , являются криволинейными, то при конформных отображениях внешности единичного круга на внешности контуров L и L_k соответствующие точки контуров σ и σ_k на единичной окружности не совпадают и решить задачу можно, связав их друг с другом. В работе [5] предложен новый приближенный метод решения задачи для анизотропной пластины с криволинейным отверстием с построением конформных отображений внешности единичного круга на внешности контуров L_k и установлением связи между точками при аффинном и конформном отображениях с помощью малого параметра, характеризующего отклонение исходного контура от эллиптического. Для удовлетворения граничным условиям использован метод рядов. Этот подход был распространен и на многосвязные области [5]. Но он оказался весьма громоздким, сложным и не эффективным при численной реализации. В работе [7] при решении задачи для пластины с одним криволинейным отверстием (в отличие от предыдущего) были введены два малых параметра, характеризующих отклонение криволинейных контуров L_k на

плоскостях z_k от некоторых других криволинейных контуров на этих же плоскостях. Это позволило несколько ускорить сходимость решений. Однако и этот подход оказался малоэффективным и не позволял получать результаты с достаточной степенью точности. Более того, как и в предыдущем случае, для многосвязных областей с криволинейными контурами необходимо было проводить разложения функций в ряды по полиномам Фабера для областей с криволинейными контурами, что приводило к весьма сложным алгоритмам и было малопродуктивным. Аналогичные подходы были использованы при решении задач для пластины с отверстием в виде прямоугольника (в частном случае, квадрата) [13, 15, 19, 12], многоугольника [18, 16, 17], сложного криволинейного контура [14]. В работе [10] решена задача для прямоугольной пластины с прямоугольным отверстием. При этом граничные условия удовлетворялись методом граничной коллокации, что, как будет указано ниже, не приводит к результатам с достаточной степенью точности.

В работах [2, 3] решения задач для областей с криволинейными отверстиями приведено к решениям задач для областей с системой произвольно расположенных эллиптических отверстий и прямолинейных разрезов. При удовлетворении граничным условиям применялся дискретный метод наименьших квадратов (ДМНК). Исходя из граничных условий на контурах, составлялся функционал квадратов невязок и его минимизация приводила к системе линейных алгебраических уравнений с отличным от нуля определителем. Но, будучи универсальным и достаточно эффективным, ДМНК при своей реализации приводит к довольно громоздким формулам и требует высоких профессиональных навыков при составлении и отладке программ на алгоритмических языках. Поэтому в дальнейшем при удовлетворении граничным условиям был применен обобщенный метод наименьших квадратов (ОМНК), когда граничные условия удовлетворяются в некотором наборе «коллокационных» точек. В отличие от метода граничной коллокации, в ОМНК количество выбираемых на контурах коллокационных точек значительно больше, чем количество неизвестных в комплексных потенциалах, и использование такого подхода приводит к переопределенным системам линейных алгебраических уравнений, псевдорешения которых получены с использованием сингулярных разложений.

В данной статье с использованием ОМНК впервые даны решения плоских задач для изотропных и анизотропных пластин с криволинейными контурами. Численными исследованиями установлена высокая степень точности получаемых результатов. Дано сравнение получаемых результатов с известными, полученными ранее другими методами, показано весьма значительное отличие последних от истинных, к которым близки результаты, получаемые ОМНК. Рассмотрен случай поперечного изгиба тонких плит с криволинейными отверстиями, когда известные из литературы решения весьма далеки от истинных.

1. Постановка плоской задачи.

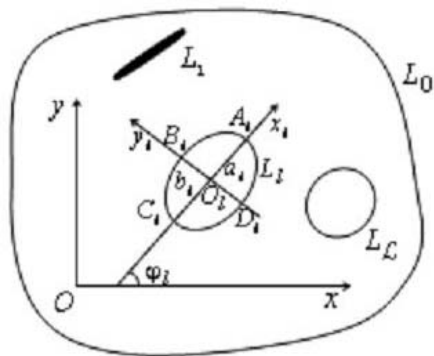


Рис. 1

Рассмотрим анизотропную пластину, находящуюся в условиях обобщенного плоского напряженного состояния и занимающую многосвязную область S , ограниченную внешним контуром L_0 и контурами эллиптических отверстий L_l ($l = \overline{1, \mathcal{L}}$) с полуосями a_l , b_l и центрами в точках (x_{0l}, y_{0l}) (рис. 1). Эллипсы L_l могут переходить в прямолинейные разрезы, располагаться произвольно относительно друг друга и внешнего контура, в том числе касаться, пересекаться, образуя контуры

сложной конфигурации, аппроксимируемые дугами эллипсов и берегами прямолинейных разрезов. В частном случае, когда L_0 полностью уходит в бесконечность, будем иметь бесконечную многосвязную пластину. В последнем случае принимаем, что на бесконечности задано однородное напряженное состояние, характеризуемое напряжениями σ_x^∞ , σ_y^∞ , τ_{xy}^∞ , угол поворота пластины как целого $w^\infty = 0$. Для упрощения задачи в данном исследовании примем, что на контурах пластины действуют внешние усилия или на них заданы перемещения, причем в случае заданных усилий их главный вектор на каждом из контуров равен нулю. Последнее предположение лишь упрощает общий вид комплексных потенциалов.

Если для решения задачи использовать комплексные потенциалы плоской задачи теории упругости анизотропного тела, то рассматриваемая задача сводится к определению функций обобщенных комплексных переменных $\Phi_k(z_k)$ из граничных условий [8]

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 g_{kl} \Phi_k(z_k) = f_{ii}(t) \quad (i = \overline{1, 2}). \quad (4)$$

При этом для нагруженного усилиями X_{nl} , Y_{nl} контура L_l имеем

$$g_{kl1} = 1; \quad g_{kl2} = \mu_k; \quad f_{l1} = \int_0^s X_{nl} ds + c_{l1}; \quad f_{l2} = \int_0^s Y_{nl} ds + c_{l1}, \quad (5)$$

где c_{il} – постоянные; для контура, на котором заданы перемещения u_l^* , v_l^* –

$$g_{kl1} = p_k; \quad g_{kl2} = q_k; \quad f_{l1} = u_l^* + \omega_3 y - u_0; \quad f_{l2} = v_l^* - \omega_3 x - v_0; \quad (6)$$

$$p_k = a_{11} \mu_k^2 + a_{12} - a_{16} \mu_k; \quad q_k = a_{12} \mu_k + \frac{a_{22}}{\mu_k} - a_{26};$$

ω_3 – угол жесткого поворота пластины; u_0 , v_0 – жесткое перемещение пластины.

2. Построение решения плоской задачи.

Функции $\Phi_k(z_k)$ являются голоморфными в многосвязных областях S_k , получаемых из заданной области S аффинными преобразованиями (2) и ограниченных контурами L_{kl} , соответствующими контурам L_l при аффинных преобразованиях. Для построения общего вида функций используем методы конформные отображений.

Пусть в исходной области S эллипс L_l имеет полуоси a_l , b_l , его центр располагается в точке $O_l(x_{0l}, y_{0l})$ выбранной прямоугольной системы координат Ox и полуось a_l составляет угол φ_l с осью Ox .

Параметрическое уравнение эллипса L_l в локальной системе координат $O_l x_l y_l$ с началом в центре эллипса имеет вид $x_l = a_l \cos \vartheta$, $y_l = b_l \sin \vartheta$, а в основной системе будет такой:

$$x = x_{0l} + x_l \cos \varphi_l - y_l \sin \varphi_l; \quad y = y_{0l} + x_l \sin \varphi_l + y_l \cos \varphi_l, \quad (7)$$

где ϑ – параметр, изменяющийся от 0 до 2π .

В областях S_k определения комплексных потенциалов $\Phi_k(z_k)$ эллипсам L_l соответствуют контуры L_{kl} и функции [3]

$$z_k = z_{kl} + R_{kl} \left(\zeta_{kl} + \frac{m_{kl}}{\zeta_{kl}} \right), \quad (8)$$

где

$$z_{kl} = x_{0l} + \mu_k y_{0l};$$

$$R_{kl} = \left[a_l (\cos \varphi_l + \mu_k \sin \varphi_l) + i b_l (\sin \varphi_l - \mu_k \cos \varphi_l) \right] / 2; \quad (9)$$

$$m_{kl} = \left[a_l (\cos \varphi_l + \mu_k \sin \varphi_l) - i b_l (\sin \varphi_l - \mu_k \cos \varphi_l) \right] / 2R_{kl}$$

конформно отображают внешность единичного круга $|\zeta_{kl}| \geq 1$ на внешности эллипсов L_{kl} .

В случае прямолинейного разреза в этих соотношениях следует принять $b_l = 0$. Тогда имеем

$$R_{kl} = \frac{a_l (\cos \varphi_l + \mu_k \sin \varphi_l)}{2}, \quad m_{kl} = 1. \quad (10)$$

Конформные отображения можно построить и по координатам концов осей эллипса $L_l (x_{A_l}, y_{A_l}), (x_{B_l}, y_{B_l}), (x_{C_l}, y_{C_l}), (x_{D_l}, y_{D_l})$. В этом случае в предыдущей формуле следует принять

$$a_l = \frac{1}{2} \sqrt{(x_{A_l} - x_{C_l})^2 + (y_{A_l} - y_{C_l})^2}; \quad b_l = \frac{1}{2} \sqrt{(x_{B_l} - x_{D_l})^2 + (y_{B_l} - y_{D_l})^2};$$

$$x_{0l} = (x_{A_l} + x_{C_l}) / 2; \quad y_{0l} = (y_{A_l} + y_{C_l}) / 2; \quad \varphi_l = \arctg \left(\frac{y_{A_l} - y_{C_l}}{x_{A_l} - x_{C_l}} \right). \quad (11)$$

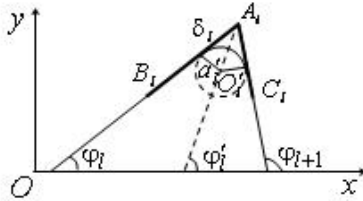


Рис. 2

Иногда возникает необходимость аппроксимации части криволинейного контура в виде сторон угла в окрестности его вершины $A_l (x_{A_l}, y_{A_l})$ дугой, вписанной в этот угол окружности L'_l (рис. 2). Для сохранения гладкого перехода от сторон угла к аппроксимирующей дуге центр окружности L'_l выберем на биссектрисе угла. Обозначим углы между положительным направлением оси Ox и сторонами угла A_l через φ_l и φ_{l+1} . Тогда угол A_l будет равен $\varphi_{l+1} - \varphi_l$. Поэтому угол наклона указанной биссектрисы к оси Ox будет $\varphi'_l = (\varphi_l + \varphi_{l+1}) / 2$. Выбрав на сторонах угла отрезки δ_l от вершины угла, для радиуса вписанной окружности и координат ее центра будем иметь

$$a'_l = \delta_l \operatorname{tg}((\varphi_{l+1} - \varphi_l) / 2); \quad |O'_l A_l| = \sqrt{\delta_l^2 + a'^2_l};$$

$$x'_{0l} = x_{A_l} - |O'_l A_l| \sin((\varphi_l + \varphi_{l+1}) / 2); \quad y'_{0l} = y_{A_l} - |O'_l A_l| \cos((\varphi_l + \varphi_{l+1}) / 2).$$

Зная координаты x'_{0l}, y'_{0l} центра O'_l вписанной окружности L'_l , его радиус a'_l и угол φ'_l между осью Ox и биссектрисой угла A_l и принимая, что $b'_l = a'_l$, по формулам (8) и (9) определим функцию, отображающую внешность единичного круга на внешность окружности L'_l , вписанной в угол A_l .

После построения конформных отображений функции, голоморфные внутри эллипсов L_{k0} , можно разложить в ряды по полиномам Фабера, преобразуемые при определенных условиях в степенные ряды [2]

$$\Phi_{k00}(z_k) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{k0n} \left(\frac{z_k - z_{k0}}{R_{k0}} \right)^n, \quad (12)$$

а функции, голоморфные вне эллипсов L_{kl} , можно разложить в ряды Лорана по отрицательным степеням ζ_{kl} , т.е.

$$\Phi_{k0l}(z_k) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{kln}}{\zeta_{kl}^n}. \quad (13)$$

В связи с этим в рассматриваемом случае комплексные потенциалы $\Phi_k(z_k)$, голоморфные в многосвязных областях S_k , ограниченных внешними контурами L_{k0} и контурами отверстий L_{kl} ($l = \overline{1, \mathcal{L}}$), в общем случае можно представить в виде [3]

$$\Phi_k(z_k) = g\Gamma_k z_k + \sum_{l=g}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{kln} a_{kln}, \quad (14)$$

в котором $g = 0$ – для случая конечной плиты; $g = 1$, если плита бесконечна; Γ_k – постоянные, определяемые из системы уравнений

$$\begin{aligned} 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 \Gamma_k &= \sigma_y^{\infty}; & 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 \mu_k \Gamma_k &= -\tau_{xy}^{\infty}; & 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 \mu_k^2 \Gamma_k &= \sigma_x^{\infty}; \\ 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 \frac{1}{\mu_k} \Gamma_k &= \frac{a_{16} \sigma_x^{\infty} + (2a_{12} + a_{66}) \tau_x^{\infty} + 3a_{26} \sigma_y^{\infty}}{2a_{22}}; \end{aligned} \quad (15)$$

$$\varphi_{k0n} = \left[(z_k - z_{k0}) / R_{k0} \right]^n; \quad \varphi_{kln} = \zeta_{kl}^{-n} \quad (l \geq 1). \quad (16)$$

Для определения неизвестных постоянных a_{kln} функций (14) удовлетворим граничным условиям (4). Для многосвязных областей этим условиям удобнее удовлетворять в дифференциальной форме. Продифференцировав их по дуге контура, получим

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 \sum_{l=g}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} g_{kli} \delta_k \varphi'_{kln}(t_k) a_{kln} = \frac{df_{li}(t)}{ds} - 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 g_{kli} \delta_k g \Gamma_k \quad (i = \overline{1, 2}) \quad (17)$$

$$\left[\delta_k = dt_k / ds; \quad \varphi'_{k0n} = \frac{n(z_k - z_{k0})^{n-1}}{R_{k0}^n}; \quad \varphi'_{kln} = -\frac{n}{\zeta_{kl}^{n-1} (\zeta_{kl}^2 - m_{kl}) R_{kl}} \quad (l \geq 1) \right].$$

Условиям (17) будем удовлетворять обобщенным методом наименьших квадратов [11]. Для этого на контурах плиты выберем набор точек $M_{lm}(x_{lm}, y_{lm})$ ($m = \overline{1, M_l}$) и удовлетворим в них условиям (17), получим

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 \sum_{l=g}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} g_{kli} \delta_k \varphi'_{kln}(t_{klm}) a_{kln} = \frac{df_{li}(t_{lm})}{ds} - 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 g_{kli} \delta_k g \Gamma_k \quad (i = \overline{1, 2}), \quad (18)$$

где $t_{klm} = x_{lm} + \mu_k y_{lm}$.

После определения псевдорешений системы уравнений (18) с использованием сингулярных разложений постоянные a_{kln} , а следовательно и функции $\Phi'_k(z_k)$, будут известными и по ним можно вычислять напряжения в любой точке плиты

$$(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) = -2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 (\mu_k^2, 1, -\mu_k) \Phi'_k(z_k). \quad (19)$$

Заметим, что если внешний контур области отличен от эллипса (круга), то для уменьшения вычислительных погрешностей при реализации алгоритмов в конформных отображениях следует принимать, что $a_0 = b_0 = r_0$, где r_0 – длина радиус-вектора из начала координат в самую удаленную точку контура L_0 . Можно, конечно, для всех контуров, в том числе для контура L_0 , в общих выражениях (16) постоянные R_{kl} опускать, включая их в коэффициенты a_{kln} . Но, как показывают числовые расчеты, вычислительная погрешность при таком выборе функций может увеличиваться.

Для различных конечных и бесконечных пластин были проведены численные исследования распределения напряжений. Ниже описаны некоторые из полученных результатов для пластин из: КАСТ–В изотропный (материал М1); авиационной фанеры (М2) и березовой фанеры (М3). Коэффициенты деформаций a_{ij} для этих материалов приведены в табл. 1.

Таблица 1

Материал	Постоянные материала				a_{11} / a_{22}
	$a_{11} \cdot 10^{-4}, \text{МПа}^{-1}$	$a_{22} \cdot 10^{-4}, \text{МПа}^{-1}$	$a_{12} \cdot 10^{-4}, \text{МПа}^{-1}$	$a_{66} \cdot 10^{-4}, \text{МПа}^{-1}$	
М1	72,100	72,100	-8,600	161,500	1,000
М2	0,849	1,699	-0,060	14,562	0,500
М3	5,882	71,429	-1,857	142,857	0,082

При этом, для того, чтобы использовать приведенное выше решение для изотропной пластины постоянная a_{12} заменялась на $-8,605 \cdot 10^{-4}$, т.е. на значение, незначительно отличающееся от табличного, в противном случае при решении задачи возникнет деление на ноль, т. к. корни характеристического уравнения (3) для изотропного материала будут двукратными и равными i и $-i$.

При проведении расчетов количество членов в рядах (12) и (13) и точек на контурах областей L_i , для которых составлялись линейные алгебраические уравнения (18), увеличивались до тех пор, пока граничные условия на контурах не удовлетворялись с достаточно высокой степенью точности (пока на контурах равные нулю значения нормальных напряжений σ_n не оказывались меньше 10^{-3}). Для такого удовлетворения граничным условиям, как показали численные исследования, в зависимости от геометрических и упругих характеристик пластины необходимо в указанных рядах оставлять от 50 до 100 членов, на каждом из контуров брать от 200 до 500 «коллокационных точек».

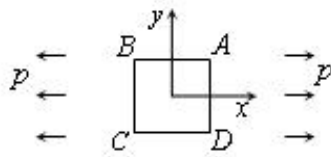


Рис. 3

Рассмотрим частные задачи. Пусть бесконечная пластина имеет квадратное отверстие со сторонами $2a$ (рис. 3) и растягивается усилиями интенсивности p вдоль оси Ox . Начало системы координат Oxy находится в центре квадрата, его стороны параллельны осям координат.

В этом случае в приведенном решении следует принять

$$\mathcal{L} = 4; \quad g = 1; \quad A(a, a); \quad B(-a, a); \quad C(-a, -a); \quad D(a, -a);$$

$$a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = a; \quad a'_i = \delta_i; \quad |O'A'_i| = \sqrt{2} \delta_i;$$

$$x'_{01} = a - \delta_1; \quad y'_{01} = a - \delta_1. \quad x'_{02} = -a + \delta_2; \quad y'_{02} = a - \delta_2;$$

$$x'_{03} = -a + \delta_3; \quad y'_{03} = -a + \delta_3; \quad x'_{04} = a - \delta_4; \quad y'_{04} = -a + \delta_4.$$

При проведении расчетов вместо равных нулю b_i принято, что $b_i/a_i = 10^{-7}$.

В табл. 2 для изотропной пластины с квадратным отверстием приведены значения нормальных напряжений σ_θ по контуру на площадках, перпендикулярных ему (σ_y – для вертикальных сторон квадрата, σ_x – для горизонтальных сторон) в точках с указанными координатами с точностью до приложенных усилий p .

Таблица 2

θ°	Координаты точек	Без закругления в углах	С закруглением в углах при		
			$\delta = 0,05$	$\delta = 0,01$	$\delta = 0,005$
0	1,0001; 0,0000	-0,9015	-0,8914	-0,8983	-0,8994
15	1,0001; 0,5000	-0,8664	-0,8506	-0,8628	-0,8645
30	1,0001; 0,8660	-0,6535	-0,5474	-0,6335	-0,6438
35	1,0000; 0,9397	-0,3949	0,0649	-0,3313	-0,3658
38	1,0000; 0,9703	-0,0458	–	0,1546	0,0458
38,5	1,0000; 0,9744	0,0417	–	0,3024	0,1615
40	1,0000; 0,9848	0,4385	–	1,0952	0,7052
41	1,0000; 0,9903	0,8540	–	3,1976	1,6792
42	1,0000; 0,9945	1,5822	–	–	3,8672
43	1,0000; 0,9976	2,9941	–	–	–
44	1,0000; 0,9994	7,3538	–	–	–
45	0,9854; 0,9854	–	4,6321	–	–
45	0,9971; 0,9971	–	–	9,6725	–
45	0,9985; 0,9985	–	–	–	13,2186
46	0,9994; 1,0000	12,2405	–	–	–
47	0,9976; 1,0000	7,1960	–	–	–
50	0,9848; 1,0000	3,9680	–	4,8002	4,2746
55	0,9397; 1,0000	2,7183	3,4831	2,7896	2,7507
60	0,8660; 1,0001	2,2497	2,3956	2,2717	2,2610
75	0,5000; 1,0001	1,7645	1,7835	1,7683	1,7669
90	0,0000; 1,0001	1,6650	1,6764	1,6680	1,6672

Рассмотрены случаи квадрата с прямыми углами (столбцы с пометкой «без закруглений в угловых точках»), а также квадрата с закругленными углами в вершинах с малыми радиусами закруглений δ . Координаты точек и значения δ отнесены к значению длины полу-стороны квадрата a . На каждой из сторон квадрата выбиралось от 150 до 200 «коллокационных» точек. Для дальнейшего сравнения в табл. 2 приведены значения угла θ (в градусах), используемого в работах Г.Н.Савина при конформном отображении

$$z = \omega(\zeta) = \frac{3}{5}a \left(\zeta - \frac{1}{6\zeta^3} + \frac{1}{56\zeta^7} - \frac{1}{176\zeta^{11}} \right). \quad (20)$$

В силу имеющейся симметрии значения напряжений приведены для углов от 0° до 90° , от точки E до точки F . На рис. 4 (штриховой линией) показаны графики распределения этих напряжений, причем точки E , A и F соответствуют значениям θ , равным 0° , 45° и 90° .

В табл. 3 для сравнения приведены значения указанных напряжений, полученные Г.Н.Савиным, А.С.Космодамианским и дискретным методом наименьших квадратов (ДМНК). Столбцы 4.2, 4.3, 4.4 – это данные Г. Н. Савина [9], когда в конформном отображении (20) оставляется, соответственно, два, три и четыре слагаемых, столбец Кос. – данные А. С. Космодамианского, также приведенные в работе [9]. Координаты точек вычислены по формуле (20) с учетом того, что $\zeta = e^{i\theta}$. Заметим, что А. С. Космодамианский использовал конформное отображение

$$z = \omega(\zeta) = a \left[\zeta - (1/9\zeta^3) \right].$$

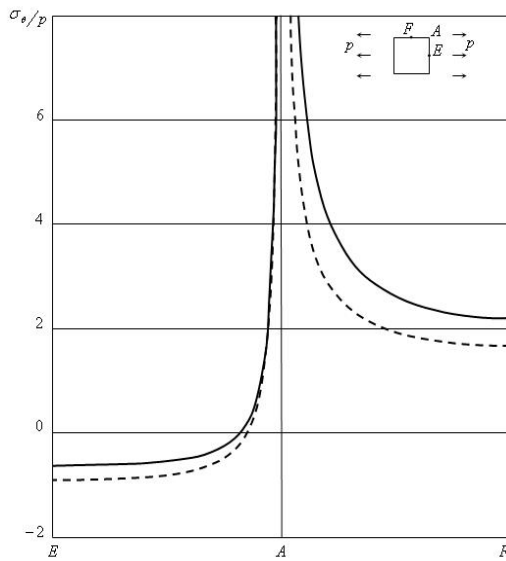


Рис. 4

Из данных табл. 2 и рис. 4 следует, что при приближении к вершинам квадрата значения напряжений σ_θ бесконечно растут, стремясь к $+\infty$. Значения напряжений и их рост вдоль горизонтальных сторон выше, чем вдоль вертикальных сторон. Сравнивая данные табл. 3 с соответствующими результатами из табл. 2 (для сходных углов θ), видим, что с результатами ОМНК (данные табл. 2) сравнительно хорошо согласуются данные, полученные Г.Н.Савиным методами конформных отображений и интегралов типа Коши, причем последние тем ближе к результатам ОМНК, чем больше остается слагаемых в отображающей функции (20), т. е. чем точнее функция отображает внешность единичного круга на внешность заданного отверстия (квадрата).

К данным Г. Н. Савина более близкими оказываются результаты данной статьи в случае использования закруглений в угловых точках, хотя понятно, что эти закругления искажают заданные контуры. При использовании метода рядов [9] получаемые результаты довольно далеки от истинных. Применение ДМНК приводит к результатам, достаточно близким к данным ОМНК.

Таблица 3

θ°	4.2, точки	σ_θ	4.3, точки	σ_θ	4.4, точки	σ_θ	Кос. точки	σ_θ	ДМНК
0	1,000; 0,000	-0,808	1,000; 0,000	-0,936	1,000; 0,000	-0,871	1,000; 0,000	-0,85	-0,920
15	—	—	—	—	1,004; 0,427	-0,901	0,998; 0,380	-0,82	-0,904
30	—	—	—	—	1,000; 0,796	-0,702	0,974; 0,688	-0,40	-0,708
35	1,035; 0,882	-0,268	1,004; 0,882	-0,544	—	—	—	—	-0,385
40	1,019; 0,945	0,980	1,002; 0,945	0,605	1,007; 0,958	0,265	0,924; 0,831	0,97	0,459
45	0,990; 0,990	3,000	0,984; 0,984	4,368	0,995; 0,995	5,763	0,884; 0,884	2,00	—
50	0,945; 1,019	3,860	0,945; 1,002	4,460	0,958; 1,007	4,230	0,831; 0,924	2,69	3,911
55	0,882; 1,035	3,366	0,882; 1,004	2,888	—	—	—	—	2,754
60	—	—	—	—	0,796; 1,000	1,932	0,688; 0,974	2,69	2,238
75	—	—	—	—	0,427; 1,004	1,802	0,380; 0,998	2,05	1,731
90	0,000; 1,000	1,472	0,000; 1,000	1,760	0,000; 1,000	1,616	0,000; 1,000	1,85	1,620

В табл. 4 и на рис. 4 (сплошные линии) приведены значения напряжений, аналогичные данным табл. 2 и рис. 3, для анизотропной пластины из авиационной фанеры. Здесь же приведены значения напряжений, полученные ДМНК и методом рядов [7], когда отображающая функция принята в виде

$$z = 1,2 \left(\zeta - \frac{1}{6\zeta^3} + \frac{0,00846}{\zeta^7} \right).$$

Из данных табл. 4 и рис. 4 (сплошные линии) видно, что закономерности распределения напряжений около квадратного отверстия в анизотропной пластине такие же, как в изотропной. Отличия значений напряжений, полученных методом рядов [7], от истинных и в этом случае достаточно далеки; ДМНК приводит к достаточно верным результатам, но его труднее реализовать, чем ОМНК.

Таблица 4

θ°	Координаты точек	Без закругления в углах	С закруглением при		ДМНК	Координаты точек	По [7]
			$\delta = 0,01$	$\delta = 0,005$			
0	1,0001; 0,0000	-0,6232	-0,6231	-0,6249	-0,6243	1,010; 0,000	-0,58
15	1,0001; 0,5000	-0,5952	-0,5924	-0,5951	-0,5916	–	–
30	1,0001; 0,8660	-0,4055	-0,3867	-0,4005	-0,4004	–	–
35	1,0000; 0,9397	-0,1670	-0,1077	-0,1505	-0,1690	1,030; 0,891	-0,20
36,5	1,0000; 0,9563	-0,0341	0,0651	-0,0045	-0,0311	–	–
37	1,0000; 0,9613	0,0246	0,1428	0,0588	0,0251	–	–
40	1,0000; 0,9848	0,6181	1,2545	0,7780	0,6048	1,021; 0,955	0,80
41	1,0000; 0,9903	1,0150	3,5097	1,2190	1,0260	–	–
42	1,0000; 0,9945	1,7123	–	4,0092	1,7470	–	–
43	1,0000; 0,9976	3,0886	–	–	3,2140	–	–
44	1,0000; 0,9994	7,5492	–	–	8,8790	–	–
44,5	1,0000; 0,9998	18,4858	–	–	34,1100	–	–
45	–	–	–	–	–	0,997; 0,997	1,38
45	0,9971; 0,9971	–	4,1769	–	–	–	–
45	0,9985; 0,9985	–	–	5,7143	–	–	–
45,5	0,9998; 1,0000	42,4061	–	–	86,1500	–	–
46	0,9994; 1,0000	19,9967	–	–	25,1900	–	–
47	0,9976; 1,0000	11,1722	–	–	11,9000	–	–
48	0,9945; 1,0000	8,3251	–	13,2809	8,6180	–	–
49	0,9903; 1,0000	6,8217	14,4623	7,8513	6,9800	–	–
50	0,9848; 1,0000	5,9074	7,3985	6,3517	5,9670	0,955; 1,021	3,44
53	0,9613; 1,0000	4,4291	4,6751	4,5043	4,4620	–	–
53,5	0,9563; 1,0000	4,2722	4,4751	4,3344	4,3120	–	–
55	0,9397; 1,0000	3,8951	4,0129	3,9275	3,9270	0,891; 1,030	5,43
60	0,8660; 1,0001	3,1398	3,1734	3,1461	3,1540	0,805; 1,030;	3,56
75	0,5000; 1,0001	2,3541	2,3581	2,3524	2,3550	–	–
90	0,0000; 1,0001	2,1951	2,1951	2,1912	2,1920	0,000; 1,010	2,00

Заметим, что численные исследования были проведены и для материалов, указанных в работе [10], где при построении функций использованы отображения внешности единичного круга на внешности прямоугольников, а при удовлетворении граничным условиям – метод граничной коллокации. Результаты работы [10] оказались значительно отличными от полученных авторами данной статьи.

3. Решение задачи в случае изгиба плиты с отверстиями.

Пусть пластина под действием моментов и поперечных усилий находится в условиях поперечного изгиба, причем в случае бесконечной пластины на бесконечности заданы моменты M_x^∞ , M_y^∞ , H_{xy}^∞ . Для упрощения задачи исследования примем, что на

контурах пластины действуют внешние усилия или на них заданы перемещения, причем в случае заданных усилий их главный вектор и главный момент на каждом из контуров равен нулю.

Если для решения задачи использовать комплексные потенциалы теории изгиба тонких анизотропных плит, то рассматриваемая задача сводится к определению функций обобщенных комплексных переменных $W'_k(z_k)$ из граничных условий [1, 8]

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 g_{kl} W'_k(z_k) = f_{li}(t) \quad (i = \overline{1, 2}). \quad (21)$$

При этом для неподкрепленного контура имеем такие равенства:

$$g_{kl1} = p_k / \mu_k; \quad g_{kl2} = q_k; \quad f_{l1} = -\int_0^s m_l dy + c_l dx + c_{l1}; \quad f_{l2} = -\int_0^s m_l dx - c_l dy + c_{2l}; \quad (22)$$

$$p_k = D_{11} + 2D_{16}\mu_k + D_{12}\mu_k^2; \quad q_k = D_{12} + 2D_{26}\mu_k + D_{22}\mu_k^2; \quad (23)$$

$D_{ij} = b_{ij} D_0$ – жесткости материала плиты, в которых

$$b_{11} = (a_{22}a_{66} - a_{26}^2) / \Delta; \quad b_{12} = (a_{16}a_{26} - a_{12}a_{66}) / \Delta; \quad b_{16} = (a_{12}a_{26} - a_{16}a_{22}) / \Delta;$$

$$b_{22} = (a_{11}a_{66} - a_{16}^2) / \Delta; \quad b_{26} = (a_{12}a_{16} - a_{26}a_{11}) / \Delta; \quad b_{66} = (a_{11}a_{22} - a_{12}^2) / \Delta;$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{16} \\ a_{12} & a_{22} & a_{26} \\ a_{16} & a_{26} & a_{66} \end{vmatrix};$$

a_{ij} – коэффициенты деформаций материала плиты; $D_0 = 2h^3/3$; h – полутолщина плиты; c_l – вещественные, c_{il} – комплексные постоянные. Если контур жестко подкреплен, то

$$g_{kl1} = 1; \quad g_{kl2} = \mu_k; \quad f_{l1} = c_{l1}; \quad f_{l2} = c_{2l}. \quad (24)$$

В случае жесткого защемления контура в условиях (5) следует принять $c_{il} = 0$.

Функции $W'_k(z_k)$ являются голоморфными в многосвязных областях S_k , получаемых из заданной области S аффинными преобразованиями (2), где μ_k – корни характеристического уравнения

$$D_{22}\mu^4 + 4D_{26}\mu^3 + 2(D_{12} + 2D_{66})\mu^2 + 4D_{16}\mu + D_{11} = 0, \quad (25)$$

и ограниченных контурами L_{kl} , соответствующими контурам L_l при аффинных преобразованиях (2).

Таким же образом, как в случае плоской задачи, для функций получаем представление

$$W'_k(z_k) = g\Gamma_k z_k + \sum_{l=g}^L \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{kln} a_{kln}, \quad (26)$$

в которых $g = 0$ – для случая конечной плиты; $g = 1$, если плита бесконечна; Γ_k – постоянные, определяемые из системы уравнений [1]

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 \Gamma_k = C_{11}M_x^{\infty} + C_{21}M_y^{\infty} + C_{31}H_{xy}^{\infty}; \quad 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 \mu_k \Gamma_k = C_{12}M_x^{\infty} + C_{22}M_y^{\infty} + C_{32}H_{xy}^{\infty};$$

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 \mu_k^2 \Gamma_k = C_{13} M_x^\infty + C_{23} M_y^\infty + C_{33} H_{xy}^\infty; \quad 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 \frac{1}{\mu_k} \Gamma_k = 0;$$

$$C_{11} = (2D_{22}D_{66} - 2D_{26}^2)/\Delta; \quad C_{21} = (2D_{16}D_{26} - 2D_{12}D_{66})/\Delta; \quad C_{31} = (2D_{12}D_{26} - 2D_{12}D_{22})/\Delta;$$

$$C_{12} = (D_{12}D_{26} - D_{16}D_{22})/\Delta; \quad C_{22} = (D_{12}D_{16} - D_{11}D_{26})/\Delta; \quad C_{32} = (D_{11}D_{22} - D_{12}^2)/\Delta; \quad (27)$$

$$C_{13} = (2D_{16}D_{26} - 2D_{12}D_{66})/\Delta; \quad C_{23} = (2D_{11}D_{66} - 2D_{16}^2)/\Delta; \quad C_{33} = (2D_{12}D_{16} - 2D_{11}D_{26})/\Delta;$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} D_{11} & 2D_{16} & D_{12} \\ D_{12} & 2D_{26} & D_{22} \\ D_{16} & 2D_{66} & D_{26} \end{vmatrix};$$

φ_{kl_n} – функции, вычисляемые по формулам (16); a_{kl_n} – неизвестные постоянные, определяемые из граничных условий на контурах, удовлетворяя которым обобщенным методом наименьших квадратов, опять приходим к переопределенной системе линейных алгебраических уравнений (18), причем из однозначности прогиба в систему должны входить и уравнения однозначности прогиба [1] для каждого контура отверстия, т.е.

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 ia_{kl} R_{kl} = 0 \quad (l = \overline{1, \mathcal{L}}). \quad (28)$$

После определения псевдорешений дополненной системы уравнений с использованием сингулярных разложений постоянные a_{kl_n} , а следовательно и функции $W'_k(z_k)$, будут известны и по ним можно вычислять изгибающие моменты в любой точке плиты [1]

$$(M_x, M_y, H_{xy}) = -2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 (p_k, q_k, r_k) W_k''(z_k) \quad (r_k = D_{16} + 2D_{66}\mu_k + D_{26}\mu_k^2). \quad (29)$$

Рассмотрим решения частных задач. Пусть бесконечная плита имеет квадратное отверстие со сторонами длины $2a$, параллельными осям координат. Контур отверстия свободен от усилий.

Рассмотрим случаи, когда на бесконечности плита находится под действием моментов $M_x^\infty = m$, $M_y^\infty = H_{xy}^\infty = 0$ и всестороннего изгиба на бесконечности, когда $M_x^\infty = M_y^\infty = m$, $H_{xy}^\infty = 0$. Стороны квадрата представим внешними берегами разрезов L_1, L_2, L_3, L_4 вдоль сторон, т.е. с концами A и B , B и C , C и D , D и A , соответственно. В этом случае имеем

$$\mathcal{L} = 4; \quad g = 1; \quad A(a, a); \quad B(-a, a); \quad C(-a, -a); \quad D(a, -a);$$

$$a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = a; \quad a'_l = \delta_l; \quad |O'_l A_l| = \sqrt{2} \delta_l;$$

$$x'_{01} = a - \delta_1; \quad y'_{01} = a - \delta_1; \quad x'_{02} = -a + \delta_2; \quad y'_{02} = a - \delta_2;$$

$$x'_{03} = -a + \delta_3; \quad y'_{03} = -a + \delta_3; \quad x'_{04} = a - \delta_4; \quad y'_{04} = -a + \delta_4.$$

При проведении расчетов вместо равных нулю b_l принято: $b_l/a_l = 10^{-7}$. Γ_k определяются на основе (15) из системы уравнений

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 \Gamma_k = (C_{11} + eC_{21})m; \quad 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 \mu_k \Gamma_k = (C_{12} + eC_{22})m;$$

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 \mu_k^2 \Gamma_k = (C_{13} + eC_{23})m; \quad 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 \frac{1}{\mu_k} \Gamma_k = 0, \quad (30)$$

в которой $e = 0$ – для случая действия моментов $M_x^\infty = m$, $M_y^\infty = H_{xy}^\infty = 0$, $e = 1$, если действуют моменты $M_x^\infty = M_y^\infty = m$, $H_{xy}^\infty = 0$;

$$g_{kl1} = p_k / \mu_k; \quad g_{kl2} = q_k; \quad \frac{df_{l1}}{ds} = -c_l \frac{dx}{ds}; \quad \frac{df_{l2}}{ds} = c_l \frac{dy}{ds}. \quad (31)$$

В табл. 5 для одностороннего изгиба плиты из изотропного материала и березовой фанеры (материал М3) с квадратным отверстием моментами $M_x^\infty = m$ приведены значения изгибающих моментов M_θ по контуру отверстия на площадках, перпендикулярных ему (M_y – для вертикальных сторон, M_x – для горизонтальных сторон) в точках с указанными координатами с точностью до приложенных моментов m . Рассмотрены случаи квадрата с прямыми углами (без закруглений), а также квадрат с закругленными углами вблизи вершин с малыми радиусами закруглений δ . Координаты точек и значения δ отнесены к значению длины полустороны квадрата, $a = 0,888888889$. Материал плиты и длина полустороны квадрата a приняты такими с целью сравнения результатов с данными работы [6].

Таблица 5

θ°	Координаты точек	Без закругления в углах	Закругление при		Без закругления в углах	Закругление при	
			$\delta = 0,01$	$\delta = 0,005$		$\delta = 0,01$	$\delta = 0,005$
		Материал М1			Материал М3		
0	0,8890; 0,0000	0,2681	0,2800	0,2785	0,1634	0,1565	0,1593
15	0,8890; 0,4444	0,2638	0,2782	0,2755	0,1614	0,1957	0,1552
30	0,8889; 0,7698	0,2328	0,2728	0,2653	0,1402	0,2270	0,1194
35	0,8889; 0,8353	0,1946	0,2797	0,2638	0,1105	0,2114	0,0639
40	0,8889; 0,8754	0,0620	0,5909	0,3721	0,0074	-0,1216	-0,3260
40,5	0,8889; 0,8779	0,0303	1,0872	0,4311	-0,0179	-0,4912	-0,3681
41	0,8889; 0,8802	-0,0072	–	0,3531	-0,0449	–	-7,7480
42	0,8889; 0,8840	-0,1277	–	–	-0,1356	–	–
43	0,8889; 0,8867	-0,3706	–	–	-0,3045	–	–
44	0,8889; 0,8883	-1,1310	–	–	-0,8052	–	–
44,5	0,8889; 0,8888	-2,6447	–	–	-1,6053	–	–
45	0,8860; 0,8860	–	3,4265	–	–	1,6571	–
45	0,8874; 0,8874	–	–	4,1627	–	–	2,7260
45,5	0,8888; 0,8889	13,4559	–	–	20,1211	–	–
46	0,8883; 0,8889	8,4331	–	–	12,1708	–	–
47	0,8867; 0,8889	5,3456	–	–	7,5542	–	–
48	0,8840; 0,8889	4,1389	–	–	5,8329	–	–
49	0,8802; 0,8889	3,4643	–	3,1133	4,8346	–	6,0309
49,5	0,8779; 0,8889	3,2311	2,5578	2,8969	4,4960	10,2329	5,3544
50	0,8754; 0,8889	3,0335	2,7167	2,7683	4,2261	7,7371	4,8766
55	0,8353; 0,8889	2,0732	1,9981	1,9975	2,8332	3,8715	3,0044
60	0,7698; 0,8889	1,7225	1,6818	1,6823	2,3130	2,9634	2,3987
75	0,4444; 0,8890	1,3808	1,3653	1,3660	1,7763	2,0175	1,8063
90	0,0000; 0,8890	1,3174	1,3056	1,3069	1,6624	1,6938	1,6843

На рис. 5 приведены графики распределения этих моментов. Из данных табл. 5 и рис. 5 видно, что при приближении к вершинам квадрата значения моментов стремятся к бесконечности, вдоль горизонтальных сторон – к $+\infty$, вдоль вертикальных сторон – к $-\infty$, тогда как для растяжения пластины значения напряжений для всех этих случаев стремились к $+\infty$.

В табл. 6 для всестороннего изгиба анизотропной плиты из материала МЗ приведены значения моментов M_θ вблизи контура отверстия. Здесь же приведены данные, полученные для этого случая в работе [6], где отображающая функция принята в виде $\omega(z) = \zeta - (1/9\zeta^3)$.

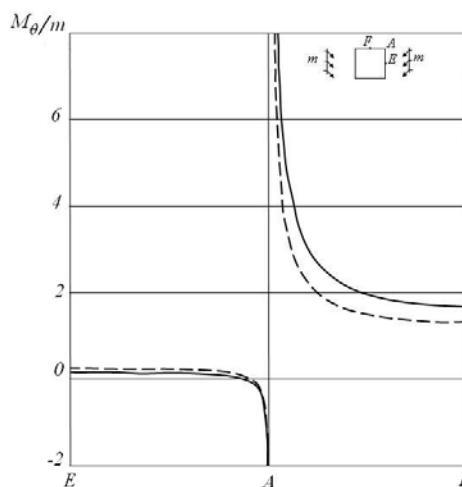


Рис. 5

Таблица 6

θ°	Точки	ОМНК	Точки	По [6]
0	0,8890; 0,0000	1,422	0,8889; 0,0000	1,47
15	0,8890; 0,4444	1,466	0,8874; 0,3374	1,52
30	0,8889; 0,7698	1,714	0,8660; 0,6111	1,72
45	0,9854; 0,9854	–	0,7857; 0,7857	1,25
60	0,7698; 0,8889	3,839	0,6111; 0,8660	3,13
75	0,4444; 0,8890	3,636	0,3374; 0,8874	3,85
90	0,0000; 0,8890	3,599	0,0000; 0,8889	3,67

На рис. 6 изображены графики распределения этих моментов. Сплошные линии соответствуют анизотропной плите, штриховые – к изотропной. Как и следовало ожидать, для изотропной плиты имеет место симметрия значений моментов вдоль сторон, причем при приближении к угловым точкам значения моментов стремятся к $+\infty$. Для анизотропного материала симметрия не наблюдается; при приближении к вершинам квадрата моменты стремятся к $+\infty$, если это приближение происходит вдоль горизонтальных сторон, перпендикулярных направлению с наибольшей жесткостью волокон ($a_{11} \ll a_{22}$ или $E_1 \gg E_2$); если же это приближение происходит вдоль сторон, перпендикулярных к мягким волокнам, то моменты стремятся к $-\infty$. Результаты, полученные методом рядов, весьма далеки от истинных.

Заключение.

Таким образом, предложен новый, сравнительно простой метод определения напряженного состояния пластины с криволинейными отверстиями, находящейся в условиях обобщенного плоского напряженного состояния или изгиба. Численными исследованиями показана высокая точность получаемых результатов. Числовые результаты представлены для пластины с квадратным отверстием и дан их анализ.

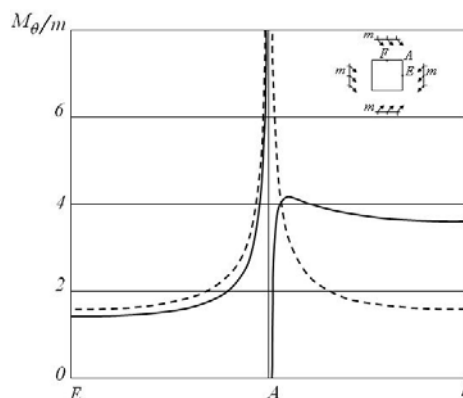


Рис. 6

РЕЗЮМЕ. Запропоновано новий наближений метод визначення напруженого стану пластин з криволінійним отвором, що полягає в апроксимації контурів отворів дугами еліпсів, використанні конформних відображень, узагальненого методу найменших квадратів. Чисельно встановлено високу міру точності отриманих результатів. Числові результати представлені для пластини з квадратним отвором та дано їх аналіз.

1. Калоеров С.А. Комплексные потенциалы теории изгиба многосвязных анизотропных плит // Теорет. и прикл. механика. – 2012. – № 4 (50). – С. 115 – 136.
2. Калоеров С.А., Авдюшина Е.В., Мироненко А.Б. Концентрация напряжений в многосвязных изотропных пластинках. – Донецк: Изд-во ДонНУ, 2013. – 440 с.
3. Калоеров С.А., Горянская Е.С. Двумерное напряженно-деформированное состояние многосвязного анизотропного тела // Концентрация напряжений. – К.: А.С.К., 1998. – С. 10 – 26. (Механика композитов: В 12 т., т.7).
4. Космодамианский А.С. Напряженное состояние анизотропных сред с отверстиями или полостями. – К., Донецк: Вища шк., 1976. – 200 с.
5. Космодамианский А.С. Плоская задача теории упругости для пластин с отверстиями, вырезами и выступами. – К.: Вища шк., 1975. – 227 с.
6. Космодамианский А.С., Митраков В.А. Изгиб конечной анизотропной пластинки с криволинейным отверстием // Прикл. механика. – 1976. – 12, № 12. – С. 96 – 99.
7. Космодамианский А.С., Нескородев Н.М. Напряженное состояние анизотропной пластинки, ослабленной двумя криволинейными отверстиями // Изв АН АрмССР Механика. – 1970. – 23, № 5. – С. 59 – 66.
8. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела. – М.: Наука, 1977. – 416 с.
9. Савин Г.Н. Распределение напряжений около отверстий. – К.: Наук. думка, 1968. – 887 с.
10. Chauhan M.M., Sharma D.S. Stresses in finite anisotropic plate weakened by rectangular hole // Int. J. Mech. Sci. – 2015. – 101 – 102. – P. 272 – 279.
11. Forsythe G.E., Malcolm M.A., Moler C.B. Computer Methods for Mathematical Computations. – Prentice Hall, 1977. – 270 p.
12. Pan Z., Cheng Y., Liu J. Stress analysis of a finite plate with a rectangular hole subjected to uniaxial tension using modified stress functions // Int. J. Mech. Sci. – 2013. – 75. – P. 265 – 277.
13. Rao D.K.N., Babu M.R., Reddy K.R.N., Sunil D. Stress around square and rectangular cutouts in symmetric laminates // Compos. Struct. – 2010. – 92, N 12. – P. 2845 – 2859.
14. Rezaeepazhand J., M. Jafari M. Stress concentration in metallic plates with special shaped cutout // Int. J. Mech. Sci. – 2010. – 52, N 1. – P. 96 – 102.
15. Sharma D.S. Bending of composite plate weakened by square hole // Int. J. Mech. Sci. – 2015. – 94 – 95. – P. 131 – 139.
16. Sharma D.S. Moment distribution around polygonal holes in infinite plate // Int. J. Mech. Sci. – 2014. – 78. – P. 177 – 182.
17. Sharma D.S. Stresses around polygonal hole in an infinite laminated composite plate // Eur. J. Mech. A/Solids. – 2015. – 54. – P. 44 – 52.
18. Sharma D.S. Stress around square and rectangular cutouts in symmetric laminates // Int. J. Mech. Sci. – 2012. – 65, N 1. – P. 115 – 124.
19. Yang Y., Liu J., Cai C. Analytical solutions to stress concentration problem in plates containing rectangular hole under biaxial tensions // Acta Mech. Solida Sin. – 2008. – 21, N 5. – P. 411 – 419.

Поступила 20.07.2015

Утверждена в печать 29.11.2016