

И. Ю. Хома¹, Т. М. Прошенко²

**РАСТЯЖЕНИЕ И СДВИГ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНОЙ
ПЬЕЗОКЕРАМИЧЕСКОЙ ПЛАСТИНЫ С КРУГОВЫМ ОТВЕРСТИЕМ
ПРИ СМЕШАННЫХ УСЛОВИЯХ НА ПЛОСКИХ ГРЯНЯХ**

¹ *Институт механики им. С.П.Тимошенко НАНУ,
ул. Нестерова, 3, 03057, Киев, Украина; e-mail: reolog@inmech.kiev.ua*

² *Киевский национальный университет им. Т.Г.Шевченко,
просп. акад. Глушкова, 4г, 03127, Киев, Украина; e-mail: t.proshchenko@gmail.com*

Abstract. A problem on the stress state of infinite transversely isotropic piezoceramic plate with circular hole is solved for the mixed boundary conditions on plane sides. The plate is loaded at infinity by the tension and shear. The method of expanding of unknown functions into Fourier series by Legendre polynomials is used. The plate stress state in a neighborhood of the hole is analyzed.

Key words: transversely isotropic plate, stress state, circular hole.

Введение.

Для построения двумерных уравнений равновесия упругих и пьезоупругих оболочек и пластин развиты различные подходы и методы. Известны: метод гипотез [18], асимптотический [7, 8], разложения по толщине с привлечением ортогональной системы базовых функций [1, 5, 10, 11, 15 – 17]. Для расчета слоистых пьезоупругих пластин при неоднородных граничных условиях использован энергетический подход [6, 19]. В [12] приведено решение задачи для слоистой пластины, составленной из упругого заполнителя с пьезоэлектрическими обкладками при действии статической термоэлектрической нагрузки. Для исследования концентрации напряжений около кругового и эллиптического отверстий в [9, 20, 21] применен численный метод конечноэлементной дискретизации области пластины. В работе [4] методом разложения искоемых функций в ряды Фурье по полиномам Лежандра получены уравнения равновесия анизотропных термопьезоэлектрических оболочек и соответствующие им граничные условия. На этой основе в [14] решена задача о напряженном состоянии трансверсально-изотропной пьезокерамической пластины, ослабленной круговым отверстием. В данной работе, используя способ [4, 14,] рассмотрена задача о распределении механических напряжений около кругового отверстия в неограниченной трансверсально-изотропной пьезокерамической пластине при скользящей заделке плоских граней при заданных вдали усилиях.

§1. Постановка задачи. Основные уравнения.

Предположим, что пьезоупругая пластина толщиной $2h$ ($h = \text{const}$), занимающая область $\Omega = S \times [-h, h]$ трехмерного пространства R^3 , отнесена к декартовой системе координат x_i ($i = 1, 2, 3$), причем x_1, x_2 принадлежат срединной плоскости S , а $x_3 \in [-h, h]$. Граничные плоскости $x_3 = h$ и $x_3 = -h$ не электродированы и скользяще закреплены, т.е. при $x_3 = \pm h$ имеют место граничные условия

$$D_3(x_1, x_2, \pm h) = 0; \quad u_3(x_1, x_2, \pm h) = 0; \quad \sigma_{3\alpha}(x_1, x_2, \pm h) = 0 \quad (\alpha = 1, 2). \quad (1.1)$$

Пластина, ослабленная круговой цилиндрической полостью, находится под действием приложенных вдали постоянных растягивающих и сдвигающих усилий.

Для решения задачи используем метод разложения по толщине [13, 14], представим, следуя [2, 4], компоненты механических перемещений $u_j(x_1, x_2, x_3)$ и напряжений $\sigma_{ij}(x_1, x_2, x_3)$, электрической индукции $D_j(x_1, x_2, x_3)$ и диэлектрический потенциал $\phi(x_1, x_2, x_3)$ в виде конечного ряда Фурье по полиномам Лежандра $P_k(\zeta)$ координаты толщины. Тогда имеем равенства

$$\begin{aligned} \{u_\alpha(x, x_3), \sigma_{\alpha\beta}(x, x_3)\} &= \sum_{k=0}^n \{u_\alpha^{(2k)}(x), \sigma_{\alpha\beta}^{(2k)}(x)\} P_{2k}(\zeta); \\ u_3(x, x_3) &= \sum_{k=1}^n u_3^{(2k-1)}(x) [P_{2k-1}(\zeta) - P_{2k+1}(\zeta)]; \end{aligned} \quad (1.2)$$

$$\{\sigma_{\alpha 3}(x, x_3), D_\alpha(x, x_3), \phi(x, x_3)\} = \sum_{k=1}^n \{\sigma_{\alpha 3}^{(2k-1)}(x), D_\alpha^{(2k-1)}(x), \phi^{(2k-1)}(x)\} P_{2k-1}(\zeta);$$

$$\{D_3(x, x_3), \sigma_{33}(x, x_3)\} = \sum_{k=0}^n \{D_3^{(2k)}(x), \sigma_{33}^{(2k)}(x)\} P_{2k}(\zeta),$$

где $x = (x_1, x_2) \in S$, $\zeta = h^{-1}x_3 \in [-1, 1]$, $u_j^{(k)}(x)$, $\sigma_{ij}^{(k)}(x)$ и $D_j^{(k)}(x)$, $\phi^{(k)}(x)$ – коэффициенты разложений, именуемые ниже моментами (номер момента соответствует порядку полинома Лежандра).

Относительно коэффициентов разложений (как функций двух независимых переменных) получим систему уравнений [13, 14]

$$\begin{aligned} \partial_\alpha \sigma_{\alpha\beta}^{(2k)} - (4k+1)h^{-1} \sum_{s=1}^k \sigma_{\beta 3}^{(2s-1)} + X_\beta^{(2k)} &= 0 \quad (\beta = 1, 2; k = \overline{0, n}); \\ \partial_\alpha \sigma_{\alpha 3}^{(2k-1)} - (4k-1)h^{-1} \sum_{s=0}^{k-1} \sigma_{33}^{(2s)} + X_3^{(2k-1)} &= 0 \quad (k = \overline{1, n}); \\ \partial_\alpha D_\alpha^{(2k-1)} - (4k-1)h^{-1} \sum_{s=0}^{k-1} D_{33}^{(2s)} + F_3^{(2k-1)} &= 0 \quad (k = \overline{1, n}), \end{aligned} \quad (1.3)$$

где $\partial_\alpha = \partial/\partial x_\alpha$ ($\alpha = 1, 2$); $X_\beta^{(2k)} = (2k+1/2)h^{-1} [\sigma_{3\beta}^+ - \sigma_{3\beta}^-]$ ($\beta = 1, 2; k = \overline{0, n}$);

$$X_3^{(2k-1)} = (2k-1/2)h^{-1} [\sigma_{3\beta}^+ + \sigma_{3\beta}^-]; \quad F_3^{(2k-1)} = (2k-1/2)h^{-1} [D_3^+ + D_3^-] \quad (k = \overline{1, n}).$$

Здесь σ_{3j}^+ , σ_{3j}^- ($j = \beta, 3$) и D_3^+ , D_3^- – значения напряжений и электрической индукции, соответственно, на граничных плоскостях $x_3 = h$ и $x_3 = -h$. Согласно условиям (1.1) следует, что $X_\beta^{(2k)} = 0$, $F_3^{(2k-1)} = 0$.

Выражение для нормальных поперечных напряжений σ_{33} получаем из общих определяющих соотношений [3]

$$\sigma_{ij} = c_{ijlm} \partial_l u_m + e_{ij} \partial_l \phi; \quad D_i = e_{ilm} \partial_l u_m - \varepsilon_{il} \partial_l \phi,$$

в которых c_{ijlm} – модули упругости; e_{ilm} – пьезомодули; ε_{ij} – диэлектрические постоянные. Для трансверсально-изотропного тела с учетом разложения (1.2) получим напряжение

$$\sigma_{33} = \sum_{k=1}^n \left[c_{13} \theta^{(2k)} + (4k+1)h^{-1}(-c_{33}u_3^{(2k-1)} + e_{33}\phi'^{(2k-1)}) \right] P_{2k}(\zeta). \quad (1.4)$$

Полагая в (1.4) $\zeta = 1$ и $\zeta = -1$ и складывая полученные выражения, имеем

$$\sigma_{33}^+ + \sigma_{33}^- = 2 \sum_{k=0}^n \left[c_{13} \theta^{(2k)} + (4k+1)h^{-1}(-c_{33}u_3^{(2k-1)} + e_{33}\phi'^{(2k-1)}) \right] \quad (1.5)$$

$$\left(\theta^{(2k)} = \partial_1 u_1^{(2k)} + \partial_2 u_2^{(2k)}; \phi'^{(2k-1)} = \sum_{s=k+1}^n \phi^{(2s-1)} \right).$$

Аналогичным способом определяем выражения вида (1.4) для остальных компонент тензора напряжений σ_{ij} и для электрической индукции D_j . Умножая их на полиномы Лежандра и интегрируя по толщине пластины, получим такие соотношения:

$$\sigma_{11}^{(2k)} = c_{11}\varepsilon_{11}^{(2k)} + c_{12}\varepsilon_{22}^{(2k)} + (4k+1)h^{-1}(-c_{13}u_3^{(2k-1)} + e_{31}\phi'^{(2k-1)});$$

$$\sigma_{22}^{(2k)} = c_{12}\varepsilon_{11}^{(2k)} + c_{11}\varepsilon_{22}^{(2k)} + (4k+1)h^{-1}(-c_{13}u_3^{(2k-1)} + e_{31}\phi'^{(2k-1)});$$

$$\sigma_{12}^{(k)} = c_{66}(\varepsilon_{12}^{(2k)} + \varepsilon_{21}^{(2k)}) \quad (k = \overline{0, n}); \quad (1.6)$$

$$\sigma_{33}^{(2k)} = c_{13}\theta^{(2k)} + (4k+1)h^{-1}(-c_{33}u_3^{(2k-1)} + e_{33}\phi'^{(2k-1)});$$

$$\sigma_{\alpha 3}^{(2k-1)} = e_{15}\partial_\alpha \phi^{(2k-1)} + c_{44} \left[\partial_\alpha (u_3^{(2k-1)} - u_3^{(2k-3)}) + h^{-1}u'_\alpha{}^{(2k)} \right];$$

$$D_\alpha^{(2k-1)} = -\varepsilon_{11}\partial_\alpha \phi^{(2k-1)} + e_{15} \left[\partial_\alpha (u_3^{(2k-1)} - u_3^{(2k-3)}) + h^{-1}u'_\alpha{}^{(2k)} \right] \quad (k = \overline{1, n});$$

$$D_3^{(2k)} = e_{31}\theta^{(2k)} - (4k+1)h^{-1}(e_{33}u_3^{(2k-1)} + \varepsilon_{33}\phi'^{(2k-1)}),$$

где $\varepsilon_{\alpha\beta}^{(2k)} = \partial_\alpha u_\beta^{(2k)}$; $c_{11}, c_{12}, \dots, c_{16}$ – упругие постоянные; e_{15}, e_{31}, e_{33} – пьезомодули; $\varepsilon_{11}, \varepsilon_{13}$ – диэлектрические проницаемости;

$$u'_\alpha{}^{(2k)} = (4k-1) \sum_{s=k}^n u_\alpha^{(2s)}.$$

Подставляя (1.5), (1.6) в равенство (1.3), после некоторых преобразований получим в комплексной форме систему дифференциальных уравнений

$$c_{66}\Delta u_+^{(2k)} + 2(c_{12} + c_{66})\partial_{\bar{z}} e^{(2k)} - (4k+1)h^{-1} \left[2(c_{13} + c_{44})\partial_{\bar{z}} u_3^{(2k-1)} + \right. \quad (1.7)$$

$$\left. + 2 \sum_{s=1}^n \lambda_{2s-1}^{(k)} \partial_{\bar{z}} \phi^{(2s-1)} + c_{44} h^{-1} \sum_{s=1}^n \beta_{2s}^{(k)} u_+^{(2s)} \right] = 0 \quad (k = \overline{0, n});$$

$$c_{44}\Delta(u_3^{(2k-1)} - u_3^{(2k-3)}) + e_{15}\Delta\phi^{(2k-1)} - (4k-1)h^{-1} \left[-(c_{13} + c_{44}) \sum_{s=k}^n \theta^{(2s)} + \right. \quad (1.8)$$

$$\left. + c_{33}h^{-1} \sum_{s=k}^n (4s+1)u_3^{(2s-1)} + e_{33}h^{-1} \sum_{s=k}^n (s-k)(2s+2k-1)\phi^{(2s-1)} \right] = 0;$$

$$\begin{aligned} & \varepsilon_{11}\Delta\phi^{(2k-1)} - e_{15}\Delta(u_3^{(2k-1)} - u_3^{(2k-3)}) - (4k-1)h^{-1} \left[\sum_{s=0}^n \lambda_{2s}^{(2k)} \theta^{(2s)} - \right. \\ & \left. - c_{33}h^{-1} \sum_{s=1}^{k-1} (4s+1)u_3^{(2s-1)} + \varepsilon_{33}h^{-1} \sum_{s=1}^n \alpha_{2s-1}^{(k)} \phi^{(2s-1)} \right] = 0 \quad (k = \overline{1, n}), \end{aligned} \quad (1.9)$$

где $\Delta = 4\partial_z\partial_{\bar{z}}$ – оператор Лапласа; $2\partial_{\bar{z}} = \partial/\partial x_1 + i\partial/\partial x_2$;

$$\begin{aligned} & \theta^{(2k)} = \partial_z u_+^{(2k)} + \partial_{\bar{z}} \bar{u}_+^{(2k)}; \quad u_+^{(2k)} = u_1^{(2k)} + iu_2^{(2k)}; \\ & \lambda_{2s-1}^{(k)} = \begin{cases} e_{15}, & 1 \leq s \leq k; \\ -e_{31}, & k < s \leq n; \end{cases} \quad \lambda_{2s}^{(k)} = \begin{cases} -e_{31}, & 1 \leq s < k; \\ e_{15}, & k \leq s \leq n; \end{cases} \end{aligned} \quad (1.10)$$

$\alpha_{2s-1}^{(k)}, \beta_{2s}^{(k)}$ – абсолютные константы:

$$\alpha_{2s-1}^{(k)} = \begin{cases} s(2s-1), & 1 \leq s \leq k; \\ k(2k-1), & k \leq s \leq n; \end{cases} \quad \beta_{2s}^{(k)} = \begin{cases} s(2s+1), & 1 \leq s \leq k; \\ k(2k+1), & k \leq s \leq n. \end{cases}$$

§2. Представление общего решения.

Изложим способ представления общего решения системы уравнений (1.7) – (1.9). Применим к (1.7) операцию ∂_z и полученное равенство сложим с ему сопряженным. Учитывая при этом обозначение (1.10), будем иметь равенства

$$c_{11}\Delta\theta^{(0)} + e_{31}h^{-1} \sum_{s=1}^n \Delta\phi^{(2s-1)} = 0 \quad (k=0); \quad (2.1)$$

$$\begin{aligned} & c_{11}\Delta\theta^{(2k)} - (4k-1)h^{-1} \left[(c_{13} + c_{44})\Delta u_3^{(2k-1)} + \sum_{s=1}^n \lambda_{2s-1}^{(k)} \Delta\phi^{(2s-1)} + \right. \\ & \left. + c_{44}h^{-1} \sum_{s=1}^n \beta_{2s}^{(k)} \theta^{(2s)} \right] = 0 \quad (k = \overline{1, n}). \end{aligned} \quad (2.2)$$

Из равенств (2.1) следует формула

$$c_{66}\theta^{(0)} = -\frac{e_{31}c_{66}}{c_{11}h} \sum_{s=1}^n \phi^{(2s-1)} + \frac{\chi_1^* e_3}{1 + \chi_0} u, \quad (2.3)$$

где u – произвольная гармоническая функция; $\chi_1^* = \frac{2c_{66}}{c_{12} + c_{66}}$; $\chi_0 = \frac{e_{31}^2 \chi_i}{2\varepsilon_{33}c_{66}}$;

$e_3 = 1 + \frac{e_{31}^2}{\varepsilon_{33}c_{11}}$. Согласно (2.3) уравнение (1.9) примет вид

$$\begin{aligned} & \varepsilon_{11}\Delta\phi^{(2k-1)} - e_{15}\Delta(u_3^{(2k-1)} - u_3^{(2k-3)}) - (4k-1)h^{-1} \left[\sum_{s=1}^n \lambda_{2s}^{(k)} \theta^{(2s)} + \right. \\ & \left. + e_{33}h^{-1} \sum_{s=1}^{k-1} (4s+1)u_3^{(2s-1)} + \varepsilon_{33}h^{-1} \sum_{s=1}^n (\tilde{\alpha}_{2s-1}^{(k)} + e_3) \phi^{(2s-1)} \right] = -\frac{(4k-1)e_{31}}{c_{66}} \quad (k = \overline{1, n}). \end{aligned} \quad (2.4)$$

Равенства (2.2), (2.4) совместно с (1.8) образуют систему уравнений $3n$ -го порядка для определения неизвестных функций $u_3^{(2k-1)}, \phi^{(2k-1)}, \theta^{(2k)}$ ($k = \overline{1, n}$). Полагая

$$\begin{aligned}
c_{66}u_3^{(2k-1)} &= u_{3k-2}; \quad c_{66}h\theta^{(2k)} = u_{3k} \quad (k = \overline{1, n}); \\
\phi^{(1)} &= \tilde{\alpha}_1 hu + u_2; \quad \phi^{(2k-1)} = u_{3k-1} \quad (k = \overline{2, n}),
\end{aligned} \tag{2.5}$$

получим относительно функций u_k однородную систему, которую в стандартной форме запишем таким образом:

$$\sum_{k=1}^{3n} (a_{sk} - b_{sk}h^2\Delta)u_k = 0 \quad (s = \overline{1, 3n}), \tag{2.6}$$

где $\tilde{\alpha}_1 = (e_{31}\alpha_1)/[(1 + \alpha_0)\varepsilon_{33}c_{66}]$; a_{sk} , b_{sk} – безразмерные постоянные.

Замечание. Возможна другая форма представления разрешающей системы уравнений. Определим из системы (1.8) моменты деформаций

$$\begin{aligned}
\theta^{(2k)} &= \frac{h}{c^*} \left[\frac{1}{(4k+3)} \Delta \left(u_3^{(2k+1)} - u_3^{(2k-1)} + \frac{e_{15}}{c_{44}} \phi^{(2k+1)} \right) - \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{(4k-1)} \Delta \left(u_3^{(2k-1)} - u_3^{(2k-3)} + \frac{e_{15}}{c_{44}} \phi^{(2k-1)} \right) + \frac{(4k+1)}{c_{44}h^2} \left(c_{33}u_3^{(2k-1)} + e_{31}\phi^{(2k-1)} \right) \right] \\
&\quad (k = \overline{1, n-1});
\end{aligned}$$

$$\theta^{(2n)} = \frac{h}{c^*} \left[-\frac{1}{4n-1} \Delta \left(u_3^{(2n-1)} - u_3^{(2n-3)} + \frac{e_{15}}{c_{44}} \phi^{(2n-1)} \right) + \frac{(4n+1)e_{15}}{c_{44}h^2} \phi^{(2n-1)} \right]$$

и внесем их значения в уравнения (2.2), (2.4). В результате получим уравнения относительно моментов вектора перемещений $u_3^{(2k-1)}$ и диэлектрического потенциала $\phi^{(2k-1)}$.

Для построения общего решения системы уравнений (2.6) воспользуемся операторным методом. Введем функцию V согласно формулам

$$u_k = A_{pk}(\Delta)V \quad (k = \overline{1, 3n}), \tag{2.7}$$

где $A_{pk}(\Delta) = (-1)^{p+k} M_{pk}(\Delta)$; $M_{pk}(\Delta)$ – миноры; $A_{pk}(\Delta)$ – алгебраические дополнения элемента $L_{pk}(\Delta) = a_{pk} - b_{pk}h^2\Delta$ – операторной матрицы $\|L_{pk}(\Delta)\|_{3n \times 3n}$, и подставим (2.7)

в p -е равенство системы (2.6). Тогда будем иметь уравнение $\sum_{p=1}^{3n} L_{kp}(\Delta)A_{kp}(\Delta)V = 0$,

которое представляется таким образом:

$$\sum_{p=0}^{3n} a_p h^{2p} \Delta^p V = 0, \tag{2.8}$$

где a_p ($p = \overline{0, 3n}$) – постоянные, причем $a_0 \neq 0$. Раскрывая определители в (2.7), получим такое выражение для функций u_k :

$$u_k = \sum_{l=0}^{3n-1} \tilde{G}_l^{(k)} h^{2l} \Delta^l V. \tag{2.9}$$

Рассмотрим характеристическое уравнение

$$a_0 + a_1 k + \dots + a_{3n} k^{3n} = 0$$

или в матричной форме

$$\det \|a_{sk} - kb_{sk}\| = 0.$$

Принимаем, что оно имеет простые (не равные нулю) корни k_m ($m = \overline{1, 3n}$). Тогда уравнение (2.8) можно представить в таком виде $\prod_{m=1}^{3n} (\Delta - k_m h^{-2}) V = 0$, из которого следует, что

$$V = \sum_{m=1}^{3n} V_m, \quad (2.10)$$

где V_m – метагармонические функции, удовлетворяющие равенствам

$$\Delta V_m - k_m h^{-2} V_m = 0. \quad (2.11)$$

Из соотношений (2.9) с учетом равенств (2.10), (2.11) определяем функции

$$u_k = \sum_{m=1}^{3n} G_m^{(k)} V_m \left(G_m^{(k)} = \sum_{l=0}^{3n-1} k_m^l \tilde{c}_l^{(k)} \right).$$

Принимая во внимание обозначения (2.5), будем иметь такие равенства:

$$\begin{aligned} c_{66} u_3^{(2k-1)} &= \sum_{m=1}^{3n} c_m^{(2k-1)} V_m; \quad \phi^{(1)} = \tilde{\alpha}_1 h u + \sum_{m=1}^{3n} \tilde{c}_m^{(1)} V_m; \\ \phi^{(2k-1)} &= \sum_{m=1}^{3n} \tilde{c}_m^{(2k-1)} V_m; \quad c_{66} h \theta^{(2k)} = \sum_{m=1}^{3n} c_m^{(2k)} V_m. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Значение $\theta^{(0)}$ согласно (2.3) примет вид

$$c_{66} \theta^{(0)} = \kappa_e u + h^{-1} \sum_{m=1}^{3n} c_m^{(0)} V_m \left(c_m^{(0)} = -\frac{e_{31} c_{66}}{c_{11}} \sum_{s=1}^n \tilde{c}_m^{(2s-1)} \right). \quad (2.13)$$

В (2.12), (2.13) принято: $\kappa_e = \kappa_1 / (1 + \kappa_0)$, $c_m^{(2k-1)} = G_m^{(3k-2)}$, $\tilde{c}_m^{(2k-1)} = G_m^{(3k-1)}$, $c_m^{(2k)} = G_m^{(3k)}$.

Примем гармоническую функцию u в виде вещественной части некоторой голоморфной функции $\varphi'(z)$ (штрих обозначает производную по переменной z), т.е. $u = \varphi'(z) + \overline{\varphi'(\bar{z})}$. Тогда моменты деформаций $\theta^{(2k)}$ в комплексной форме представим таким образом:

$$\begin{aligned} c_{66} \theta^{(0)} &\equiv c_{66} (\partial_z u_+^{(0)} + \partial_{\bar{z}} \bar{u}_+^{(0)}) = \kappa_e [\varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)}] + \frac{h}{2} \sum_{m=1}^{3n} a_m^{(0)} \Delta V_m; \\ c_{66} \theta^{(2k)} &\equiv c_{66} (\partial_z u_+^{(2k)} + \partial_{\bar{z}} \bar{u}_+^{(2k)}) = \frac{h}{2} \sum_{m=1}^{3n} a_m^{(2k)} \Delta V_m \quad (k = \overline{1, n}), \end{aligned} \quad (2.14)$$

где $a_m^{(2k)} = 2k_m^{-1} c_m^{(2k)}$.

Отсюда определим моменты компонент вектора перемещений

$$\begin{aligned} c_{66} u_+^{(0)} &= \kappa_e \varphi(z) + h \sum_{m=1}^{3n} a_m^{(0)} \partial_{\bar{z}} V_m + i h \partial_{\bar{z}} Y_0; \\ c_{66} u_+^{(2k)} &= h \sum_{m=1}^{3n} a_m^{(2k)} \partial_{\bar{z}} V_m + i h \partial_{\bar{z}} Y_{2k} \quad (k = \overline{1, n}), \end{aligned} \quad (2.15)$$

где Y_{2k} – произвольные достаточно гладкие вещественные функции. Их необходимо выбрать такими, чтобы выполнялись уравнения (1.7). Следовательно, если внести в (1.7) значения функций (2.12) – (2.15), то получим такие равенства:

$$ih\partial_{\bar{z}}\Delta Y_0 + c_0 \sum_{m=1}^{3n} O_m^{(0)} \partial_{\bar{z}} V_m + 4\overline{\varphi''(z)} = 0;$$

$$ih\partial_{\bar{z}} \left[\Delta Y_{2k} - \frac{(4k+1)c_{44}}{c_{66}h^2} \sum_{s=1}^n \beta_{2s}^{(k)} Y_{2s} \right] + c_0 \sum_{m=1}^{3n} O_m^{(2k)} \partial_{\bar{z}} V_m = 2(4k+1)e_{15}\tilde{\chi}_1 \overline{\varphi''(z)}$$

$$(k = \overline{1, n}). \quad (2.16)$$

Здесь $c_0 = c_{11}/c_{66}h$, $O_m^{(2k)}$ – постоянные вида

$$O_m^{(2k)} = a_m^{(2k)} k_m - \frac{4k+1}{c_{11}} \left[2(c_{13} + c_{44})c_m^{(2k-1)} + c_{44} \sum_{s=1}^n \beta_{2s}^{(k)} a_m^{(2s)} + 2c_{66} \sum_{s=1}^n \lambda_{2s-1}^{(k)} \tilde{c}_m^{(2s-1)} \right].$$

Видно, что $O_m^{(2k)}$ тождественно равны нулю $\forall k \in [0, n]$. Это следует из выполнения равенств (2.1), (2.2) с учетом линейной независимости метагармонических функций V_m . Таким образом, уравнения (2.16) после интегрирования по переменной \bar{z} примут вид

$$\Delta Y_0 = 4ih^{-1} [\overline{\varphi'(z)} - \varphi'(z)]; \quad (2.17)$$

$$\Delta Y_{2k} - \frac{(4k+1)c_{44}}{c_{66}h^2} \sum_{s=1}^n \beta_{2s}^{(k)} Y_{2s} = -2i(4k+1)e_{15}\tilde{\chi}_1 h^{-1} [\overline{\varphi'(z)} - \varphi'(z)] \quad (k = \overline{1, n}). \quad (2.18)$$

Из (2.17) следует, что

$$Y_0 = ih^{-1} [z\overline{\varphi(z)} - \bar{z}\varphi(z) + \overline{\psi_*(z)} - \psi_*(z)], \quad (2.19)$$

где $\psi_*(z)$ – произвольная голоморфная функция.

Полагая в (2.18)

$$Y_2 = \kappa_2 h [\overline{\varphi'(z)} - \varphi'(z)] + y_1 \left(\kappa_2 = \frac{2e_{15}e_{31}\chi_1}{3(1+\kappa_0)\varepsilon_{33}c_{44}} \right),$$

$$Y_{2k} = y_k \quad (k = \overline{2, n}), \quad (2.20)$$

получим относительно функций y_k однородную систему уравнений, которую запишем таким образом:

$$\sum_{l=1}^n (q_{kl} - \delta_{kl} h^2 \Delta) y_l = 0 \quad (k = \overline{1, n}),$$

где δ_{kl} – символ Кронекера, $q_{kl} = (4k+1)c_{44}\beta_{2s}^{(k)}/c_{66}$.

Рассмотрим характеристическое уравнение

$$\det \|q_{kl} - \lambda \delta_{kl}\| = 0$$

и примем, что оно имеет простые и отличные от нуля корни $\lambda_s (s = \overline{1, n})$. Тогда указанным выше способом определим

$$y_k = \sum_{s=1}^n b_s^{(2k)} W_s, \quad (2.21)$$

где W_s – метагармонические функции, удовлетворяющие равенствам

$$\Delta W_s - \lambda_s h^{-2} W_s = 0; \quad (2.22)$$

постоянные $b_s^{(2k)}$ определяются алгебраическими дополнениями элементов произвольной строки определителя $|q_{kl} - \lambda \delta_{kl}|_{n \times n}$.

Согласно формулам (2.19) – (2.21) моменты перемещений $u_+^{(2k)}$ примут вид

$$\begin{aligned} c_{66}u_+^{(0)} &= \kappa\varphi(z) - z\overline{\varphi'(z)} - \overline{\psi(z)} + h \sum_{m=1}^{3n} a_m^{(0)} \partial_{\bar{z}} V_m; \\ c_{66}u_+^{(2)} &= -\kappa_2 h^2 \overline{\varphi''(z)} + h \sum_{m=1}^{3n} a_m^{(2)} \partial_{\bar{z}} V_m + ih \sum_{s=1}^n b_s^{(2)} \partial_{\bar{z}} W_s; \\ c_{66}u_+^{(2k)} &= h \sum_{m=1}^{3n} a_m^{(2k)} \partial_{\bar{z}} V_m + ih \sum_{s=1}^n b_s^{(2k)} \partial_{\bar{z}} W_s \quad (k = \overline{2, n}), \end{aligned} \quad (2.23)$$

где $\overline{\psi(z)} = \overline{\psi'_*(z)}$; $\kappa = 1 + \kappa_1 / (1 + \kappa_0)$.

Таким образом, значения функций (2.12), (2.23) совместно с равенствами (2.11), (2.22) представляют общее аналитическое решение системы уравнений (1.7) – (1.9).

Определяющие уравнения (1.6) в комплексной форме представляем таким образом:

$$\begin{aligned} \sigma_{11}^{(2k)} + \sigma_{22}^{(2k)} &= 2 \left\{ (c_{12} + c_{66}) \theta^{(2k)} + (4k+1) h^{-1} \left[-c_{13} u_3^{(2k-1)} + e_{31} \sum_{s=k+1}^n \phi^{(2s-1)} \right] \right\}; \\ \sigma_{11}^{(2k)} - \sigma_{22}^{(2k)} + 2i\sigma_{12}^{(2k)} &= 4c_{66} \partial_{\bar{z}} u_+^{(2k)}; \\ \sigma_{33}^{(2k)} &= c_{13} \theta^{(2k)} + (4k+1) h^{-1} \left[-c_{33} u_3^{(2k-1)} + e_{33} \sum_{s=k+1}^n \phi^{(2s-1)} \right]; \end{aligned} \quad (2.24)$$

$$\sigma_{13}^{(2k-1)} + i\sigma_{23}^{(2k-1)} = c_{44} \left[2\partial_{\bar{z}} (u_3^{(2k-1)} - u_3^{(2k-3)}) + (4k+1) h^{-1} \sum_{s=k}^n \theta^{(2s)} \right] + 2e_{15} \partial_{\bar{z}} \phi^{(2k-1)};$$

$$D_1^{(2k-1)} + iD_2^{(2k-1)} = e_{15} \left[2\partial_{\bar{z}} (u_3^{(2k-1)} - u_3^{(2k-3)}) + (4k+1) h^{-1} \sum_{s=k}^n \theta^{(2s)} \right] - 2\varepsilon_{11} \partial_{\bar{z}} \phi^{(2k-1)};$$

$$D_3^{(2k)} = e_{15} \theta^{(2k)} - (4k+1) h^{-1} \left[e_{33} u_3^{(2k-1)} + \varepsilon_{33} \sum_{s=k+1}^n \phi^{(2s-1)} \right].$$

Если внести полученное решение в соотношения (2.24) и перейти от декартовой к полярной системе координат r, ϑ , то будем иметь равенства

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}^{(0)} + \sigma_{\vartheta\vartheta}^{(0)} &= 4 \left[\varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)} \right] + 2h^{-1} \sum_{m=1}^{3n} d_m^{(0)} V_m; \\ \sigma_{rr}^{(0)} - \sigma_{\vartheta\vartheta}^{(0)} + 2i\sigma_{r\vartheta}^{(0)} &= 4 \left[-z\overline{\varphi''(z)} - \overline{\psi'(z)} + h \sum_{m=1}^{3n} a_m^{(0)} \partial_{\bar{z}}^2 V_m \right] e^{-2i\vartheta}; \\ \sigma_{33}^{(0)} &= \kappa_3 \left[\varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)} \right] + h^{-1} \sum_{m=1}^{3n} d_{3m}^{(0)} V_m; \\ \sigma_{rr}^{(2k)} + \sigma_{\vartheta\vartheta}^{(2k)} &= 2h^{-1} \sum_{m=1}^{3n} d_m^{(2k)} V_m; \quad \sigma_{33}^{(2k)} = h^{-1} \sum_{m=1}^{3n} d_{3m}^{(2k)} V_m; \end{aligned}$$

$$\sigma_{rr}^{(2k)} - \sigma_{\theta\theta}^{(2k)} + 2i\sigma_{r\theta}^{(2k)} = 4h \left[-\mu_*^{(2k)} h \overline{\varphi''(z)} + \sum_{m=1}^{3n} a_m^{(2k)} \partial_{\bar{z}}^2 V_m + i \sum_{s=1}^n b_s^{(2k)} \partial_{\bar{z}}^2 W_s \right] e^{-2i\theta};$$

$$\sigma_{r3}^{(2k-1)} + i\sigma_{\theta 3}^{(2k-1)} = 2 \left[\sum_{m=1}^{3n} p_m^{(2k-1)} \partial_{\bar{z}} V_m + i \sum_{s=1}^n q_s^{(2k-1)} \partial_{\bar{z}} W_s \right] e^{-i\theta} \quad (k = \overline{1, n}); \quad (2.25)$$

$$\varepsilon_{11}^{-1} (D_r^{(2k-1)} + iD_\theta^{(2k-1)}) = 2 \left[-\mu_*^{(2k-1)} h \overline{\varphi''(z)} + \sum_{m=1}^{3n} \tilde{p}_m^{(2k-1)} \partial_{\bar{z}} V_m + i \sum_{s=1}^n \tilde{q}_s^{(2k-1)} \partial_{\bar{z}} W_s \right] e^{-i\theta};$$

$$\varepsilon_{33}^{-1} D_3^{(2k)} = h^{-1} \sum_{m=1}^{3n} \tilde{d}_{3m}^{(2k)} V_m \quad (k = \overline{0, n}),$$

где $\mu_*^{(2)} = \kappa_2$, $\mu_*^{(2k)} = 0$ ($k > 1$); $\mu_*^{(1)} = e_1 \tilde{\chi}_1$, $\mu_*^{(2k-1)} = 0$ ($k > 1$); $d_m^{(2k)}$, $p_m^{(2k-1)}$, $q_s^{(2k-1)}$ – постоянные вида

$$d_m^{(2k)} = \frac{c_{12} + c_{66}}{c_{66}} c_m^{(2k)} - (4k+1) \left(\frac{c_{13}}{c_{66}} c_m^{(2k-1)} - e_{31} \sum_{s=k+1}^n \tilde{c}_m^{(2s-1)} \right);$$

$$d_{3m}^{(2k)} = \frac{c_{13}}{c_{66}} c_m^{(2k)} - (4k+1) \left(\frac{c_{33}}{c_{66}} c_m^{(2k-1)} - e_{33} \sum_{s=k+1}^n \tilde{c}_m^{(2s-1)} \right);$$

$$\tilde{d}_{3m}^{(2k)} = \frac{e_{31}}{\varepsilon_{33} c_{66}} c_m^{(2k)} - (4k+1) \left(\frac{e_{33}}{\varepsilon_{33} c_{66}} c_m^{(2k-1)} + \sum_{s=k+1}^n \tilde{c}_m^{(2s-1)} \right);$$

$$p_m^{(2k-1)} = \frac{c_{44}}{2c_{66}} \left[2(c_m^{(2k-1)} - c_m^{(2k-3)}) + (4k-1) \sum_{s=k}^n a_m^{(2s)} \right];$$

$$q_s^{(2k-1)} = \frac{(4k-1)c_{44}}{2c_{66}} \sum_{l=k}^n b_s^{(2l)}; \quad \tilde{q}_s^{(2k-1)} = \frac{(4k-1)e_{15}}{2\varepsilon_{11} c_{66}} \sum_{l=k}^n b_s^{(2l)}.$$

§3. Напряженное состояние пластины с круговым отверстием.

На основе приведенных формул рассмотрим задачу о напряженном состоянии трансверсально-изотропной пьезокерамической пластины, ослабленной круговым отверстием радиуса R . Предполагаем, что на поверхности полости $R \times [-h, h]$ выполняются условия

$$\sigma_{rr}(r, \theta, x_3)|_{r=R} = 0; \quad \sigma_{r\theta}(r, \theta, x_3)|_{r=R} = 0;$$

$$\sigma_{r3}(r, \theta, x_3)|_{r=R} = 0; \quad D_r(r, \theta, x_3)|_{r=R} = 0, \quad (3.1)$$

а на бесконечности на пластину действуют постоянные растягивающие силы $\sigma_{11}^\infty = p_1$, $\sigma_{22}^\infty = p_2$ и сдвигающие усилия $\sigma_{12}^\infty = \tau$ ($p_1, p_2, \tau = \text{const}$). На серединной плоскости S граничные условия (3.1) принимают вид

$$\sigma_{rr}^{(2k)}(r, \theta)|_{r=R} = 0; \quad \sigma_{r\theta}^{(2k)}(r, \theta)|_{r=R} = 0 \quad (k = \overline{0, n});$$

$$\sigma_{r3}^{(2k-1)}(r, \theta)|_{r=R} = 0; \quad D_r^{(2k-1)}(r, \theta)|_{r=R} = 0 \quad (k = \overline{1, n}). \quad (3.2)$$

Для решения задачи воспользуемся методом рядов. Представим голоморфные функции $\Phi(z) = \varphi'(z)$, $\Psi(z) = \psi'(z)$ в виде

$$\Phi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{-n}; \quad \Psi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^{-n}, \quad (3.3)$$

где a_n , b_n ($n \geq 1$) – произвольные постоянные, a_0 , b_0 – константы, определяемые значениями моментов компонент напряжений, заданных на бесконечности, т.е.

$$a_0 + \bar{a}_0 = \frac{1}{4}(\sigma_{11}^{(0)\infty} + \sigma_{22}^{(0)\infty}); \quad b_0 = \frac{1}{4}(\sigma_{22}^{(0)\infty} - \sigma_{11}^{(0)\infty} + 2i\sigma_{12}^{(0)\infty}).$$

Вид метагармонических функций V_m и W_s зависит от значений корней характеристических уравнений, которые могут быть как действительными, так и комплексными. Так, если k_1 – вещественный постоянный корень, а k_2 , k_3 – комплексно-сопряженные, тогда имеем

$$V_1 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n K_n(x_1 \rho) e^{in\vartheta}; \quad V_2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n H_n^{(1)}(x_2 \rho) e^{in\vartheta}; \quad V_3 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n H_n^{(2)}(x_3 \rho) e^{in\vartheta}, \quad (3.4)$$

где B_n , C_n , D_n – произвольные постоянные, удовлетворяющие равенствам $B_{-n} = \bar{B}_n$, $C_{-n} = (-1)^n \bar{D}_n$, $D_{-n} = (-1)^n \bar{C}_n$, $K_n(x_1 \rho)$, $H_n^{(1)}(x_2 \rho)$, $H_n^{(2)}(x_3 \rho)$ – цилиндрические функции Бесселя, Ханкеля первого и второго рода; $\rho = r/R$, $x_1 = Rh^{-1} \sqrt{k_1}$, $x_2 = Rh^{-1} \sqrt{-k_2}$, $x_3 = \bar{x}_2$. Аналогичные представления имеют место для метагармонических функций W_s . Здесь использованы цилиндрические функции, затухающие на бесконечности.

Если внести приведенные значения голоморфных (3.3) и метагармонических (3.4) функций в равенства (2.25) и учесть граничные условия (3.2), получим алгебраическую систему уравнений для определения неизвестных констант.

Получим выражения для компонент тензора напряжений и электрической индукции. Так, в частности, при растяжении пластины вдоль одной из координатных линий ($\sigma_{11}^{(0)\infty} = p$) окружное напряжение $\sigma_{\vartheta\vartheta}$ и электрическая индукция D_3 имеют вид

$$\frac{1}{p} \sigma_{\vartheta\vartheta} = 1 + \frac{1}{p^2} \left[1 + \sum_{k=0}^n T_{\vartheta\vartheta}^{(2k)}(\rho) P_{2k}(\zeta) \right] \cos 2\vartheta;$$

$$\frac{1}{p\epsilon_{33}} D_3 = - \sum_{k=0}^n T_3^{(2k)}(\rho) P_{2k}(\zeta) \cos 2\vartheta,$$

а при заданных сдвигающих усилиях они представляются равенствами

$$\frac{1}{\tau} \sigma_{\vartheta\vartheta} = \left[-1 + \sum_{k=0}^n T_{\vartheta\vartheta}^{(2k)}(\rho) P_{2k}(\zeta) \right] \sin 2\vartheta; \quad \frac{1}{\tau\epsilon_{33}} D_3 = - \sum_{k=0}^n T_3^{(2k)}(\rho) P_{2k}(\zeta) \sin 2\vartheta,$$

где $T_{\vartheta\vartheta}^{(2k)}$, $T_3^{(2k)}$ – составляющие, содержащие цилиндрические функции.

§4. Численные исследования. Анализ результатов.

Численные результаты получены для пластины из пьезокерамики PZT – 4.

На рис. 1, а, б представлены кривые изменения, соответственно, окружных $\sigma_{\vartheta\vartheta}/p$ и поперечных σ_{33}/p напряжений при одноосном растяжении в точке $\rho = 1$, $\vartheta = \pi/2$ на срединной (сплошные кривые) и граничной (пунктирные кривые) плоскостях в зависимости от изменения относительной толщины пластины R/h . Как видно из гра-

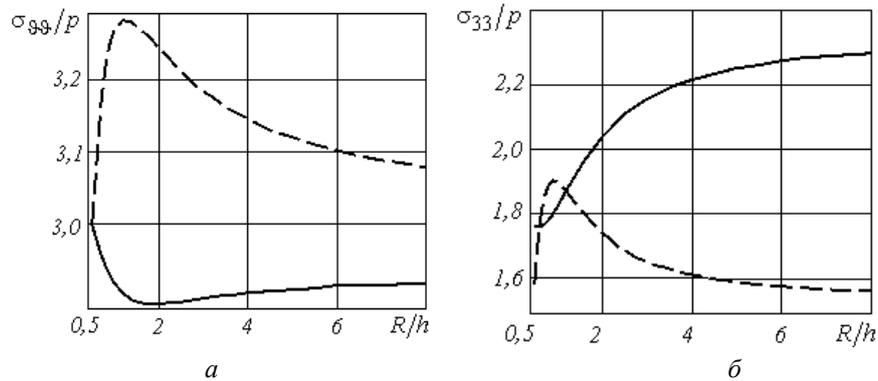


Рис. 1

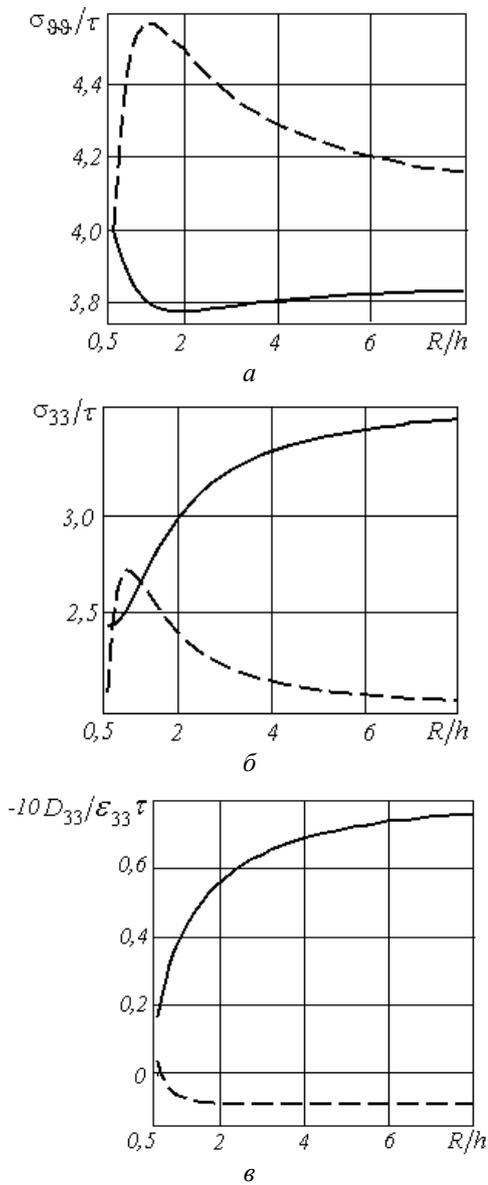


Рис. 2

фигов, на граничной плоскости ($\zeta=1$) напряжения достигают наибольших значений в окрестности значения $R/h \approx 1$. При увеличении отношения R/h они монотонно убывают. На срединной плоскости ($\zeta=0$) окружное напряжение σ_{99} слабо изменяется, а нормальное поперечное напряжение σ_{33} возрастает.

Кривые, приведенные на рис. 2, а, б, в характеризуют изменение механических напряжений σ_{99}/τ , σ_{33}/τ и электрической индукции $D_3/\epsilon_{33}\tau$, соответственно, на контуре отверстия $\rho=1$ при $\vartheta=-\pi/4$ в точках на срединной ($\zeta=0$) и граничной ($\zeta=1$) плоскостях пластины при заданных сдвигающих усилиях на бесконечности. Наибольших значений σ_{99}/τ достигает на граничной плоскости пластины. Кривая, характеризующая зависимость σ_{99}/τ от параметра R/h , не монотонная. Максимального значения она достигает в окрестности единицы и с увеличением параметра R/h она постоянно

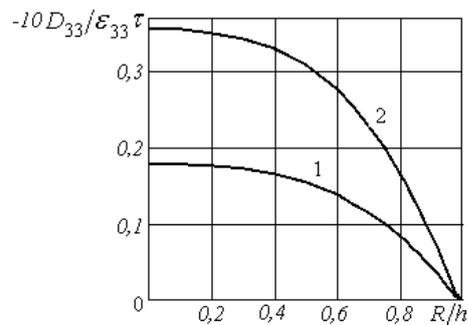


Рис. 3

убывает. Поперечные напряжения σ_{33}/τ и электрическая индукция $D_3/\epsilon_{33}\tau$ наибольших значений достигают на срединной плоскости.

На рис. 3 представлены кривые изменения индукции D_3 по толщине пластины в сечении $\rho = 1,02$ при растяжении (кривая 1) и сдвиге (кривая 2).

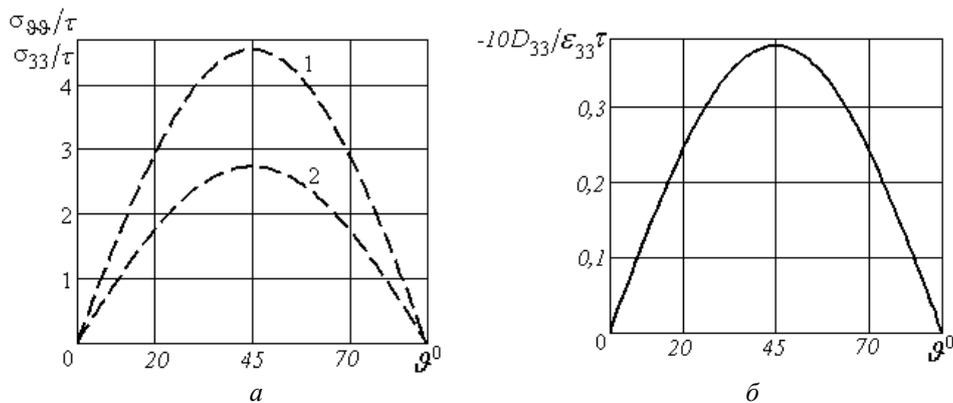


Рис. 4

Графики на рис. 4 характеризуют изменение механических напряжений σ_{99}/τ (кривая 1), σ_{33}/τ (кривая 2) и электрической индукции $D_3/(\epsilon_{33}\tau)$ по угловой координате.

Р Е З Ю М Е . Методом розкладу невідомих функцій в ряди Фур'є за поліномами Лежандра отримано розв'язок задачі про напружений стан необмеженої трансверсально-ізотропної п'єзокерамічної пластини, послабленої круговим отвором, при змішаних умовах на граничних площинах і дії на нескінченності на пластину зусиль розтягу та зсуву. Проведено аналіз напруженого стану пластини в околі отвору.

1. Алтухов Е.В. Упругое равновесие слоя с полостью для граничных условий смешанного типа на торцах // Теорет. и прикл. механика. – 1993. – Вып. 24. – С. 3 – 7.
2. Векуа И.Н. Теория тонких пологих оболочек переменной толщины // Тр. Тбилис. матем. ин-та. – 1965. – Вып. 30. – С. 3 – 103.
3. Новацкий В. Электромагнитные эффекты в твердых телах. – М.: Мир, 1986. – 159 с.
4. Хома И.Ю. Об уравнениях теории термпьезокерамических нетонких оболочек // Прикл. механика. – 2005. – 41, № 2. – С. 12 – 22.
5. Фильшинский Л.А., Кушнир Д.В. Упругое равновесие многосвязных цилиндрических тел // Теор. и прикл. механика. – 2009. – Вып. 45. – С. 90 – 99.
6. Bisegna P., Caruso G. Evaluation of Higher – Order Theories of Piezoelectric Plates in Bending and Stretching // Int. J. Solids and Struct. – 2001. – 38, N 4. P. 48 – 49.
7. Burniston E.E. On the Extension of an Infinite Elastic Plate Containing an Axisymmetric Hole // J. Appl. Mech. – 1972. – 39, N 2. P. 507 – 512.
8. Cheng Zhen-Qiang, Lim C.W., Kitipornchai S. Three-Dimensional Asymptotic Approach to Inhomogeneous and Laminated Piezoelectric Plates // Int. J. Solids and Struct. – 2000. – 37, N 33. – P. 3153–3175.
9. Darwish F., Gharaibeh M., Toshtoush G. A Modified Equation for the Stress Concentration Countersunk Holes // Eur. J. Mech. A/Solids. – 2012. – 36. – P. 94 – 103.
10. Fellers J.I., Soler A.I. Approximate Solution of the Finite Cylinder Problem Using Legendre Polynomials // AIAAJ. – 1970. – 8, N 11. – P. 2037–2042.
11. Folias E.S., Wang J.S. On the Three-dimensional Stress Fields around a Circular Hole in a Plate of Arbitrary Thickness // Comput. Mech. – 1990. – 6, N 5. – P. 379 – 391.
12. Kapuria S., Dube G.P., Dumir P.C. First – Order Shear Deformation Theory Solution for a Circular Piezoceramic Composite Plate Under Axisymmetric Load // Smart Mater. and Struct. – 2003. – 12, N 3. – P. 417 – 423.

13. *Khoma I.Yu.* Representation of the Solution of the Equilibrium Equations for Non-Thin Transversely Isotropic Plates // Journal of Mathematical Sciences. – 2000. – **101**, N 6. – P. 3577 – 3584.
14. *Khoma I.Yu.* Analytical Solution of the Equilibrium Equations for Nonthin Electroelastic Transversely Isotropic Plates Polarized through the Thickness // Int. Appl. Mech. – 2014. – **50**, N 4. – P. 430 – 445.
15. *Khoma I.Yu.* Representing the Solutions of Equilibrium Equations for Functionally Inhomogeneous Transversely Isotropic Plates // Int. Appl. Mech. – 2017. – **53**, N 2. – P. 196 – 208.
16. *Khoma I.Yu., Dashko O.G.* Stress State of a Nonthin Transversely Isotropic Plate with a Curvilinear Hole // Int. Appl. Mech. – 2015. – **51**, N 4. – P. 461 – 473.
17. *Khoma I.Yu., Dashko O.G.* Solving the Third Homogeneous Boundary-Value Problem of the Deformation of a Transversely Isotropic Plate with a Curved Hole under Uniform Tension // Int. Appl. Mech. – 2016. – **52**, N 6. – P. 605 – 615.
18. *Lee Ho – Jun, Saravanos D. A.* Mixed Multi – field Finite Element Formulation for Thermopiezoelectric Composite Shells // Int. J. Solids and Struct. – 2000. – **37**, N 36. – P. 4944 – 4967.
19. *Yang J.S.* Equation of the Extension and Flexure of Electroelastic Plates under Strong Electric Fields // Int. J. Solids and Struct. – 1999. – **36**, N 21. – P. 3171 – 3192.
20. *Yang Zh., Kim Ch-Boo, Chjo Ch., Beom N.G.* The Concentration of Stress and Strain in Finite Thickness Elastic Plate Containing a Circular Hole // Int. J. Solids and Struct. – 2008. – **45**. – P. 713 – 731.
21. *Yang Zh.* The Stress and Strain Concentrations of an Elliptical Hole in an Elastic Plate of Finite Subjected to Tensile Stress // Int. J. Fract. – 2009. – **155**. – P. 43 – 44.

Поступила 16.12.2016

Утверждена в печать 30.05.2017

