Я.Я.Рущицкий, С.В.Синчило

ВАРИАНТ НЕЛИНЕЙНЫХ ВОЛНОВЫХ УРАВНЕНИЙ, ОПИСЫВАЮЩИХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИЕ ОСЕСИММЕТРИЧНЫЕ ВОЛНЫ

Институт механики им. С.П.Тимошенко НАНУ,
ул. Нестерова, 3, 03057, Киев, Украина;
e-mail: rushch@inmech.kiev.ua rheol@inmech.kiev.ua

Abstract. The new variant of nonlinear wave equations is derived basing on the five-constant Murnaghan elastic potential. A feature of this variant consists in two assumptions: the process of nonlinear elastic deformation is only physically nonlinear (the geometrical nonlinearity is neglected); the geometrical picture of deformation is axisymmetric and described by the cylindrical coordinates. Therefore the system of wave equations contains only two coupled equations. Such statement permits to use this new variant in analysis of the surface waves, propagating along the generatrix of circular cylindrical cavity in an elastic medium. Another feature of obtained nonlinear equations is that each equation involves the linear classical part. The nonlinear summands are quadratically nonlinear and contain twenty three and twenty two types of nonlinearities, respectively.

Key words: Murnaghan's potential, physical nonlinearity, cylindrical surface wave, nonlinear wave equations.

Введение.

Цилиндрические гармонические волны являются предметом достаточно давних исследований в теории волн [2, 4], однако исчерпывающими эти исследования назвать нельзя. Такого типа волны изучаются до сих пор в трех направлениях – чисто теоретическом, экспериментальном и прикладном [7 – 9, 20 – 22]. Переход от линейной модели описания цилиндрических волн к различным нелинейным моделям выявил ряд проблем в аналитическом описании и экспериментальных наблюдениях данных волн.

В работах [16, 17] описаны многие типы нелинейных волновых уравнений, соответствующих нелинейно упругой пятиконстантной модели Мэрнагана. При анализе поверхностной волны, распространяющейся вдоль образующей круговой цилиндрической полости, необходимы нелинейные волновые уравнения для цилиндрических осесимметричных волн. В постановке задачи о волнах, описываемых цилиндрическими координатами, в [13 – 15, 17] различаются четыре конфигурации. Однако в случае конфигурации II, которая описывает указанную выше поверхностную волну, система волновых уравнений, получена только для одного частного случая. Это случай, когда учитывается лишь геометрическая нелинейность и модель Мэрнагана сводится к простейшей нелинейной модели (модели Йона или неогуковой модели). Поэтому возникла необходимость рассмотреть иные случаи. В частности, случай, когда учитывается лишь физическая нелинейность и который более свойственный материалам, изученным в рамках модели Мэрнагана. Известно, что эта модель описывает слабую физическую нелинейность при малых деформациях. Для последовательного анализа последнего случая требуются некоторые общие сведения и формулы, которые представим ниже.

1. Постановка задачи.

Выберем начальное состояние (конфигурацию) континуума, которое характеризуется цилиндрическими координатами $\theta^1 = r, \theta^2 = \vartheta, \theta^3 = z$, и ограничимся случаем, когда состояние осесимметричное с осью симметрии Oz. Тогда для описания этого состояния необходимы только две координаты и два смещения $\left(u_r(r,z,t), 0, u_z(r,z,t)\right)$ $u^1 = u_1 = u_r$, $u^2 = u_2 = u_\vartheta = 0, u^3 = u_3 = u_z$. Далее обозначим принятую конфигурацию как конфигурацию As. Если учесть общие выражения для символов Кристоффеля в случае цилиндрических координат $\Gamma^1_{22} = -r, \Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = (1/r)$ и использовать в конфигурации As для вычисления компонентов тензора деформаций $\varepsilon_{ij}(r,z,t)$ ковариантные производные ковариантных и контравариантных компонентов вектора смещений [1, 3, 5] $\varepsilon_{ij} = (1/2)(\nabla_i u_j + \nabla_j u_i + \nabla_i u_k \nabla_j u^k)$, $\nabla_i u^k = (\partial u^k / \partial\theta^i) + u^j \Gamma^k_{ji}$, $\nabla_i u_j = (\partial u_j / \partial\theta^i) - u_k \Gamma^k_{ji}$, то в итоге получаются соотношения

$$\nabla_1 u_1 = u_{1,1} - u_1 \cancel{\Gamma^1_{11}} - u_2 \cancel{\Gamma^2_{11}} - u_3 \cancel{\Gamma^3_{11}} = u_{r,r}; \quad \nabla_1 u^1 = u^1_{,1} = u^1 \cancel{\Gamma^1_{11}} + u^2 \cancel{\Gamma^2_{11}} + u^3 \cancel{\Gamma^3_{11}} = u_{r,r};$$

$$\nabla_2 u_2 = -u_1 \Gamma^1_{22} - u_2 \cancel{\Gamma^2_{22}} - u_3 \cancel{\Gamma^3_{22}} = r u_r; \quad \nabla_2 u^2 = u^1 \Gamma^2_{12} \cancel{+ u^2 \Gamma^2_{22} + u^3 \Gamma^2_{32}} = (1/r) u_r;$$

$$\nabla_3 u_3 = u_{3,3} - u_1 \cancel{\Gamma^1_{33}} - u_2 \cancel{\Gamma^2_{33}} - u_3 \cancel{\Gamma^3_{33}} = u_{z,z}; \quad \nabla_3 u^3 = u^3_{,3} + u^1 \cancel{\Gamma^1_{33}} + u^2 \cancel{\Gamma^2_{33}} + u^3 \cancel{\Gamma^3_{33}} = u_{z,z}; \quad (1)$$

$$\nabla_3 u_1 = u_{1,3} + u_1 \cancel{\Gamma^1_{31}} + u_2 \cancel{\Gamma^2_{31}} + u_3 \cancel{\Gamma^3_{31}} = u_{r,z}; \quad \nabla_3 u^1 = u^1_{,3} + u^1 \cancel{\Gamma^1_{11}} + u^2 \cancel{\Gamma^2_{11}} + u^3 \cancel{\Gamma^3_{11}} = u_{r,z};$$

$$\varepsilon_{11} = \nabla_1 u_1 + (1/2)\nabla_1 u_1 \nabla_1 u^1 + (1/2)\nabla_1 u_2 \nabla_1 u^2 + (1/2)\nabla_1 u_3 \nabla_1 u^3 \to$$

$$\to \varepsilon_{rr} = u_{r,r} + (1/2)(u_{r,r})^2 + (1/2)(u_{z,r})^2;$$

$$\varepsilon_{22} = \nabla_2 u_2 + (1/2)(\nabla_2 u_1 \nabla_2 u^1 + \nabla_2 u_2 \nabla_2 u^2 + \nabla_2 u_3 \nabla_2 u^3) \to \varepsilon_{\vartheta\vartheta} = (1/r)u_r + (1/2r^2)(u_r)^2;$$

$$\varepsilon_{33} = \nabla_3 u_3 + (1/2)\nabla_3 u_1 \nabla_3 u^1 + (1/2)\nabla_1 u_3 \nabla_3 u^3 \to \varepsilon_{zz} = u_{z,z} + (1/2)(u_{z,z})^2 + (1/2)(u_{r,z})^2; \quad (2)$$

$$\varepsilon_{13} = (1/2)(\nabla_1 u_3 + \nabla_3 u_1 + \nabla_1 u_1 \nabla_3 u^1 + \nabla_1 u_3 \nabla_3 u^3) \to \varepsilon_{rz} = (1/2)(u_{z,r} + u_{r,z} + u_{r,r}u_{r,z} + u_{z,r}u_{z,z});$$

$$\varepsilon_{r\vartheta} = \varepsilon_{\vartheta z} = 0 .$$

Выберем вариант учета нелинейности, в котором геометрическая нелинейность в описании тензора деформаций не учитывается посредством линейных соотношений Коши

$$\varepsilon_{rr} = u_{r,r}; \quad \varepsilon_{\vartheta\vartheta} = (1/r)u_r; \quad \varepsilon_{zz} = u_{z,z}; \quad \varepsilon_{r\vartheta} = 0; \quad \varepsilon_{rz} = (1/2)(u_{z,r} + u_{r,z}); \quad \varepsilon_{r\vartheta} = \varepsilon_{\vartheta z} = 0. \quad (3)$$

и учитывается только физическая нелинейность введением потенциала Мэрнагана [10]

$$W(I_1, I_2, I_3) = (1/2)\lambda I_1^2 + \mu I_2 + (1/3)A I_3 + B I_1 I_2 + (1/3)C I_1^3. \quad (4)$$

Далее следует вывести соответствующие потенциалу (4) и представлениям (2), (3) определяющие соотношения.

2. Определяющие соотношения.

На первом шаге необходимо записать потенциал (4) через деформации. Для этого требуется общая запись инвариантов через деформации с учетом формул (3)

$$I_1(\varepsilon_{ik}) = \varepsilon_{ik} g^{ik} = \varepsilon_{11} \cdot 1 + (1/r^2)\varepsilon_{22} \cdot 1 + \varepsilon_{33} \cdot 1;$$

$$I_2(\varepsilon_{ik}) = \varepsilon_{im}\varepsilon_{nk} g^{ik} g^{nm} = (\varepsilon_{11}\cdot 1)^2 + ((1/r^2)\varepsilon_{22}\cdot 1)^2 + (\varepsilon_{33}\cdot 1)^2 + 2\cdot(\varepsilon_{13})^2;$$

$$I_3(\varepsilon_{ik}) = \varepsilon_{pm}\varepsilon_{in}\varepsilon_{kq} g^{im} g^{pq} g^{kn} = (\varepsilon_{11})^3 + ((1/r^2)\varepsilon_{22})^3 + (\varepsilon_{33})^3 + 3\cdot(\varepsilon_{13})^2(\varepsilon_{11}+\varepsilon_{33}) \qquad (5)$$

или

$$I_1 = \varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\vartheta\vartheta} + \varepsilon_{zz}; \quad I_2 = \varepsilon_{rr}^2 + \varepsilon_{\vartheta\vartheta}^2 + \varepsilon_{zz}^2 + \varepsilon_{rz}^2 + \varepsilon_{zr}^2; \quad I_3 = \varepsilon_{rr}^3 + \varepsilon_{\vartheta\vartheta}^3 + \varepsilon_{zz}^3 + 3(\varepsilon_{rz}^2)\cdot(\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{zz}). \qquad (6)$$

При подстановке инвариантов (6) в потенциал (4) получается следующее представление:

$$W = (1/2)\lambda(\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\vartheta\vartheta} + \varepsilon_{zz})^2 + \mu(\varepsilon_{rr}^2 + \varepsilon_{\vartheta\vartheta}^2 + \varepsilon_{zz}^2 + \varepsilon_{rz}^2 + \varepsilon_{zr}^2) + (1/3)C(\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\vartheta\vartheta} + \varepsilon_{zz})^3 + \qquad (7)$$

$$+B(\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\vartheta\vartheta} + \varepsilon_{zz})(\varepsilon_{rr}^2 + \varepsilon_{\vartheta\vartheta}^2 + \varepsilon_{zz}^2 + \varepsilon_{rz}^2 + \varepsilon_{zr}^2) +$$

$$+(1/3)A(\varepsilon_{rr}^3 + \varepsilon_{\vartheta\vartheta}^3 + \varepsilon_{zz}^3 + \varepsilon_{rr}(\varepsilon_{rz}^2 + \varepsilon_{rz}\varepsilon_{zr} + \varepsilon_{zr}^2) + \varepsilon_{zz}(\varepsilon_{rz}^2 + \varepsilon_{rz}\varepsilon_{zr} + \varepsilon_{zr}^2)).$$

Компоненты симметричного тензора напряжений Лагранжа вычисляются по формулам $\sigma_{rr} = \partial W/\partial\varepsilon_{rr}, \ldots,$ $\sigma_{rz} = \partial W/\partial\varepsilon_{rz}$ при условии, что тензоры деформаций и напряжений записываются так, как будто они несимметричны,

$$\sigma_{rr} = \lambda(\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\vartheta\vartheta} + \varepsilon_{zz}) + 2\mu\varepsilon_{rr} + (A+3B+C)\varepsilon_{rr}^2 + (A+2B)\varepsilon_{rz}^2 +$$
$$+(B+C)\left[2\varepsilon_{rr}(\varepsilon_{\vartheta\vartheta} + \varepsilon_{zz}) + \varepsilon_{\vartheta\vartheta}^2 + \varepsilon_{zz}^2\right] + 2C\varepsilon_{\vartheta\vartheta}\varepsilon_{zz};$$

$$\sigma_{\vartheta\vartheta} = \lambda(\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\vartheta\vartheta} + \varepsilon_{zz}) + 2\mu\varepsilon_{\vartheta\vartheta} + (A+3B+C)\varepsilon_{\vartheta\vartheta}^2 + 2B\,\varepsilon_{rz}^2 +$$
$$+(B+C)(2\varepsilon_{\vartheta\vartheta}(\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{zz}) + \varepsilon_{rr}^2 + \varepsilon_{zz}^2) + 2C\varepsilon_{rr}\varepsilon_{zz};$$

$$\sigma_{zz} = \lambda(\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\vartheta\vartheta} + \varepsilon_{zz}) + 2\mu\varepsilon_{zz} + (A+3B+C)\varepsilon_{zz}^2 + (A+2B)\varepsilon_{rz}^2 +$$
$$+(B+C)\left[2\varepsilon_{zz}(\varepsilon_{\vartheta\vartheta} + \varepsilon_{rr}) + \varepsilon_{\vartheta\vartheta}^2 + \varepsilon_{rr}^2\right] + 2C\,\varepsilon_{\vartheta\vartheta}\varepsilon_{rr}; \qquad (8)$$

$$\sigma_{rz} = 4\mu\varepsilon_{rz} + 2(A+2B)\varepsilon_{rz}(\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{zz}).$$

Определяющие соотношения $\sigma \sim \varepsilon$ (8) можно представить в виде зависимости компонентов тензора напряжений от компонентов вектора перемещений $\sigma \sim u$ (в скобках указано количество типов нелинейностей)

$$\sigma_{rr} = \lambda(u_{r,r} + (1/r)u_r + u_{z,z}) + 2\mu u_{r,r} + (A+3B+C)(u_{r,r})^2 + (1/4)(A+2B)(u_{z,r} + u_{r,z})^2 +$$
$$+(B+C)\left[2u_{r,r}((1/r)u_r + u_{z,z}) + (1/r^2)(u_r)^2 + (u_{z,z})^2\right] + 2C(1/r)u_r u_{z,z};$$

$$\sigma_{\vartheta\vartheta} = (\lambda + 2\mu)(1/r)u_r + \lambda(u_{r,r} + u_{z,z}) + (A+3B+C)(1/r^2)(u_r)^2 +$$
$$+(1/2)B(u_{z,r} + u_{r,z})^2 + (B+C)(2(1/r)u_r(u_{r,r} + u_{z,z}) + u_{r,r}^2 + u_{z,z}^2) + 2Cu_{r,r}u_{z,z}; \qquad (9)$$

$$\sigma_{zz} = (\lambda + 2\mu)u_{z,z} + \lambda(u_{r,r} + (1/r)u_r) + (A+3B+C)(u_{z,z})^2 + (A+2B)(1/4)(u_{z,r} + u_{r,z})^2 +$$
$$+(B+C)\left[2u_{z,z}((1/r)u_r + u_{r,r}) + (1/r^2)(u_r)^2 + (u_{r,r})^2\right] + 2C(1/r)u_r u_{r,r}$$

(9 типов для трех компонентов сверху)

$$\sigma_{rz} = 2\mu(u_{z,r} + u_{r,z}) + (A+2B)(u_{r,r} + u_{z,z})(u_{z,r} + u_{r,z}) + 2B(1/r)u_r(u_{z,r} + u_{r,z}) \text{ (6 типов).}$$

3. Уравнения движения и нелинейные волновые уравнения.

Уравнения движения в общей записи без учета внешних сил имеют вид [1 – 3]

$$\nabla_k\left[\sigma^{ki}(\delta_i^n + \nabla_i u^n)\right] - \rho\ddot{u}^n = 0. \qquad (10)$$

Следует заметить, что в линейной теории выражение в круглых скобках равно 1. Если подход нелинейный, то уравнения движения (10) уже изначально содержат нелинейные составляющие – произведения компонентов тензора напряжений, которые в нелинейной теории нелинейно зависят от смещений, на компоненты градиентов смещений.

Вследствие осевой симметрии конфигурации индексы i, k в формуле (10) не принимают значение 2, поскольку принята цилиндрическая система координат $\theta_1 = r$, $\theta_2 = \vartheta, \theta_3 = z$ Поэтому (10) можно записать в виде только двух уравнений $(k = 1; 3)$

$$\nabla_1 \left[\sigma^{1i} (\delta_i^1 + \nabla_i u^1) \right] + \nabla_3 \left[\sigma^{3i} (\delta_i^1 + \nabla_i u^1) \right] - \rho \ddot{u}^1 = 0;$$

$$\nabla_1 \left[\sigma^{1i} (\delta_i^3 + \nabla_i u^3) \right] + \nabla_3 \left[\sigma^{3i} (\delta_i^3 + \nabla_i u^3) \right] - \rho \ddot{u}^3 = 0. \quad (11)$$

Используем далее общую формулу [1 – 3]

$$\nabla_k \sigma^{ik} = (\partial \sigma^{ik} / \partial \theta^k) + \sigma^{pk} \Gamma_{pk}^i + \sigma^{ip} \Gamma_{kp}^k \quad \text{или}$$

$$\nabla_k \sigma^{ik} = (1/\sqrt{g})(\partial (\sqrt{g}\, \sigma^{ik}) / \partial \theta^k) + \sigma^{pk} \Gamma_{pk}^i. \quad (12)$$

В круговых цилиндрических координатах для метрического тензора справедливы соотношения $g = g^{11} + g^{22} + g^{33} = 1 + r^2 + 1 = r^2$. Тогда применительно к уравнениям (11) формула (12) упрощается

$$\nabla_k \sigma^{ik} = (1/\vartheta^1)(\partial (\vartheta^1 \sigma^{ik}) / \partial \theta^k) + \sigma^{pk} \Gamma_{pk}^i.$$

В итоге для рассматриваемой конфигурации As уравнения (11) принимают более конкретный вид

$$\begin{aligned} &\sigma_{rr,r} + \sigma_{rz,z} + (1/r)(\sigma_{rr} - \sigma_{\vartheta\vartheta}) - \rho \ddot{u}_r = -\sigma_{rr,r} u_{r,r} - \sigma_{zr,r} u_{r,z} - \sigma_{rz,z} u_{r,r} - \sigma_{zz,z} u_{r,z} - \\ &-(1/r)\sigma_{rr} u_{r,r} + (1/r)\sigma_{\vartheta\vartheta} u_{r,r} - (1/r)\sigma_{zr} u_{r,z} - \sigma_{rr} u_{r,rr} - 2\sigma_{rz} u_{r,zr} - \sigma_{zz} u_{r,zz} = 0; \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} &\sigma_{zr,r} + (1/r)\sigma_{zr} + \sigma_{zz,z} - \rho \ddot{u}^3 = -\sigma_{rr,r} u_{z,r} - \sigma_{zr,r} u_{z,z} - \sigma_{rz,z} u_{z,r} - \sigma_{zz,z} u_{z,z} - \\ &-(1/r)\sigma_{rr} u_{z,r} + (1/r)\sigma_{\vartheta\vartheta} u_{z,r} - (1/r)\sigma_{zr} u_{z,z} - \sigma_{rr} u_{z,rr} - 2\sigma_{rz} u_{3,31} - \sigma_{zz} u_{z,zz} = 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Особенность уравнений (13), (14) такова, что при подстановке представлений напряжений через смещения нелинейность полученных уравнений в смещениях будет определяться как нелинейностью левых частей (4 составляющие), так и нелинейностью правых частей (10 составляющих) уравнений (13), (14). При этом нелинейность левых частей определяется лишь нелинейными составляющими компонентов тензора напряжений, она имеет второй порядок (квадратичная нелинейность) и коэффициенты перед каждым типом нелинейности зависят линейно только от упругих постоянных Мэрнагана.

Нелинейность правых частей включает второй и третий порядки вследствие квадратичной нелинейности как самих правых частей, так и компонентов тензора напряжений и коэффициенты перед каждым типом квадратичной нелинейности зависят линейно только от упругих постоянных Ляме и кубической нелинейности – только от упругих постоянных Мэрнагана.

Подстановка соотношений (9) в уравнения (13), (14) приводит к нелинейным волновым уравнениям такой структуры, когда линейные классические члены составляют левые части уравнений, а квадратично и кубически нелинейные члены составляют правые части уравнений. Далее показаны нелинейные волновые уравнения, в которых сохранены только квадратично нелинейные составляющие:

$$
\begin{aligned}
&(\lambda+2\mu)\left[u_{r,rr}+(1/r)u_{r,r}-(1/r^2)u_r+u_{z,rz}\right]+\mu(u_{r,zz}-u_{z,rz})-\rho u_{r,tt}=\\
&=-2\left[\lambda+2\mu+A+3B+C\right]u_{r,rr}u_{r,r}-\left[\lambda+2\mu+(1/2)A+B\right]u_{r,zz}\,u_{z,z}-\\
&-\left[\lambda+2\mu+(1/2)A+B\right]u_{z,zz}u_{r,z}-\left[(\lambda+3\mu)+(1/2)A+B\right]u_{r,zr}u_{r,z}-\\
&-\left[\mu+(1/4)(A+2B)\right]u_{z,rr}u_{r,z}-\left[\lambda+\mu+(1/2)A+B\right]u_{r,zz}u_{r,r}-\\
&-\left[\lambda+\mu+(1/2)A+3B+2C\right]u_{z,rz}u_{r,r}-\left[2\mu+(3/4)(A+2B)\right]u_{r,zr}u_{z,r}-\\
&-\left[\lambda+2(B+C)\right]u_{r,rr}u_{z,z}-(1/2)(A+2B)u_{z,rr}u_{z,r}-((1/2)A+3B+2C)u_{z,zr}u_{z,z}-\\
&-\left[(1/2)A+B\right]u_{z,zz}u_{z,r}+\left(A+4B+2C\right)(1/r^3)u_r^2+2C(1/r^2)u_{z,z}u_r-\\
&-(\lambda+B)(1/r)u_{r,zz}u_r-\left[\lambda+2(B+C)\right](1/r)u_{r,rr}u_r-\left(\lambda+2\mu\right)(1/r^2)u_{r,r}u_r-\\
&-(B+2C)(1/r)u_{z,zr}u_r-\left[\lambda+\mu+(1/4)A-B\right](1/r)\boxed{u_{r,z}^2}-\\
&-2\left[\lambda+B+C\right](1/r)\boxed{u_{r,r}u_{z,z}}-\left[3\lambda+2\mu+A+4B+2C\right](1/r)\boxed{u_{r,r}^2}-\\
&-(1/r)\left[\mu+(1/2)A-B\right]\boxed{u_{r,z}u_{z,r}}-A\boxed{(1/4r)u_{z,r}^2}=0;
\end{aligned}
\tag{15}
$$

$$
\begin{aligned}
&(\lambda+2\mu)\left[u_{r,rz}+(1/r)u_{r,z}+u_{z,zz}\right]-\mu\left[(1/r)(u_{r,z}-u_{z,r})+(u_{r,rz}-u_{z,rr})\right]-\rho u_{z,tt}=\\
&=-2(\lambda+2\mu+A+3B+C)u_{z,zz}u_{z,z}-\left[\lambda+2(B+C)\right]u_{z,zz}u_{r,r}-(\lambda+2\mu+(1/2)A+B)u_{z,rr}u_{r,r}-\\
&-(\lambda+\mu+(1/2)A+B)u_{z,rr}u_{z,z}-\left[\lambda+2\mu+(3/2)(A+2B)\right]u_{z,rz}u_{z,r}-\\
&-\left[3\mu+(3/2)(A+2B)\right]u_{z,rz}u_{r,z}-((1/2)A+3B+2C)u_{r,zr}u_{r,r}-\\
&-(\lambda+\mu+(1/2)A+3B+2C)u_{r,zr}u_{z,z}-\left[\lambda+2\mu+(1/2)A+B\right]u_{r,rr}u_{z,r}-\\
&-\left[\mu+(1/2)(A+2B)\right]u_{r,zz}u_{z,r}-((1/2)A+B)u_{r,rr}u_{r,z}-(1/2)u_{r,zz}u_{r,z}-\\
&-2(B+C)(1/r^2)u_{r,z}u_r+(\lambda+2\mu)(1/r^2)u_{z,r}u_r-(\lambda+2B+2C)(1/r)u_{z,zz}u_r-\\
&-(\lambda+B)(1/r)\,u_{z,rr}u_r-2C\,(1/r)u_{r,rz}u_r-(1/r)Bu_{r,zr}u_r-\left[\lambda+2\mu+(1/3)A+2B\right](1/r)\boxed{u_{r,r}u_{z,r}}-\\
&-\left((1/3)A+2B+2C\right)(1/r)\boxed{u_{r,z}u_{r,r}}-(\lambda+\mu+3B+2C)(1/r)\boxed{u_{z,z}u_{r,z}}-\\
&-(\mu+3B+2C)(1/r)\boxed{u_{z,z}u_{z,r}}.
\end{aligned}
\tag{16}
$$

При квадратично нелинейном описании деформирования возникает возможность появления большого количества произведений 12 функций – смещения u_r, его двух первых производных $u_{r,r},u_{r,z}$ и трех вторых производных $u_{r,rr},u_{r,zr}{=}u_{r,rz},u_{r,zz}$, равно как смещения u_z, его двух первых производных $u_{z,r},u_{z,z}$ и трех вторых производных $u_{z,rr},u_{z,zr}{=}u_{z,rz},u_{z,zz}$.

Общее количество типов произведений определяется числом комбинаций из 6 элементов по 2 $\overline{C}_{12}^{2} = C_{12+2-1}^{2} = ((12+2-1)!/2!(12-1)!) = ((13)!/2!\cdot 11!) = 78$. Однако в уравнениях (15), (16) произведения смещений и их вторых производных отсутствуют. Поэтому в уравнении (15) и (16) присутствует 23 и 22 типа квадратично нелинейных составляющих, соответственно.

Такая ситуация выглядит обескураживающей, однако можно привести ряд соображений, позволяющих в ряде случаев существенно уменьшить число нелинейностей или упростить вычисления всех типов нелинейностей. Прежде всего, волновые уравнения (15), (16) получены при условии пренебрежения произведений градиентов смещений в соотношениях Коши (4). Поэтому выглядит логичным пренебрежение таких произведений и в правой части волновых уравнений (количество которых составляет 5 в (15) и 4 в (16)). Эти произведения отмечены в самих уравнениях прямоугольными рамками.

Случай анализа гармонических волн с помощью метода последовательных приближений в рамках первых двух приближений требует вычислений всех типов нелинейностей через линейное приближение в виде первой гармоники и в итоге правая (неоднородная) часть уравнения будет иметь вид произведения двух первых гармоник (второй гармоники) на сумму коэффициентов при нелинейностях [6,17,18]. Это может значительно упростить учет всех нелинейностей во втором приближении.

Заключение.

Получен новый вариант нелинейных волновых уравнений, который основан на пятиконстантной модели Мурнагана. Особенность этого варианта состоит в двух предположениях: процесс упругого деформирования является только физически нелинейным (геометрическая нелинейность пренебрегается); геометрическая картина деформирования осесимметрична и описывается цилиндрическими круговыми координатами. Поэтому система волновых уравнений содержит лишь два взаимосвязанные уравнения. Такая постановка позволяет получить новый вариант уравнений в анализе поверхностных волн, которые распространяются вдоль образующей круговой цилиндрической полости в упругой среде. Другой особенностью полученных нелинейных уравнений является то, что каждое уравнение включает линейную классическую часть. Нелинейные составляющие квадратично нелинейны и содержат двадцать три типа нелинейностей в первом уравнении и двадцать два типа нелинейностей во втором уравнении.

Р Е З Ю М Е. Отримано новий варіант нелінійних хвильових рівнянь, який основано на п'ятиконстантній моделі Мернагана. Особливість цього варіанту полягає в двох припущеннях: процес нелінійно пружного деформування є лише фізично нелінійним (геометрична нелінійність нехтується); геометрична картина деформування є осесиметричною і описується циліндричними круговими координатами. Тому система хвильових рівнянь містить лише два взаємозв'язані рівняння. Така постановка дозволяє цей новий варіант рівнянь в аналізі поверхневих хвиль, що поширюються вздовж твірної кругової циліндричної порожнини в пружному середовищі. Іншою особливістю отриманих нелінійних рівнянь є те, що кожне рівняння включає лінійну класичну частину. Нелінійні доданки є квадратично нелінійними і містять двадцять три типи нелінійностей в першому рівнянні і двадцять два типи нелінійностей у другому рівнянні.

1. *Гузь А.Н.* Упругие волны в телах с начальными напряжениями. Т.1. Общие вопросы. Т.2. Закономерности распространения. – К.: Наук. думка, 1986. – 376 с., 536 с.
2. *Демидов С.П.* Теория упругости. – М.: Высш. шк., 1979. – 432 с.
3. *Лурье А.* И. Нелинейная теория упругости. – М.: Наука, 1980. – 512 с.
4. *Новацкий В.* Теория упругости. – М.: Мир, 1975. – 872 с.
5. *Черных К. Ф.* Нелинейная теория упругости в машиностроительных расчетах. – Л.: Машиностроение, 1986. – 336 с.
6. *Cattani C., Rushchitsky J.J.* Wavelet and Wave Analysis as applied to Materials with Micro or Nanostructures. – Singapore-London: World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2007. – 466 p.
7. *Cylindrical Wave Patents*. In: Fresh Patents. New Patents and Technology. http://tgs.freshpatents.com.

8. *Frezza F., Tedeschi N.* Generalized image principle for cylindrical waves // Optics Letter. – 2014. – **39**, N 9. – P. 2727 – 2730.
9. *McNatt J.C., Venugopal V., Forehand D.* Cylindrical wave field of wave energy converters // Proc. 10th European Wave and Tidal Energy Conf. – Aalborg, Denmark, 2013. – P. 48 – 51.
10. *Murnaghan F.D.* Finite Deformation in an Elastic Solid. New York, John Wiley, (1951, 1967). – 140 p.
11. *Rushchitsky J.J.* On Constraints for Displacement Gradients in Elastic Materials // Int. Appl. Mech. – 2016. – **52**, N 2. – P. 119 – 132.
12. *Rushchitsky J.J.* On the Constants of the Nonlinear Murnaghan's Hyperelastic Material Model // Int. Appl. Mech. – 2016. – **52**, N 5. – P. 508 – 519.
13. *Rushchitsky J.J.* Quadratically Nonlinear Cylindrical Hyperelastic Waves: Derivation of Wave Equations for Plane-Strain State // Int. Appl. Mech. – 2005. – **41**, N 5. – P. 496 – 505.
14. *Rushchitsky J.J.* Quadratically Nonlinear Cylindrical Hyperelastic Waves: Derivation of Wave Equations for Axisymmetric and Other States // Int. Appl. Mech. – 2005. – **41**, N 6. – P. 646 – 656.
15. *Rushchitsky J.J.* Quadratically Nonlinear Cylindrical Hyperelastic Waves: Primary Analysis of Evolution // Int. Appl. Mech. – 2005. – **41**, N 7. – P. 770 – 777.
16. *Rushchitsky J.J.* Certain class of nonlinear hyperelastic waves: classical and novel models, wave equations, wave effects // Int J. Appl. Math. and Mech. – 2013. – **19**, N 6. – P. 1 – 48.
17. *Rushchitsky J.J.* Nonlinear Elastic Waves in Materials. – Heidelberg: Springer, 2014. – 455 p.
18. *Rushchitsky J.J., Symchuk Ya.V., Sinchilo S.V.* On the Third Approximation in an Analysis of Quadratically Nonlinear Hyperelastic Cylindrical Wave // Int. Appl. Mech. – 2015. – **51**, N 3. – P. 311 – 318.
19. *Wu X., Hu C., Wang M., Pu M., Luo X.* Realization of low-scattering metamaterials hell based on cylindrical wave expanding theory // Optics Express. – 2015. – **23**, N 8. – P. 10396 – 10404.
20. *Wypych M., Le-Ngoc L., Alexander K., Gardner A.* On the application of circular-cylindrical waves to ocean wave power absorption // Ocean Engineering. – 2015. – **40**, N 2. – P. 69 – 75.
21. *Xiaoming Y.* A whole-space transform formula of cylindrical wave functions for scattering problem // Earthquake Engineering and Engineering Vibration. – 2014. – N 3. – P. 23 – 28.

Поступила 28.12.2015 Утверждена в печать 30.01.2018