

Л. С. Р о ж о к

**АНАЛИЗ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ ПОЛЫХ
ОРТОТРОПНЫХ ЦИЛИНДРОВ С ВОГНУТЫМ
ГОФРИРОВАННЫМ ПОПЕРЕЧНЫМ СЕЧЕНИЕМ**

*Национальный транспортный университет,
ул. Омеляновича-Павленко, 1, 01010, Киев, Украина; r.l.s@ua.fm*

Abstract. The made of orthotropic or isotropic material hollow cylinders which the cross sections in the form of the concave semi-corrugations are studied. The stress state in cylinders is investigated in the 3D formulation with use of analytical methods of separation of variables, approximation of functions by Fourier series, and the numerical method of discrete orthogonalization. The data are presented in plots and diagrams of distribution of displacement and stress fields. An analysis of results is given.

Key words: discrete Fourier series, discrete-orthogonalization method, concave semi-corrugations, noncircular hollow cylinders, stress state.

Введение.

Способность сочетать в себе минимальный вес и необходимую при эксплуатации в сложных условиях работы прочность привела к тому, что оболочки разной толщины и конструкции из них широко используются в различных областях науки и техники. Это ракетно-авиационная промышленность, судостроение, машиностроение, строительство, биомеханика и др. [8, 10, 13].

Разработка новых и усовершенствование существующих методов решения многочисленных задач о напряженно-деформированном состоянии таких конструкций, зачастую сложной формы и структуры, остается актуальной и поныне [5, 14, 21 – 23]. Особенно на этапе проектирования существенную роль играют методы теории оболочек, поскольку они наиболее просто позволяют как проанализировать влияние геометрических и механических параметров на напряженное состояние оболочек и оболочечных конструкций, так и изучить другие механические процессы [4, 9, 11, 12]. Этот процесс стимулируется желанием создать корректную математическую модель и, с другой стороны, получить решение конкретных задач с достаточной степенью точности [6, 7].

В данной статье решена задача о напряженном состоянии ортотропного полого цилиндра с поперечным сечением в виде вогнутых соединенных полугофров, находящегося под действием внутреннего давления, в пространственной постановке на основе метода аппроксимации функций дискретными рядами Фурье [15 – 17].

§1. Постановка задачи.

Рассматриваются ортотропные упругие тела в форме некруговых полых цилиндров конечной длины в ортогональной криволинейной системе координат s, t, γ : $s = \text{const}$, $t = \text{const}$ – линии главных кривизн на некоторой координатной цилиндрической поверхности, которые представляют собой семейства направляющих и образующих, а координата γ ($\gamma_1 \leq \gamma \leq \gamma_2$) отсчитывается по нормали к этой поверхности [2].

В качестве координатной поверхности рассматриваемых цилиндров выбрано среднюю поверхность, равноудаленную от боковых поверхностей.

Для принятой системы координат квадрат длины линейного элемента цилиндра имеет вид

$$dS^2 = H_1^2 ds^2 + H_2^2 dt^2 + H_3^2 d\gamma^2,$$

где $H_1 = H_3 = 1$, $H_2 = 1 + \frac{\gamma}{R(t)}$ – параметры Ламе, $R(t) = R_t$ – радиус кривизны направляющей срединной поверхности.

На торцах цилиндра рассматриваются граничные условия в виде

$$\sigma_s = 0; \quad u_t = 0; \quad u_\gamma = 0 \quad \text{при } s = 0, \quad s = l, \quad (1.1)$$

что соответствует наличию диафрагмы абсолютно жесткой в своей плоскости и гибкой из нее.

Цилиндры находятся под действием внутреннего давления, распределенного равномерно вдоль окружной координаты t и описываемым вдоль образующей законом

$$q = q_0 \sin(\pi s / l) \quad (q_0 = \text{const}) \quad (1.2)$$

Граничные условия на боковых поверхностях имеют вид

$$\begin{aligned} \sigma_\gamma = q_\gamma; \quad \tau_{s\gamma} = 0; \quad \tau_{t\gamma} = 0 \quad \text{при } \gamma = \gamma_1; \\ \sigma_\gamma = 0; \quad \tau_{s\gamma} = 0; \quad \tau_{t\gamma} = 0 \quad \text{при } \gamma = \gamma_2. \end{aligned} \quad (1.3)$$

В качестве исходных уравнений взяты уравнения пространственной теории упругости для ортотропного тела [20]. За разрешающие функции приняты компоненты напряжений $\sigma_\gamma, \tau_{s\gamma}, \tau_{t\gamma}$, в которых формулируются граничные условия на боковых поверхностях (1.3) и компоненты перемещений u_γ, u_s, u_t .

После некоторых преобразований из основных уравнений можно получить разрешающую систему дифференциальных уравнений в частных производных шестого порядка с переменными коэффициентами, описывающую трехмерную краевую задачу в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_\gamma}{\partial \gamma} = (c_2 - 1) \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \gamma} \sigma_\gamma - \frac{\partial \tau_{s\gamma}}{\partial s} - \frac{1}{H_2} \frac{\partial \tau_{t\gamma}}{\partial t} + b_{22} \left(\frac{1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \gamma} \right)^2 u_\gamma + \\ + b_{12} \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \gamma} \frac{\partial u_s}{\partial s} + b_{22} \frac{1}{H_2^2} \frac{\partial H_2}{\partial \gamma} \frac{\partial u_t}{\partial t}; \\ \frac{\partial \tau_{s\gamma}}{\partial \gamma} = -c_1 \frac{\partial \sigma_\gamma}{\partial s} - \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \gamma} \tau_{s\gamma} - b_{12} \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \gamma} \frac{\partial u_\gamma}{\partial s} - b_{11} \frac{\partial^2 u_s}{\partial s^2} - \\ - b_{66} \frac{1}{H_2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{H_2} \frac{\partial u_s}{\partial t} \right) - (b_{12} + b_{66}) \frac{1}{H_2} \frac{\partial^2 u_t}{\partial s \partial t}; \\ \frac{\partial \tau_{t\gamma}}{\partial \gamma} = -c_2 \frac{1}{H_2} \frac{\partial \sigma_\gamma}{\partial t} - \frac{2}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \gamma} \tau_{t\gamma} - b_{22} \frac{1}{H_2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \gamma} u_\gamma \right) - \\ - (b_{12} + b_{66}) \frac{1}{H_2} \frac{\partial^2 u_s}{\partial s \partial t} - b_{22} \frac{1}{H_2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{H_2} \frac{\partial u_t}{\partial t} \right) - b_{66} \frac{\partial^2 u_t}{\partial s^2}; \end{aligned} \quad (1.4)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_\gamma}{\partial \gamma} &= c_4 \sigma_\gamma - c_2 \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \gamma} u_\gamma - c_1 \frac{\partial u_s}{\partial s} - c_2 \frac{1}{H_2} \frac{\partial u_t}{\partial t}; \\ \frac{\partial u_s}{\partial \gamma} &= a_{55} \tau_{s\gamma} - \frac{\partial u_\gamma}{\partial s}; \quad \frac{\partial u_t}{\partial \gamma} = a_{44} \tau_{t\gamma} - \frac{1}{H_2} \frac{\partial u_\gamma}{\partial t} + \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \gamma} u_t \\ &(0 \leq s \leq l; \quad t_1 \leq t \leq t_2; \quad \gamma_1 \leq \gamma \leq \gamma_2)\end{aligned}$$

с граничными условиями (1.1), (1.3). Здесь

$$b_{11} = a_{22} a_{66} / \Omega; \quad b_{12} = -a_{12} a_{66} / \Omega; \quad b_{22} = a_{11} a_{66} / \Omega;$$

$$b_{66} = (a_{11} a_{22} - a_{12}^2) / \Omega; \quad \Omega = (a_{11} a_{22} - a_{12}^2) a_{66};$$

$$c_1 = -(b_{11} a_{13} + b_{12} a_{23}); \quad c_2 = -(b_{12} a_{13} + b_{22} a_{23}); \quad c_4 = a_{33} + c_1 a_{13} + c_2 a_{23};$$

$$a_{11} = \frac{1}{E_s}; \quad a_{12} = -\frac{v_{st}}{E_t} = -\frac{v_{ts}}{E_s}; \quad a_{13} = -\frac{v_{s\gamma}}{E_\gamma} = -\frac{v_{\gamma s}}{E_s};$$

$$a_{22} = \frac{1}{E_t}; \quad a_{23} = -\frac{v_{\gamma t}}{E_t} = -\frac{v_{t\gamma}}{E_\gamma}; \quad a_{33} = \frac{1}{E_\gamma}; \quad a_{44} = \frac{1}{G_{t\gamma}}; \quad a_{55} = \frac{1}{G_{s\gamma}}; \quad a_{66} = \frac{1}{G_{st}},$$

где E_s, E_t, E_γ – модули упругости в направлении осей координат; $G_{t\gamma}, G_{s\gamma}, G_{st}$ – модули сдвига, $v_{t\gamma}, v_{s\gamma}, v_{st}, v_{\gamma t}, v_{\gamma s}, v_{ts}$ – соответствующие коэффициенты Пуассона.

§2. Метод решения.

Решение трехмерной краевой задачи для системы уравнений (1.4) с граничными условиями (1.1), (1.3) получено на основе метода аппроксимации функций дискретными рядами Фурье [3]. Данный подход базируется на использовании метода разделения переменных путем разложения разрешающих функций и компонент нагрузки в ряды Фурье по образующей; введением в разрешающую систему дифференциальных уравнений дополнительных функций; разделением переменных путем разложения разрешающих, дополнительных функций и компонент нагрузки в ряды Фурье по направляющей, а также на численном методе дискретной ортогонализации [1], обеспечивающем устойчивый вычислительный процесс. При этом для вычисления амплитуд дополнительных функций используется их аппроксимация дискретными рядами Фурье.

Наличие граничных условий (1.1) на торцах цилиндра способствует разделению переменных вдоль образующей. Для этого разрешающие функции и компоненты нагрузки представляются в виде разложений в ряды Фурье по координате s

$$X(s, t, \gamma) = \sum_{n=1}^N X_n(t, \gamma) \sin \lambda_n s; \quad Y(s, t, \gamma) = \sum_{n=0}^N Y_n(t, \gamma) \cos \lambda_n s, \quad (2.1)$$

где $X = \{\sigma_\gamma, \tau_{t\gamma}, u_\gamma, u_t, q_\gamma\}$, $Y = \{\tau_{s\gamma}, u_s\}$, $\lambda_n = \frac{\pi n}{l}$ ($0 \leq s \leq l$).

После подстановки рядов (2.1) в разрешающую систему уравнений (1.4), соответствующие граничные условия (1.2), (1.3) и разделения переменных, трехмерная краевая задача сводится к двумерной относительно амплитуд разрешающих функций рядов (2.1)

$$\frac{\partial \sigma_{\gamma,n}}{\partial \gamma} = (c_2 - 1) \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \gamma} \sigma_{\gamma,n} + \lambda_n \tau_{s\gamma,n} - \frac{1}{H_2} \frac{\partial \tau_{t\gamma,n}}{\partial t} + b_{22} \left(\frac{1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \gamma} \right)^2 u_{\gamma,n} +$$

$$\begin{aligned}
& + b_{12} \lambda_n \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \gamma} u_{s,n} + b_{22} \frac{1}{H_2^2} \frac{\partial H_2}{\partial \gamma} \frac{\partial u_{t,n}}{\partial t}; \\
\frac{\partial \tau_{s\gamma,n}}{\partial \gamma} & = -c_1 \lambda_n \sigma_{\gamma,n} - \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \gamma} \tau_{s\gamma,n} - b_{12} \lambda_n \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \gamma} u_{\gamma,n} + b_{11} \lambda_n^2 u_{s,n} - \\
& - b_{66} \frac{1}{H_2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{H_2} \frac{\partial u_{s,n}}{\partial t} \right) - (b_{12} + b_{66}) \lambda_n \frac{1}{H_2} \frac{\partial u_{t,n}}{\partial t}; \\
\frac{\partial \tau_{t\gamma,n}}{\partial \gamma} & = -c_2 \frac{1}{H_2} \frac{\partial \sigma_{\gamma,n}}{\partial t} - \frac{2}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \gamma} \tau_{t\gamma,n} - b_{22} \frac{1}{H_2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \gamma} u_{\gamma,n} \right) - \\
& - (b_{12} + b_{66}) \lambda_n \frac{1}{H_2} \frac{\partial u_{s,n}}{\partial t} - b_{22} \frac{1}{H_2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{H_2} \frac{\partial u_{t,n}}{\partial t} \right) + b_{66} \lambda_n^2 u_{t,n}; \\
\frac{\partial u_{\gamma,n}}{\partial \gamma} & = c_4 \sigma_{\gamma,n} - c_2 \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \gamma} u_{\gamma,n} + c_1 \lambda_n u_{s,n} - c_2 \frac{1}{H_2} \frac{\partial u_{t,n}}{\partial t}; \\
\frac{\partial u_{s,n}}{\partial \gamma} & = a_{55} \tau_{s\gamma,n} - \lambda_n u_{\gamma,n}; \quad \frac{\partial u_{t,n}}{\partial \gamma} = a_{44} \tau_{t\gamma,n} - \frac{1}{H_2} \frac{\partial u_{\gamma,n}}{\partial t} + \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \gamma} u_{t,n} \quad (n = \overline{0, N})
\end{aligned} \tag{2.2}$$

с граничными условиями

$$\sigma_{\gamma,n} = q_{\gamma,n}; \quad \tau_{s\gamma,n} = 0; \quad \tau_{t\gamma,n} = 0 \quad \text{при} \quad \gamma = \gamma_1; \tag{2.3}$$

$$\sigma_{\gamma,n} = 0; \quad \tau_{s\gamma,n} = 0; \quad \tau_{t\gamma,n} = 0 \quad \text{при} \quad \gamma = \gamma_2. \tag{2.4}$$

Для разделения переменных вдоль направляющей цилиндра, при сведении двумерной краевой задачи к одномерной, разрешающая система уравнений (2.2) приводится к новому виду таким образом, чтобы коэффициенты полученной разрешающей системы уравнений формально не препятствовали разделению переменных по координате t . С этой целью часть слагаемых системы уравнений (2.2), представляющих собой произведения разрешающих функций на коэффициенты, зависящие от двух координат t и γ , заменяются дополнительными функциями в виде (индекс n в обозначениях разрешающих функций и компонент нагрузки опустим)

$$\begin{aligned}
\varphi_1^j & = \frac{1}{H_2 R_t} \left\{ \sigma_\gamma; \tau_{s\gamma}; u_\gamma; u_s; \frac{1}{H_2 R_t} u_\gamma \right\} (j = \overline{1, 5}); \quad \varphi_2^j = \frac{1}{H_2 R_t} \{ \tau_{t\gamma}; u_t \} (j = \overline{1, 2}); \\
\varphi_3^j & = \frac{1}{H_2} \left\{ \frac{\partial \sigma_\gamma}{\partial t}; \frac{\partial u_\gamma}{\partial t}; \frac{\partial u_s}{\partial t} \right\} (j = \overline{1, 3}); \quad \varphi_4^j = \frac{1}{H_2} \left\{ \frac{\partial \tau_{t\gamma}}{\partial t}; \frac{\partial u_t}{\partial t}; \frac{1}{R_t} \frac{\partial u_t}{\partial t} \right\} (j = \overline{1, 3}); \tag{2.5} \\
\varphi_5 & = \frac{1}{H_2} \frac{\partial}{\partial t} \varphi_1^3; \quad \varphi_6 = \frac{1}{H_2} \frac{\partial}{\partial t} \varphi_3^3; \quad \varphi_7 = \frac{1}{H_2} \frac{\partial}{\partial t} \varphi_4^2.
\end{aligned}$$

Представим далее, разрешающие, введенные дополнительные функции (2.5) и компоненты нагрузки в виде разложений в ряды Фурье по координате t в виде

$$\tilde{X}(t, \gamma) = \sum_{k=0}^K \tilde{X}_k(\gamma) \cos \lambda_k t; \quad \tilde{Y}(t, \gamma) = \sum_{k=1}^K \tilde{Y}_k(\gamma) \sin \lambda_k t; \quad \lambda_k = \frac{2k\pi}{T} \quad (t_1 \leq t \leq t_2); \tag{2.6}$$

$$\tilde{X} = \{\sigma_\gamma, \tau_{s\gamma}, u_\gamma, u_s, \varphi_1^j, \varphi_4^j, \varphi_6, q_\gamma\}; \quad \tilde{Y} = \{\tau_{t\gamma}, u_t, \varphi_2^j, \varphi_3^j, \varphi_5, \varphi_7\},$$

где T – период. Подставляя ряды (2.6) в разрешающую систему уравнений (2.2) с учетом (2.5) и граничные условия (2.3), (2.4) после разделения переменных приходят к одномерной краевой задаче, описываемой системой обыкновенных дифференциальных уравнений относительно амплитудных значений рядов (2.6) в виде

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_{\gamma,k}}{d\gamma} &= \lambda_n \tau_{s\gamma,k} + (c_2 - 1) \varphi_{1,k}^1 - \varphi_{4,k}^1 + b_{22} \varphi_{1,k}^5 + b_{12} \lambda_n \varphi_{1,k}^4 + b_{22} \varphi_{4,k}^3; \\ \frac{d\tau_{s\gamma,k}}{d\gamma} &= -c_1 \lambda_n \sigma_{\gamma,k} + b_{11} \lambda_n^2 u_{s,k} - \varphi_{1,k}^2 - b_{12} \lambda_n \varphi_{1,k}^3 - b_{66} \varphi_{6,k} - (b_{12} + b_{66}) \lambda_n \varphi_{4,k}^2; \\ \frac{d\tau_{t\gamma,k}}{d\gamma} &= b_{66} \lambda_n^2 u_{t,k} - c_2 \varphi_{3,k}^1 - 2\varphi_{2,k}^1 - b_{22} \varphi_{5,k} - (b_{12} + b_{66}) \lambda_n \varphi_{3,k}^3 - b_{22} \varphi_{7,k}; \\ \frac{du_{\gamma,k}}{d\gamma} &= c_4 \sigma_{\gamma,k} + c_1 \lambda_n u_{s,k} - c_2 \varphi_{4,k}^2 - c_2 \varphi_{1,k}^3; \\ \frac{du_{s,k}}{d\gamma} &= a_{55} \tau_{s\gamma,k} - \lambda_n u_{\gamma,k}; \quad \frac{du_{t,k}}{d\gamma} = a_{44} \tau_{t\gamma,k} - \varphi_{3,k}^2 + \varphi_{2,k}^2 \quad (k = \overline{0, K}) \end{aligned} \quad (2.7)$$

с граничными условиями

$$\sigma_{\gamma,k} = q_{\gamma,k}; \quad \tau_{s\gamma,k} = 0; \quad \tau_{t\gamma,k} = 0 \quad \text{при } \gamma = \gamma_1; \quad (2.8)$$

$$\sigma_{\gamma,k} = 0; \quad \tau_{s\gamma,k} = 0; \quad \tau_{t\gamma,k} = 0 \quad \text{при } \gamma = \gamma_2. \quad (2.9)$$

Полученная краевая задача (2.7) – (2.9) решается устойчивым численным методом дискретной ортогонализации одновременно для всех гармоник разложений в ряды Фурье (2.6). На каждом шаге интегрирования амплитудные значения дополнительных функций вычисляются по текущим значениям амплитуд разрешающих функций с использованием метода аппроксимации функций дискретными рядами Фурье [18]. В начале интегрирования дополнительные функции определяются по заданным начальным значениям амплитуд разрешающих функций с учетом соответствующих граничных условий.

§3. Оценка точности и достоверности получаемых результатов.

Рассматриваются полые цилиндры с вогнутым гофрированным поперечным сечением, изготовленные из ортотропного материала при действии внутреннего давления. Срединная поверхность таких цилиндров задается в параметрическом виде укороченной гипоциклоидой [19]

$$x = (A - a) \cos \psi + \lambda a \cos \left(\frac{A - a}{a} \psi \right); \quad z = (A - a) \sin \psi - \lambda a \sin \left(\frac{A - a}{a} \psi \right), \quad (3.1)$$

где A – радиус неподвижной окружности; a ($a > 0$) – радиус подвижной окружности; λa ($\lambda < 1$) – расстояние до центра подвижной окружности; ψ ($0 \leq \psi \leq 2\pi$) – центральный угол в поперечном сечении.

При переходе от координаты t к координате ψ необходимо учитывать коэффициент перехода. Для функции $V(t(\psi), \gamma)$

$$\frac{dt}{d\psi} = \sqrt{\left(\frac{dx}{d\psi} \right)^2 + \left(\frac{dz}{d\psi} \right)^2} = \omega(\psi); \quad \frac{\partial V}{\partial \psi} = \frac{\partial V}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial \psi}; \quad \frac{\partial V}{\partial t} = \frac{1}{\omega(\psi)} \frac{\partial V}{\partial \psi}.$$

Радиус кривизны срединной поверхности имеет вид

$$R(\psi) = \omega^3(\psi) \left/ \left(\frac{dx}{d\psi} \frac{d^2z}{d\psi^2} - \frac{dz}{d\psi} \frac{d^2x}{d\psi^2} \right) \right.$$

Оценка достоверности и точности получаемых результатов при использовании рассмотренной методики проведена на основе следующих индуктивных приемов: а) сравнение результатов решения задачи с точным для тех случаев, когда оно существует; б) сходимость результатов, полученных на основе данной методики для некруговых цилиндров к результатам для круговых, когда параметры, характеризующие отклонение формы поперечного сечения от круговой, стремятся к нулю.

а) Решена задача о деформации ортотропной цилиндрической оболочки с такими геометрическими и механическими параметрами: длина оболочки $l = 120$, радиус окружности поверхности отсчета $r_0 = 60$, толщина оболочки $h = 20$, механические характеристики материала $E_s = 10 E_0$; $E_\psi = 2,5 E_0$; $E_\gamma = E_0$; $G_{s\psi} = 2 E_0$; $G_{\psi\gamma} = G_{s\gamma} = E_0$; $\nu_{s\psi} = 0,06$; $\nu_{\psi\gamma} = 0,1$; $\nu_{s\gamma} = 0,04$. Оболочка находится под действием внутреннего давления (1.2), на торцах имеют место граничные условия (1.1), что дает возможность получить точное решение задачи [3].

Результаты решения задачи приведены в табл. 1 для значений перемещений и напряжений в среднем сечении по длине на внутренней и внешней поверхностях цилиндра. Верхнее значение в каждом столбце соответствует точному решению задачи, а нижнее – полученному по используемой методике. В последнем столбце таблицы приведены значения относительной погрешности полученных результатов в зоне их экстремальных значений.

Из табл. 1 видно, что относительная погрешность получаемых результатов не превышает 5%.

Таблица 1

γ	$u_\gamma E_0 / q_0$	σ_s / q_0	σ_ψ / q_0	Относительная погрешность ε , %
$-h/2$	59,55	-3,516	2,517	1,07 – 4,79
	60,19	-3,348	2,559	
$h/2$	46,97	2,901	1,852	0,7 – 1,64
	47,57	2,762	1,865	

б) Также, решена задача о напряженно-деформированном состоянии изотропного полого цилиндра с вогнутыми соединенными полугофрами в поперечном сечении при действии внутреннего давления (1.2). Поверхность отсчета задана уравнением укороченной гипоциклоиды (3.1). Параметр λ характеризует амплитуду полугофров и при $\lambda = 0$ в поперечном сечении срединная поверхность обращается в окружность с радиусом $R_0 = A - a$ (табл. 2). Таким образом, при условии $\lambda \rightarrow 0$ решение задачи стремится к решению для кругового цилиндра.

Таблица 2

$R_0 = A - a$	λ	ψ	R_ψ	Относительная погрешность ε , %
18	0,001	0	17,86	0,8
		$\pi/7$	18,14	
	0,002	0	17,72	1,6
		$\pi/7$	18,29	

Задачу решено при таких исходных данных: длина цилиндров $l = 60$, толщина $h = 2$, радиус неподвижной окружности $A = 21$, радиус подвижной окружности $a = 3$ параметр $\lambda = 0,001$; $0,002$, модуль Юнга E , коэффициент Пуассона $\nu = 0,3$.

Результаты решения задачи представлены в табл. 3 в среднем сечении по длине цилиндра для значений нормальных перемещений и напряжений на внутренней и внешней поверхностях цилиндра для двух значений направляющей: в зоне соединения полугофров $\psi = 0$ и в зоне их вершины $\psi = \pi / 7$.

При $\lambda = 0$ имеем круговой цилиндр, для которого существует точное решение. При рассматриваемых значениях параметра $\lambda = 0,001; 0,002$, отклонение формы поперечного сечения срединной поверхности от круговой в разных сечениях направляющей не превышает 2 %.

Таблица 3

γ	ψ	$u_\gamma E_0 / q_0$			σ_ψ / q_0			Относительная погрешность $\varepsilon, \%$
		λ						
		0	0,001	0,002	0	0,001	0,002	
$h / 2$	0	158,43	157,95	157,46	8,88	8,96	9,05	0,3 – 1,9
	$\pi / 7$	158,43	158,92	159,42	8,88	8,79	8,71	
$h / 2$	0	152,39	151,91	151,42	8,16	8,08	8,01	
	$\pi / 7$	152,39	152,88	153,38	8,16	8,23	8,31	

Как видно из данных, приведенных в табл. 3, значения перемещений и напряжений при незначительном отклонении формы поперечного сечения от круговой, при условии $\lambda \rightarrow 0$ не превышают 2% по сравнению с соответствующими значениями для кругового цилиндра.

§4. Числовые результаты и их анализ.

На основе изложенного подхода решена задача о напряженно-деформированном состоянии полых ортотропных цилиндров с поперечным сечением в виде соединенных вогнутых полугофров, срединная поверхность которых описана уравнениями (3.1). Цилиндры находятся под действием внутреннего давления (1.2).

Задача решена при таких значениях геометрических и механических параметров: длина цилиндров $l = 80$, толщина $h = 0,8$, радиус неподвижной окружности $A = 16$, радиус подвижной окружности $a = 2,4$ параметр $\lambda = 0,3; 0,4$, механические характеристики ортотропного материала $E_s = 3,68 E_0$; $E_\psi = 2,68 E_0$; $E_\gamma = 1,1 E_0$; $G_{s\psi} = 0,5 E_0$; $G_{\psi\gamma} = 0,41 E_0$; $G_{s\gamma} = 0,45 E_0$; $\nu_{s\psi} = 0,105$; $\nu_{\psi\gamma} = 0,431$; $\nu_{s\gamma} = 0,405$.

Проведено сравнение характеристик напряженного состояния рассматриваемых цилиндров с цилиндрами, изготовленными из изотропного материала с такими механическими параметрами: модуль Юнга $E = E_0$, коэффициент Пуассона $\nu = 0,3$.

Результаты решения задачи приведены на рис. 1, 2 и в табл. 4 – 6 в среднем сечении по длине цилиндра для нормальных перемещений u_γ и окружных напряжений σ_ψ .

На рис. 1 показано поперечное сечение рассматриваемых ортотропных (рис. 1, б, з) и изотропных (рис. 1 а, в) цилиндров до деформации (семейство линий 1), а также с учетом нормальных перемещений u_γ на ограничивающих ($\gamma = \pm h / 2$) и срединной ($\gamma = 0$) поверхностях (семейство линий 2) в зависимости от количества полугофров, определяемым отношением неподвижной и подвижной окружностей (A / a) для параметра $\lambda = 0,3$. Цилиндрам с четырьмя полугофрами соответствуют рис. 1 а, б ($a = 4$), с восемью полугофрами – рис. 2, в, з ($a = 2$).

Как видно из рис. 1 максимальных значений перемещения достигают в вершинах полугофров $\psi = \pi / 8$ для $a = 2$ и $\psi = \pi / 4$ для $a = 4$, где жесткость цилиндров меньше, по сравнению с местами соединения полугофров ($\psi = 0$). При этом выбор ортотропного материала существенно снижает деформирование цилиндра в поперечном сечении.

Для цилиндров с большей амплитудой полугофров ($\lambda = 0,4$) картина распределения нормальных перемещений качественно сохраняется.

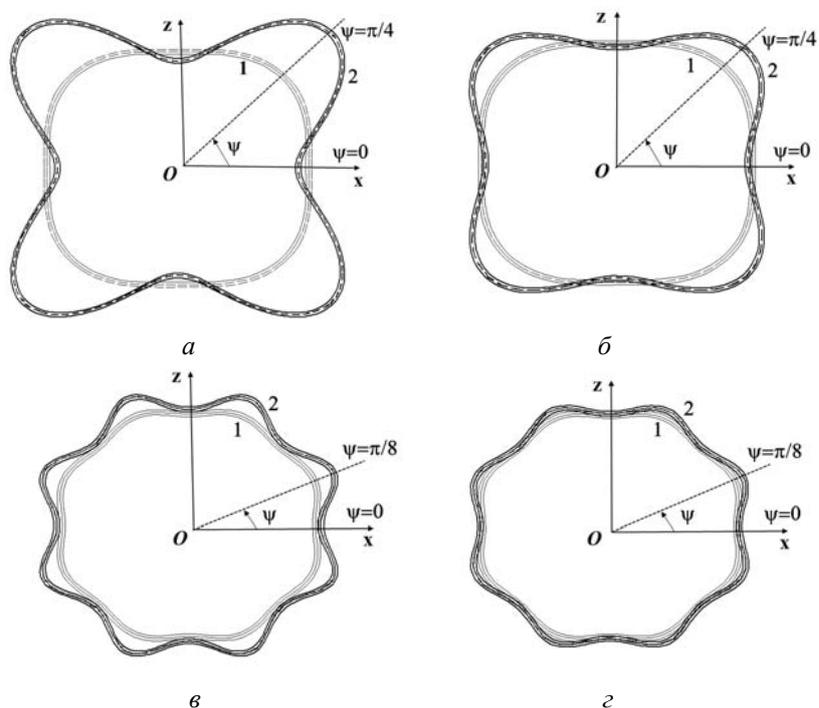


Рис. 1

В табл. 4 приведены значения нормированных безразмерных перемещений, направленных по нормали к срединной поверхности ($\gamma = 0$) для изотропного (I) и ортотропного (II) цилиндра в двух сечениях направляющей: в местах соединения полугофров ($\psi = 0$) и в их вершинах ($\psi = \pi / 8$ для $a = 2$; $\psi = \pi / 4$ для $a = 4$).

Из приведенных данных следует, что увеличение амплитуды полугофров приводит к увеличению значений максимальных нормальных перемещений в 1,2 раза для $a = 2$ и в 1,5 раза для $a = 4$. Кроме того, в цилиндрах с восемью гофрами выбор ортотропного материала способствует снижению величины нормальных перемещений в 2,3 – 2,6 раза, а в цилиндрах с четырьмя гофрами – в 2,1 – 2,4 раза.

Таблица 4

λ	$u, E_0 / q_0$							
	$a = 2$				$a = 4$			
	$\psi = 0$		$\psi = \pi/8$		$\psi = 0$		$\psi = \pi/4$	
	I	II	I	II	I	II	I	II
0,3	357,57	137,99	1461,66	616,79	-769,18	-335,90	4875,74	2031,56
0,4	478,68	197,96	1703,56	738,10	-268,24	-129,99	7159,31	2982,82

Увеличение количества полугофров с 4 до 8, вследствие увеличения жесткости цилиндра, приводит к уменьшению величины максимальных перемещений в 3,3 раза для $\lambda = 0,3$ и в 4,2 раза для $\lambda = 0,4$ как для изотропного, так и для ортотропного цилиндров.

На рис. 2 приведены графики распределения окружных напряжений σ_ψ вдоль направляющей, а в табл. 5, 6 значения окружных напряжений в отдельных точках направляющей на внутренней (рис. 4, а, б, табл. 5) и внешней (рис. 4, в, г, табл. 6) поверхностях цилиндра.

На рис. 2 сплошная линия соответствует цилиндрам с восемью полугофрами ($a = 2$), штриховая – с четырьмя полугофрами ($a = 4$). При этом параметр оси направ-

ляющей ζ зависит от количества полугофров цилиндра и вычисляется как $\zeta = 3A/a$. Кривые 1 соответствуют цилиндрам с параметром $\lambda = 0,3$, а кривые 2 – $\lambda = 0,4$. Изотропным цилиндрам соответствуют графики на рис. 2, а, в, ортотропным – на рис. 2, б, г.

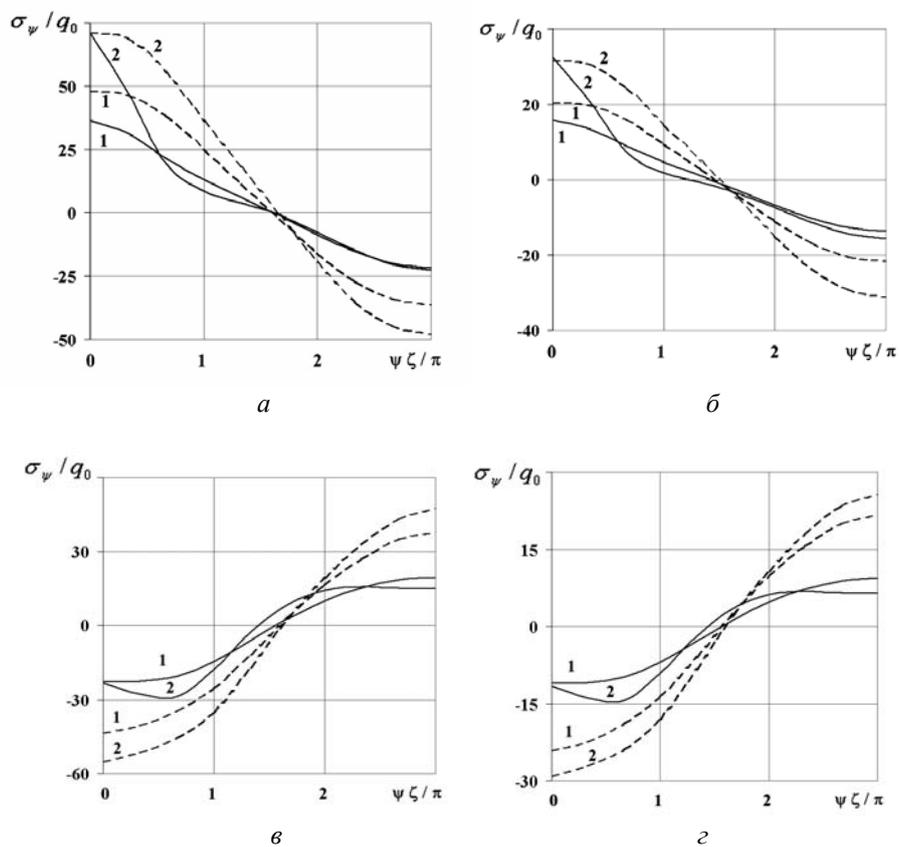


Рис. 2

В табл. 5, 6 данные для изотропного материала обозначены цифрой I, для ортотропного – II, соответственно.

Таблица 5

λ	σ_{ψ}^{-} / q_0							
	$a = 2$				$a = 4$			
	$\psi = 0$		$\psi = \pi/8$		$\psi = 0$		$\psi = \pi/4$	
	I	II	I	II	I	II	I	II
0,3	36,39	15,85	-21,63	-13,70	48,08	20,31	-36,20	-21,82
0,4	70,95	32,38	-22,48	-15,64	70,94	31,39	-47,89	-31,15

Таблица 6

λ	σ_{ψ}^{+} / q_0							
	$a = 2$				$a = 4$			
	$\psi = 0$		$\psi = \pi/8$		$\psi = 0$		$\psi = \pi/4$	
	I	II	I	II	I	II	I	II
0,3	-22,56	-11,01	19,34	9,39	-43,54	-24,14	37,80	21,67
0,4	-23,17	-11,64	14,88	6,41	-55,24	-29,17	47,30	25,57

Анализ приведенных результатов свидетельствует о том, что характер распределения окружных напряжений вдоль направляющей подобен характеру распределения перемещений, как для изотропного, так и для ортотропного цилиндров. При этом выбор ортотропного материала приводит к уменьшению максимальных абсолютных значений напряжений в 2,2 – 2,4 раза на внутренней поверхности и в 1,8 – 2,3 раза на внешней.

Кроме того, увеличение амплитуды полугофров приводит к увеличению значений напряжений приблизительно в 1,9 раза на внутренней поверхности для $a = 2$ и в 1,3 – 1,5 раза для $a = 4$.

На внешней поверхности цилиндра с ростом параметра λ абсолютные максимальные значения напряжений увеличиваются в 1,02 – 1,3 раза для цилиндров с восемью полугофрами ($a = 2$) и в 1,3 раза – с четырьмя полугофрами ($a = 4$).

Заключение.

Решена задача о напряженно-деформированном состоянии полых ортотропных цилиндров с поперечным сечением в виде вогнутых соединенных полугофров, описанных укороченной гипоциклоидой в пространственной постановке на основе метода аппроксимации функций дискретными рядами Фурье. Тестирование используемого подхода путем сравнения с точными решениями частных задач показало правомочность его применения в рассматриваемом классе ортотропных упругих тел.

Проведен анализ напряженного состояния полых некруговых цилиндров, изготовленных из изотропного и ортотропного материала. Показано, что выбор ортотропного материала приводит к уменьшению показателей напряженно-деформированного состояния цилиндров с поперечным сечением в виде вогнутых полугофров.

РЕЗЮМЕ. В просторовій постановці із застосуванням аналітичних методів відокремлення змінних, апроксимації функцій дискретними рядами Фур'є та чисельного методу дискретної ортогоналізації проведено дослідження напруженого стану порожнистих циліндрів з поперечним перерізом у вигляді увігнутих напівгофрів, що виготовлені з ортотропного та ізотропного матеріалу. Результати розв'язування задачі наведено у вигляді графіків та діаграм розподілу полів переміщень і напружень. Проведено аналіз отриманих результатів.

1. Годунов С. К. О численном решении краевых задач для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений // Успехи матем. наук. – 1961. – 16, № 3. – С. 171 – 174.
2. Григоренко Я.М., Василенко А.Т., Емельянов И.Г. и др. Статика элементов конструкций. – К.: "А.С.К.", 1999. – 379 с. (Механика композитов: В 12 томах; Т.8).
3. Григоренко Я.М., Влайков Г.Г., Григоренко А.Я. Численно-аналитическое решение задач механики оболочек на основе различных моделей. – К.: Академперіодика, 2006. – 472 с.
4. Емельянов И.Г. Определение напряженного состояния оболочечных конструкций с применением дискретных рядов Фурье // Вычисл. мех. сплош. сред. – 2015. – 8, № 3. – С. 245 – 253.
5. Федорченко Л. М., Жук Я.О. Аналіз напружено-деформівного стану ортотропної циліндричної оболонки при різних способах закріплення контуру // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія : Фізико-математичні науки. – 2015. – Вип. 1. – С. 49 – 52.
6. Хімич О.М., Ніколаєвська О.А., Чистякова Т.В. Про деякі способи підвищення точності комп'ютерних обчислень // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія : Фізико-математичні науки. – 2017. – Вип. 15. – С. 249 – 254.
7. Хімич О.М. Суперкомп'ютерні технології та математичне моделювання складних систем // Вісник НАН України. – 2018. – № 5. – С. 69 – 72.
8. Шацький І.П., Струк А.Б. Напружений стан трубопроводу в зонах локального руйнування ґрунту // Пробл. прочности. – 2009. – № 5. – С. 127 – 133.
9. Abrosov Yu.Yu., Maximuk V.A., Chernyshenko I.S. Influence of Cross-Sectional Ellipticity on the Deformation of a Long Cylindrical Shell // Int. App. Mech. – 2016. – 52, N 5. – С. 529 – 534.
10. Belov V.K., Zhelezov L.P., Ognyanova T.S. Research on Nonlinear Deformation and Stability of an Advanced Aircraft Fuselage Composite Section under Pure Bending // Russian Aeronautics. – 2017. – 60, N 4. – С. 514 – 522.

11. *Bespalova E.I.* Generalized Method of Finite Integral Transforms in Static Problems for Anisotropic Prisms // *Int. App. Mech.* – 2018. – **54**, N 1. – С. 41 – 55.
12. *Grigorenko A.Ya., Borisenko M.Yu., Boichuk E.V., Prigoda A.P.* Numerical Determination of Natural Frequencies and Modes of the Vibrations of a Thick-Walled Cylindrical Shell // *Int. App. Mech.* – 2018. – **54**, N 1. – С. 75 – 84.
13. *Grigorenko A.Ya., Pliska E.N., Sorochenko G.V., Tormakhov N.N.* Application of Methods of Numerical Analysis for Studying Mechanical Processes in Biomechanics // *Int. App. Mech.* – 2018. – **54**, N 3. – P. 336 – 372.
14. *Grigorenko Ya.M., Grigorenko A.Ya., Zakhariichenko L.I.* Analysis of Influence of the Geometrical Parameters of Elliptic Cylindrical Shells with Variable Thickness on their Stress-Strain State // *Int. App. Mech.* – 2018. – **54**, N 2. – С. 155 – 162.
15. *Grigorenko Ya.M., Rozhok L.S.* Stress State of Longitudinally Corrugated Hollow Cylinders with Different Cross-Sectional Curvature // *Int. App. Mech.* – 2016. – **52**, N 6. – С. 581 – 586.
16. *Grigorenko Ya.M., Rozhok L.S.* Effect of Change in the Curvature Parameters on the Stress State of Concave Corrugated Hollow Cylinders // *Int. App. Mech.* – 2018. – **54**, N 3. – P. 266 – 273.
17. *Grigorenko Ya.M., Rozhok L.S.* Stress State of Hollow Cylinders With Convex Corrugated Cross Sections // *J. Math. Sci.* – 2014. – **198**, N 2. – P. 158 – 165.
18. *Hamming R.W.* Numerical Methods for Scientists and Engineers. – New-York: MG Graw-Hill, 1962. – 400 p.
19. *Korn G.A., Korn T.M.* Mathematical Handbook for Scientists and Engineers. – New-York: MG Graw-Hill, 1961. – 720 p.
20. *Lekhnitsky S.G.* Theory of an Anisotropic Body. MIR Publishers, Moscow. – 1981. – 415 p.
21. *Storozhuk E.A., Yatsura A.V.* Analytical-Numerical Solution of Static Problems for Noncircular Cylindrical Shells of Variable Thickness // *Int. App. Mech.* – 2017. – **53**, N 3. – С. 313 – 325.
22. *Storozhuk E.A., Yatsura A.V.* Exact Solutions of Boundary-Value Problems for Noncircular Cylindrical Shells // *Int. App. Mech.* – 2016. – **52**, N 4. – С. 386 – 397.
23. *Thakur S.N., Ray Ch., Chakraborty S.* A new efficient higher-order shear deformation theory for a doubly curved laminated composite shell // *Acta Mechanica* – 2017. – **228**, N 1. – С. 69 – 87

Поступила 27.06.2018

Утверждена в печать 04.06.2019