

Я. Я. Рущицкий, В. Н. Юрчук

О ВЛИЯНИИ ТРЕТЬЕГО ПРИБЛИЖЕНИЯ ПРИ АНАЛИЗЕ
ЭВОЛЮЦИИ НЕЛИНЕЙНО УПРУГОЙ Р-ВОЛНЫ. ЧАСТЬ 1.

*Институт механики им. С.П.Тимошенко НАНУ,
ул. Нестерова, 3, 03057, Киев, Украина; e-mail: rushch@inmech.kiev.ua*

Abstract. The nonlinear plane longitudinal elastic wave of displacement is studied theoretically and numerically within the framework of the Murnaghan model for two forms of initial profile – harmonic and bell-shaped ones. The basic novelty consists in that the evolution of waves is analyzed by the approximate methods by taking into account the first three approximations. The analysis of the harmonic wave is considered for the only comparison with the new results for the bell-shaped wave. Some essential distinctions between the evolution of waves are shown. First, the symmetric initial profiles are transformed owing to evolution into the distorted ones in a different way: symmetrically for harmonic profile and asymmetrically for the bell-shaped profile. Second, the third approximation introduced the fourth harmonic for a harmonic wave when this wave being analyzed by the method of successive approximations, whereas the bell-shaped wave is characterized in the third approximation in a very different way when being analyzed by the method of restrictions on displacement gradient. On the sufficiently long distances of wave propagation, the one-hump bell-shaped wave is transformed into the two-hump one. These humps adjoin one to another and decrease in twice their bottoms. The third approximation permits to observe the new wave effects: non-symmetry of the left and right humps relative to their peaks and non-symmetry of the humps relative to each other – sinking of the left hump and elevation of the right one. The findings are commented on.

Key words: nonlinear elastic P-wave; Murnaghan potential; approximate method; harmonic and bell-shaped initial wave profiles; evolution; distortion.

1. Введение.

В представленном исследовании используется пятиконстантная модель Мурнагана нелинейного упругого деформирования материала [1 – 3, 5, 7 – 11]. Как известно, упругий потенциал Мурнагана квадратично и кубически нелинейен относительно компонентов тензора деформаций Коши – Грина $\varepsilon_{nm} = (1/2)(u_{n,m} + u_{m,n} + u_{k,n}u_{k,m})$ (u_k – компоненты вектора смещений)

$$W(\varepsilon_{ik}) = (1/2)\lambda(\varepsilon_{mm})^2 + \mu(\varepsilon_{ik})^2 + (1/3)A\varepsilon_{ik}\varepsilon_{im}\varepsilon_{km} + B(\varepsilon_{ik})^2\varepsilon_{mm} + (1/3)C(\varepsilon_{mm})^3 \quad (1)$$

(λ, μ, A, B, C – упругие постоянные модели Мурнагана).

Выбирается вариант, в котором при представлении потенциала Мурнагана через градиенты смещений учтены лишь квадратично и кубически нелинейные составляющие

$$W = (1/2)\lambda(u_{m,m})^2 + (1/4)\mu(u_{i,k} + u_{k,i})^2 + (\mu + (1/4)A)u_{i,k}u_{m,i}u_{m,k} + (1/2)(\lambda + B)u_{m,m}(u_{i,k})^2 + (1/12)Au_{i,k}u_{k,m}u_{m,i} + (1/2)Bu_{i,k}u_{k,i}u_{m,m} + (1/3)C(u_{m,m})^3. \quad (2)$$

Рассматривается движение, в котором смещения зависят лишь от одной пространственной координаты и времени $u_k = u_k(x_1, t)$ (смещения в направлении оси Ox_1 в декартовой системе координат $Ox_1x_2x_3$). В этом случае вид потенциала (2) упрощается

$$W = (1/2) \left[(\lambda + 2\mu)(u_{1,1})^2 + \mu \left[(u_{2,1})^2 + (u_{3,1})^2 \right] \right] + \left[\mu + (1/2)\lambda + (1/3)A + B + (1/3)C \right] (u_{1,1})^3 + (1/2)(\lambda + B)u_{1,1} \left[(u_{2,1})^2 + (u_{3,1})^2 \right]. \quad (3)$$

Из (3) получаются нелинейные волновые уравнения для трех типов поляризованных плоских волн (P-, SH-, SV- волны). Простейшие нелинейные волновые уравнения являются квадратично нелинейными. В частности, движение P-волны описывается уравнением

$$\rho u_{1,tt} - (\lambda + 2\mu) u_{1,11} = N_1 u_{1,11} u_{1,1} + N_2 (u_{2,11} u_{2,1} + u_{3,11} u_{3,1}); \quad (4)$$

$$N_1 = [3(\lambda + 2\mu) + 2(A + 3B + C)]; \quad N_2 = \lambda + 2\mu + (1/2)A + B. \quad (5)$$

Далее анализ ограничивается задачей, когда первоначально в материале возбуждается лишь P-волна [2] и основным нелинейным явлением является самогенерация волны. Тогда нелинейное уравнение (4) принимает вид

$$\rho u_{1,tt} - (\lambda + 2\mu) u_{1,11} = N_1 u_{1,11} u_{1,1} \rightarrow u_{1,tt} - (v_L)^2 u_{1,11} = (N_1/\rho) u_{1,11} u_{1,1}, \quad (6)$$

где $v_L = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$ – фазовая скорость P-волны в линейном приближении.

К настоящему моменту уравнения (6) анализировались приближенно в рамках трех методов – последовательных приближений, медленно изменяющихся амплитуд, ограничения на градиент смещения [1 – 3, 5, 7 – 15]. Изучались гармонические волны и одиночные с разными начальными профилями. Большинство результатов относится к анализу нелинейного поведения волн в рамках двух первых приближений. В то же время гармонические волны изучены в рамках многих приближений [8, 9, 12]. Однако особенности эволюции волны выявляются наиболее четко лишь при численном моделировании. Поскольку такая задача является многопараметрической и на результаты существенно влияет выбор материала, длины волны и амплитуды волны, то полученные сценарии эволюции волны отличаются довольно значительно. Поэтому любые новые числовые результаты, полученные для новых материалов или новых параметров волны, всегда дополняют общую картину эволюции.

В настоящем исследовании выбраны гармонический и колоколообразный профили с целью исследовать именно эволюцию колоколообразной волны. Гармоническая волна здесь играет вспомогательную роль, хотя и исследована численно для новых материалов. Целью объединения анализа для двух профилей является сравнение сценариев гармонической и одиночной волн, профили которых симметричны. Основным новшеством в анализе одиночной волны является учет третьего приближения. При этом следует отметить, что учет третьего приближения уже анализировался ранее для иных материалов, где обнаружено, что решающим фактором для выявления достаточно видимого эффекта эволюции является расстояние, которое прошла волна.

2. Приближенные подходы к анализу эволюции начального профиля волны применительно к нелинейному волновому уравнению (6).

Задача об эволюции гармонической волны исследовалась ранее методом последовательных приближений [1 – 3, 8]. Согласно методу, для определения любого приближения используется рекуррентное соотношение $u_{1,tt}^{(n)} - (v_L)^2 u_{1,11}^{(n)} = (N_1/\rho) u_{1,11}^{(n-1)} u_{1,1}^{(n-1)}$ и решение представляется в виде

$$u_1(x_1, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_1^{(n)}(x_1, t) = u_1^{(1)}(x_1, t) + u_1^{(2)}(x_1, t) + u_1^{(3)}(x_1, t) + \dots$$

Решение для нулевого приближения является линейным и для заданных начальной максимальной амплитуды $u_{1(0)}$, волнового числа k_L и частоты ω имеет вид [1 – 3, 11]

$$u_1^{(1)}(x, t) = u_{1(1)} \cos(k_L x - \omega t) \left((\omega/k_L) = v_L \right). \quad (7)$$

Соответствующее решение для первого приближения является таким [1 – 3, 8, 11]:

$$u_1^{(2)}(x_1, t) = \left[N_1/8(\lambda + 2\mu) \right] (u_{1(0)})^2 k_L^2 x_1 \cos 2(k_L x_1 - \omega t). \quad (8)$$

Далее удобно представить решение в рамках двух первых приближений в виде

$$u_1^{(1+2)}(x, t) = u_{1o} \cos \sigma + u_{1o} M_L x_1 \cos 2\sigma;$$

$$M = \frac{N_1}{8(\lambda+2\mu)} u_{1o} (k_L)^2 = \frac{1}{8\rho} N_1 u_{1o} \frac{k_L^2}{v_L^2} = \frac{1}{8\rho} N_1 u_{1o} \frac{\omega^2}{v_L^4}.$$

Третье приближение имеет вид [9, 10]

$$u_1^{(3)} = u_{1(0)} (M_L)^3 (x_1)^3 \left\{ -\frac{8}{3} + \frac{13}{2k_L x_1} \sin 4\sigma + \left[-\frac{4}{3} + \frac{29}{8(k_L)^2 (x_1)^2} \right] \cos 4\sigma \right\}. \quad (9)$$

Итак, третье приближение вводит в решение четвертую гармонику. Соответственно, четвертое приближение будет вводить восьмую гармонику (на каждом шаге гармоники удваиваются).

Решение в рамках первых трех приближений имеет вид [8 – 11]

$$u_2^{(1+2+3)}(x_1, t) = u_1^{(0)}(x_1, t) + u_1^{(1)}(x_1, t) + u_1^{(2)}(x_1, t) = u_{1o} \cos \sigma + u_{1o} M_L x_1 \cos 2\sigma + u_{1o} (M_L)^3 (x_1)^3 \left[-\frac{8}{3} + \frac{5}{2k_L x_1} \sin 4\sigma + \left(-\frac{4}{3} + \frac{11}{8(k_L x_1)^2} \right) \cos 4\sigma \right]. \quad (10)$$

Итак, характер эволюции в рамках трех приближений определяется параметром M_L , начальной амплитудой и волновым числом в линейном приближении. Далее будет проведено числовое моделирование эволюции гармонической волны для двух новых материалов и сравнение с аналогичным исследованием колоколообразной волны.

Как известно [8 – 11], анализ эволюции одиночных волн методом последовательных приближений приводит к существенным математическим сложностям и поэтому далее к анализу колоколообразной волны будет применен метод ограничения на градиент смещения. Для этого удобно представить уравнение (7) в виде

$$u_{1,n} - \left\{ (v_L)^2 + (N_1/\rho) u_{1,1} \right\} u_{1,11} = 0 \rightarrow u_{1,n} - \left\{ 1 + \alpha u_{1,1} \right\} (v_L)^2 u_{1,11} = 0; \quad (11)$$

$$\alpha = \left[N_1 / (\lambda + 2\mu) \right].$$

Согласно методу начальный профиль волны описывается достаточно гладкой функцией $u(x_1, t=0) = F(x_1)$ и волна распространяется в виде волны Даламбера

$$u(x_1, t) = F(x_1 - vt), \quad (12)$$

где переменная скорость волны определяется выражением

$$v = \sqrt{1 + \alpha u_{1,1}} c_L. \quad (13)$$

На следующем шаге корень в (13) записывается в виде ряда

$$\sqrt{1 + \alpha u_{1,1}} = (1 + \alpha u_{1,1})^{1/2} = 1 + (1/2)\alpha u_{1,1} - (1/8)(\alpha u_{1,1})^2 + \dots$$

при ограничении

$$|\alpha u_{1,1}| \ll 1. \quad (14)$$

Малость величины $\alpha u_{1,1}$ позволяет представить приближенно решение (12) в виде первых трех аппроксимаций

$$u_1(x_1, t) \cong F \left\{ a(x_1 - v_L t) - (1/2)t\alpha v_L u_{1,1} \left[1 - (1/4)\alpha v_L u_{1,1} \right] \right\}. \quad (15)$$

Следует заметить, что ранее приближенное решение записывалось в виде первых двух аппроксимаций. Поэтому приближение (15) вносит элемент новизны в последующий анализ.

Также важно заметить, что адекватность приближения (15) зависит от точности выполнения условия (14), которое включает ограничения на два параметра: параметр $\alpha = 3 + 2(A + 3B + C)/(\lambda + 2\mu)$ и градиент перемещения $u_{1,1}$.

Обозначим фазу волны с постоянной фазовой скоростью через $\sigma = a(x_1 - c_L t)$ и введем дополнительный малый параметр через

$$|\delta| = \left| - (1/2)t\alpha v_L u_{1,1} \left[1 - (1/4)\alpha v_L u_{1,1} \right] \right| \ll 1. \quad (16)$$

Теперь решение (15) можно представить в виде ряда Тейлора

$$u(x_1, t) \approx F(\sigma + \delta) \approx F(\sigma) + F'(\sigma)\delta + (1/2)F''(\sigma)\delta^2 + \dots \quad (17)$$

Ограничим далее анализ первыми тремя членами в (17) по причине малости δ . Поскольку малость $|\alpha u_{1,1}|$ уже предположена в (14), то это фактически условие на $\alpha v_L t$.

Далее потребуется выражение для градиента смещения, которое легко получить из (17)

$$u_{1,1}(x_1, t) \approx F'_\sigma(\sigma + \delta) \cdot \sigma'_x = F'_\sigma(\sigma + \delta) \cdot \left\{ a - (1/2)t\alpha v_L u_{1,1} \left[1 - (1/2)t\alpha v_L \right] \right\} \approx a F'_\sigma(\sigma).$$

Это выражение позволяет записать решение (16) в виде

$$\begin{aligned} u_1(x_1, t) &\approx F(\sigma) - F'_{,1}(\sigma) a^2 \left\{ (1/2)t\alpha v_L F'_{,1}(\sigma) \left[1 - (1/4)\alpha a F'_{,1}(\sigma) \right] \right\} = \\ &= F(\sigma) - (1/2)\alpha a^2 v_L t \left[F'_{,1}(\sigma) \right]^2 \left[1 - (1/4)\alpha a v_L F'_{,1}(\sigma) \right]. \end{aligned} \quad (18)$$

Приближенное представление решения (18) имеет общий характер и для разных конкретно выбранных функций F будет описывать нелинейные волновые эффекты, состоящие в возникновении второй и третьей гармоник в случае гармонической волны или подобных им новых составляющих в случае одиночной волны и увеличении амплитуды со временем распространения волны.

Далее рассматривается профиль в виде функции Гаусса $F(x_1) = e^{-((ax_1)^2/2)}$ (одиночная колоколообразная волна). Для одиночной волны a определяет ширину подошвы волны. Этот параметр важен для оценки соотношения волны к модели малых или немалых градиентов смещений. Отношение максимальной амплитуды волны к длине ее подошвы как раз позволяет сделать такую оценку.

3. Параметры материала и волны в последующем числовом моделировании.

Выберем два металлических композитных материала (матрица – алюминий, наполнитель – вольфрам) с такими механическими параметрами (система СИ) [1, 8]:

Материал 51 (объемное содержание матрицы равно 0,8) –

$$\rho = 0,594 \cdot 10^{-4}; \quad \lambda = 5,59 \cdot 10^{-10}; \quad \mu = 3,26 \cdot 10^{-10};$$

$$A = -0,658 \cdot 10^{-11}; B = -2,18 \cdot 10^{-11}; C = -4,35 \cdot 10^{-11}; c_L = 4,515 \cdot 10^3; \alpha = -16,072.$$

Материал 52 (объемное содержание матрицы равно 0,6) –

$$\rho = 0,918 \cdot 10^{-4}; \lambda = 11,6 \cdot 10^{-10}; \mu = 0,721 \cdot 10^{-10};$$

$$A = -1,33 \cdot 10^{-11}; B = -4,45 \cdot 10^{-11}; C = -9,5 \cdot 10^{-11}; c_L = 3,769 \cdot 10^3; \alpha = -34,08.$$

Параметры гармонической волны выбирались следующими: дополнительно к выбранной ранее скорости волны $c_L = (\omega/k_L)$ выбиралась начальная частота ω из ультразвукового диапазона волн и уже при известном волновом числе $k_L = (\omega/c_L)$ пересчитывалась длина волны по формуле $L = (2\pi/k_L)$ (для каждого материала своя длина волны)

$$\omega = 1,5 \cdot 10^6; L = 0,018 (\text{материал 51}); \omega = 1,5 \cdot 10^6; L = 0,015 (\text{материал 52}).$$

Для одиночной волны с профилем в виде функции Гаусса (которая является функцией конечного веса) принимается предположение, что длиной подошвы волны L является интервал (расстояние), для которого площадь под графиком начального профиля волны вне этого интервала ничтожно мала.

Тогда для функции Гаусса (колоколообразной функции) $e^{-(x^2/2\sigma^2)} = e^{-[(x/\sigma)^2/2]}$ по правилу 3σ длина подошвы профиля принимается равной 6σ . Поэтому в представлении профиля в виде $F(x_1) = e^{-[(ax_1)^2/2]}$ параметр a определяет длину подошвы по формуле $\sigma = (1/a)$. Для исследуемых двух материалов начальная подошва выбрана одинаковой и поэтому $L = \{0,0375; 0,0187\}$.

Рассмотрено 16 вариантов первоначального задания параметров Р-волны (2 варианта материала, 2 варианта аналитического представления профиля, 2 варианта длины (подошвы) волны, 2 варианта начальной амплитуды).

4. Числовой анализ волны с гармоническим профилем.

По формуле (10) построены двумерные графики с координатами «смещение u_1 – пройденное волной расстояние x_1 ». Всего рассмотрено 8 наборов (2 материала, 2 варианта длины волны, 2 варианта максимальной начальной амплитуды). Каждый набор включает графики с профилями, которые наложены один на другой в рамках сравнения приближений. Графики отличаются формой профиля волны для различных расстояний – от начального положения волны до положения на расстоянии во много десятков повторений длины волны, где влияние нелинейности уже проявляется существенно и искажение гармонического профиля вполне наблюдаемо визуально.

На рис. 1 приведены графики для варианта, соответствующего таким значениям параметров: материал М51, $L = 0,018$, $\omega = 1,5 \cdot 10^6$, $a_0 = 1 \cdot 10^{-6}$.

Рис. 1, а соответствует начальному этапу движения волны для всех трех приближений. Рис. 1, б соответствует тому этапу движения волны, когда нелинейность только начинает проявляться. Рис. 1, в – более продолжительному движению волны (примерно на расстоянии 15 повторений длины волны) и первому приближению (верхняя линия для положительных значений амплитуды), первому + второму (нижняя линия для положительных значений амплитуды), а также первому + второму + третьему (линия для положительных значений амплитуды, которая совпадает со второй на данном интервале). Рис. 1, г соответствует в два раза более продолжительному движению волны (примерно 30 повторений длины волны) и первому (верхняя линия для положительных значений амплитуды), первому + второму (средняя линия для положительных значений амплитуды) и первому + второму + третьему (нижняя линия для положительных значений амплитуды).

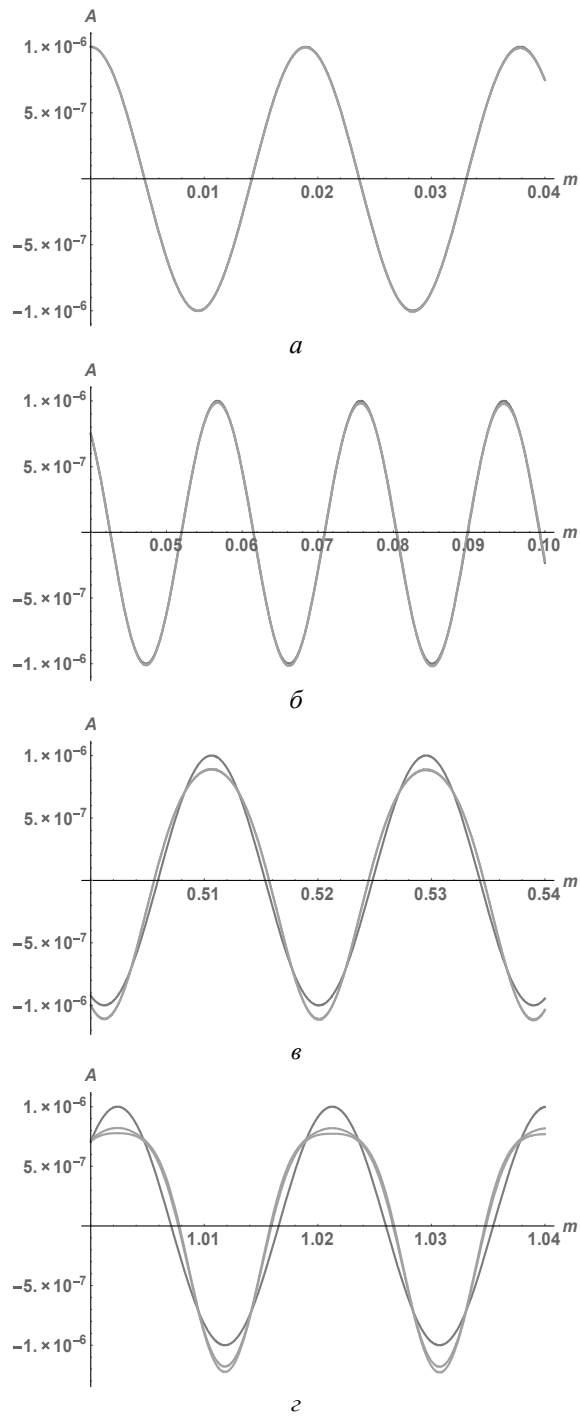
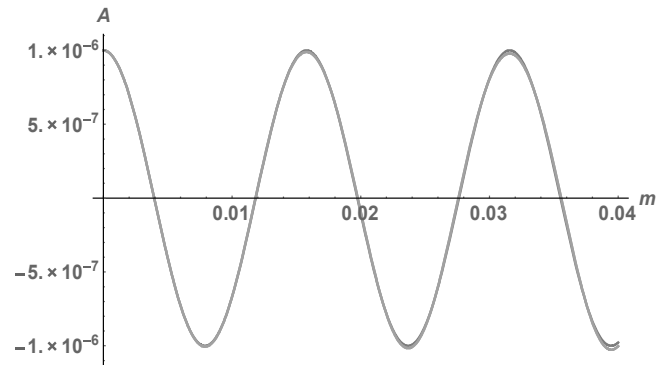


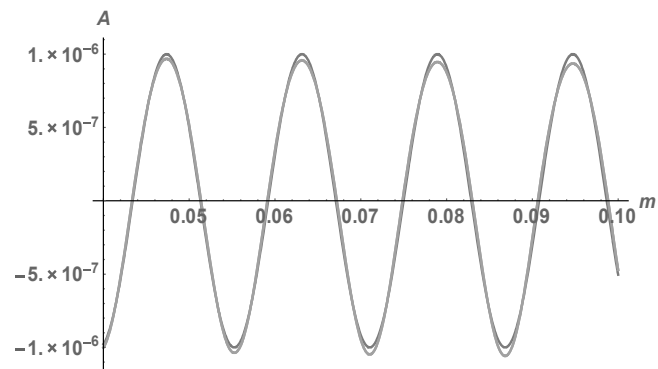
Рис.1

Из графиков следует, что эволюция начального профиля волны происходит симметрично относительно вершин кривых. На рис. 1, б показано, что при движении волны на расстояния в пять повторений длины волны нелинейность материала можно не учитывать. Однако рис. 1 показывает лишь начальный этап развития эволюции и основная тенденция эволюции еще не видна. Поэтому далее показан вариант, когда такая тенденция уже вполне очевидна.

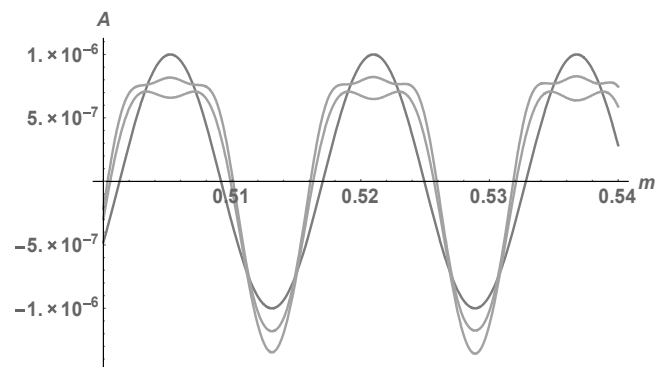
На рис. 2 приведены графики для варианта, соответствующего таким значениям параметров: материал М52, $L = 0,015$, $\omega = 1,5 \cdot 10^6$, $a_0 = 1 \cdot 10^{-6}$. Из графиков следует, что эволюция начального профиля волны происходит для достаточно коротких расстояний аналогично показанной на рис. 1. Также показаны дополнительные графики для двукратного увеличения расстояния прохождения волны (рис. 2, б), четырехкратном увеличении расстояния (рис. 2, в) и восьмикратном увеличении (рис. 2, ж). Проявление нелинейности уже более существенное и искажение профиля вполне наблюдается визуально



а

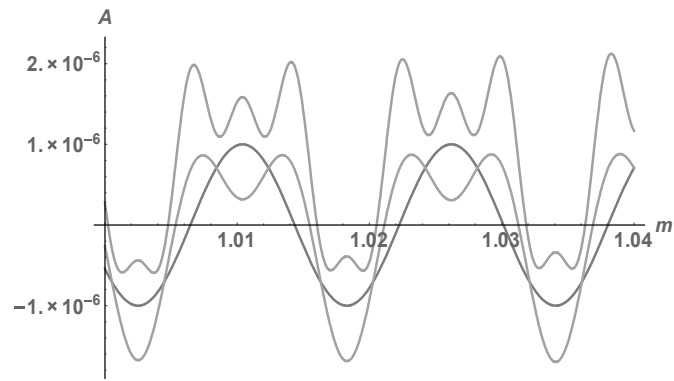


б

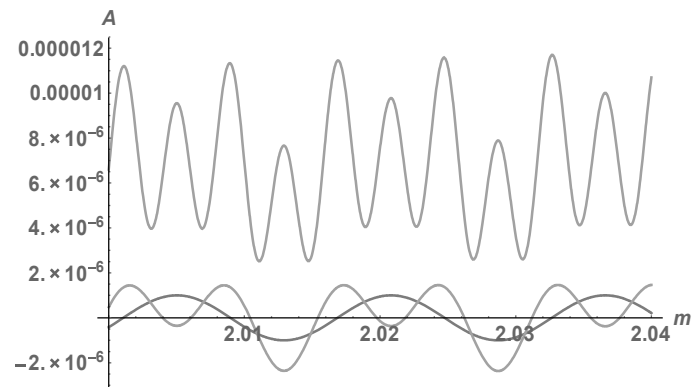


в

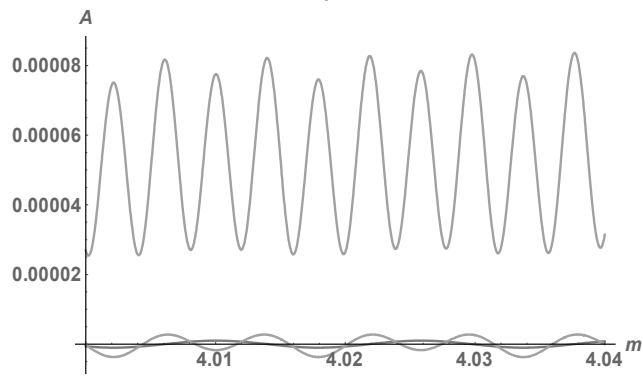
Рис. 2, а – в



z



d



e

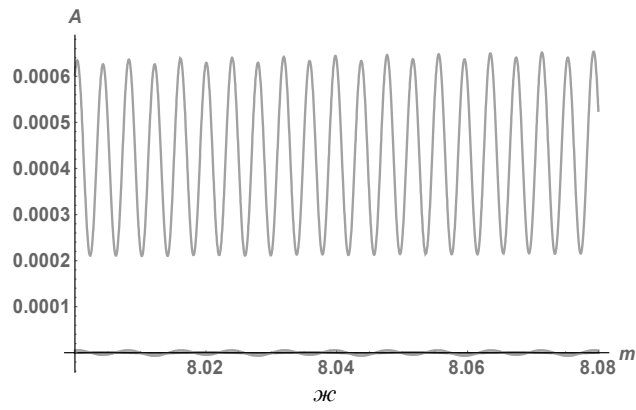


Рис. 2, z – ж

Эволюция начального профиля волны показывает тенденцию к преобразованию в профиль второй гармоники при учете второго приближения (уменьшения длины волны вдвое и некотором уменьшении первоначальной максимальной амплитуды) и четвертой гармоники при учете трех первых приближений (уменьшения длины волны в четыре раза и некоторого увеличения первоначальной максимальной амплитуды).

Из графиков следует что проявления нелинейности в обоих вариантах происходит с разной скоростью по причине различия в исходных параметрах задачи. Также можно заметить характерные для гармонической волны особенности решений в виде первых двух и первых трех приближений. Обоим случаям соответствуют графики, несимметричные относительно горизонтальной оси и показывающие различную скорость эволюции для положительных и отрицательных амплитуд (это видно уже из графиков, начиная с рис. 2, в; в области положительных значений скорость больше). В случае учета первых двух приближений графики опускаются вниз, тогда как в случае трех приближений – вверх. Это смещение графиков соответствует явлению опускания или поднятия среднего значения амплитуды, относительно которого происходят колебания. Собственно, для демонстрации этого явления и построены рис. 2, з – ж. В определенном приближении график рис. 2, ж показывает увеличение среднего значения амплитуды по линейному закону. Однако, для проявления указанного явления пройденные волной расстояния должны быть большими.

5. Числовой анализ волны с профилем в виде функции Гаусса.

В этом случае начальный профиль волны $F(x_1) = e^{-[(ax_1)^2/2]}$ имеет колоколообразную форму и формула (18) приобретает более конкретный вид

$$u(x_1, t) = A^0 e^{-\sigma^2/2} - (1/2)\alpha v_L a^2 t (A^0)^2 \sigma^2 e^{-\sigma^2} - (1/8)\alpha^2 v_L a^3 t (A^0)^3 \sigma^3 e^{-3\sigma^2/2}. \quad (19)$$

Заметим, что для анализа профиля понятия первой, второй и третьей гармоник неприменимы и функции $e^{-[a^2(x_1 - c_L t)^2/2]}$, $e^{-a^2(x_1 - c_L t)^2}$, $e^{-3[a^2(x_1 - c_L t)^2/2]}$ можно считать первой, второй и третьей гармониками весьма условно, однако структура приближенного решения (19) достаточно похожа на структуру решения (10). Очевидное отличие между решениями (10) и (19) состоит в том, что нелинейные добавки для волны (21) не зависят прямо от фазы волны $\sigma = k_L x_1 - \omega t$, тогда как для волны (19) квадрат во втором слагаемом и куб в третьем слагаемом фазы волны $\sigma = a(x_1 - c_L t)$ входит явно в выражение для амплитуды.

По формуле (27) построены двумерные графики с координатами «смещение u_1 – пройденное волной расстояние x_1 ». Всего 8 наборов (2 материала, 2 варианта длины волны, 2 варианта максимальной начальной амплитуды). Каждый набор включает 3 графика для материала М-51 и 4 графика для материала М-52 с двумя профилями. На рис. 3, а, 4, а и рис. 3, б, 4, б наложены два профиля, которые отвечают: первый – первой гармонике, второй – первой и второй гармоникам, где показано, что проявления нелинейности уже наблюдаемо при расстоянии 50 повторений длины волны. На рис. 3, в, 4, в и рис. 4, г показаны по два профиля: один соответствует первой + второй гармоникам и другой – первой + второй + третьей гармоникам. Рис. 4, г аналогичен рис. 4, в, однако соответствует более большому расстоянию, пройденному волной. Здесь наблюдается более развитая тенденция образования двух горбов. Рис. 3 и рис. 4 отличаются начальными амплитудами. Для последнего взяты такие начальная амплитуда и расстояния, пройденные волной, чтобы нелинейность проявлялась существенно и искажение начального профиля было хорошо наблюдаемо визуально. В графиках для материала М-51 эволюция профиля видна на расстоянии в примерно 1000 повторений длины подошвы, тогда как для материала М-52 рассмотрены расстояния на порядок больше. На рис. 3 приведены графики одного набора, соответствующего таким значениям параметров: материал М-51, $L = 0,0375$, $a_0 = 2,0 \cdot 10^{-3}$.

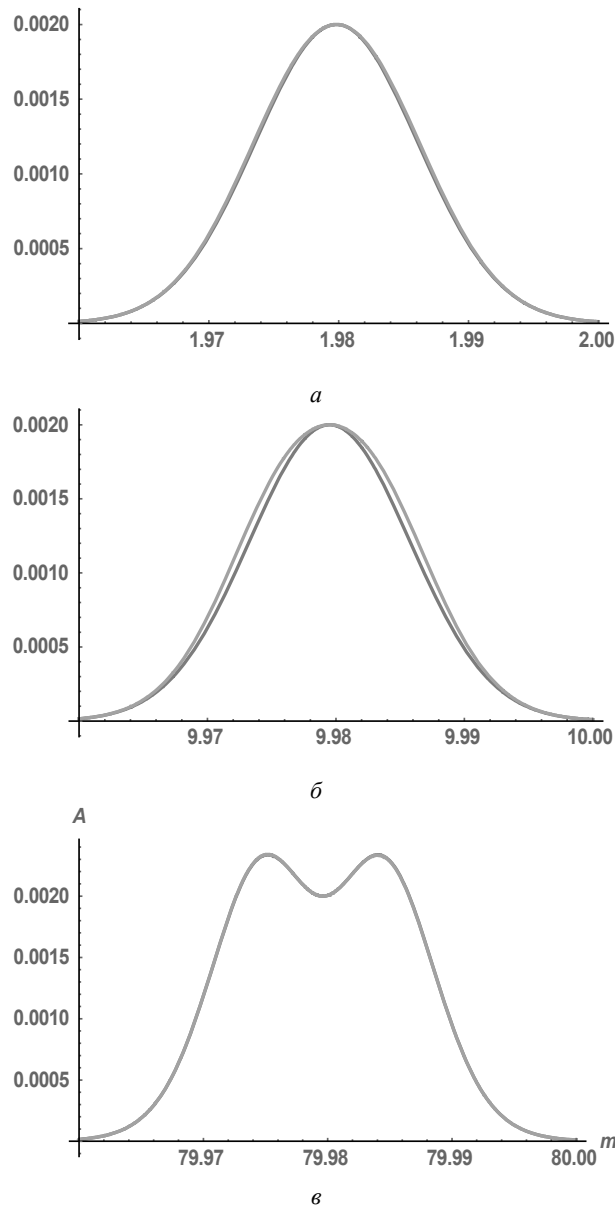


Рис. 3

На рис. 4 приведены графики одного набора, соответствующего таким значениям параметров: материал К52, $L = 0,0375$, $a_0 = 5,0 \cdot 10^{-3}$.

Из представленных графиков следует, что эволюция начального симметричного профиля волны происходит несимметрично относительно пиков – из четырех склонов двух горбов внешние (первый и четвертый) более покатые. При этом максимальное значение амплитуды медленно увеличивается с тенденцией превращения одного горба в два (что можно наблюдать на рис. 3, а, 4, а и рис. 3, б, 4, б). На рис. 3, в, 4, в и рис. 4, г приведены графики для первого + второго и первого +второго + третьего приближений. Эти графики показывают, что третье приближение увеличивает пик первого горба и уменьшает пик второго (левый пик растет и правый – падает). Центральная часть графика опускается к оси и не пересекает ее, разделяя и сращивая два горба. Это новое явление, пожалуй, ранее не описывалось.

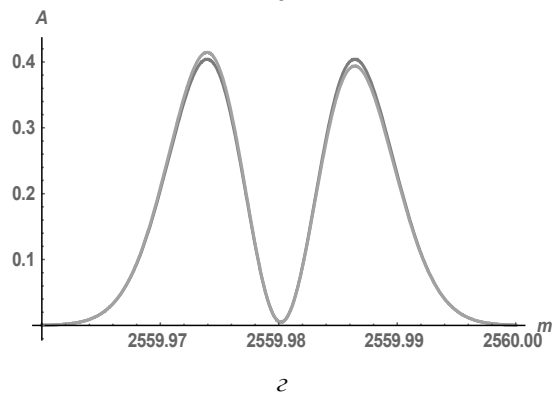
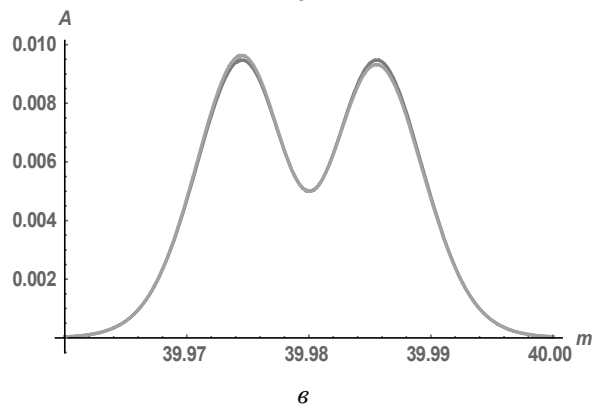
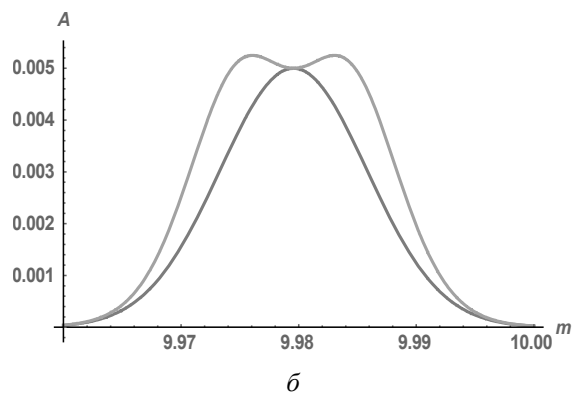
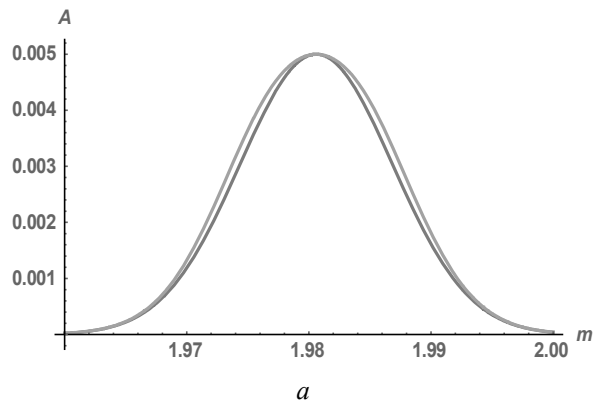


Рис. 4

Таким образом, учет нелинейности в анализе распространения одиночной волны с начальным профилем в виде функции Гаусса позволяет описать эволюцию этого профиля, которая сопровождается новыми волновыми эффектами.

Общие выводы.

Проведен числовой анализ нелинейной упругой продольной плоской волны смещения $u(x_1, t)$ для двух видов симметричного начального профиля: гармонического и колоколообразного. Соответственно, профили описываются двумя различными функциями: тригонометрической функцией $\cos x_1$ (e^{ix_1}) и функцией Гаусса $e^{-x_1^2/2}$.

Общим для этих профилей является искажение начального профиля при движении волны вследствие нелинейного взаимодействия волны самой с собой. Однако искажение происходит для каждого профиля по-своему.

Гармоническая волна искажает свой первоначальный профиль симметрично относительно верхней вершины и для ряда наборов начальных параметров на малых расстояниях (или малых временах) распространения только показывает тенденцию к образованию двух горбов при учете второго приближения (образованию второй гармоники) и четырех горбов вместо одного при учете трех первых приближений (образованию четвертой гармоники). Третье приближение выявляет новые волновые эффекты – доминирование четвертой гармоники и смещение колебаний в первый квадрант, когда колебания происходят относительно смещенного вверх среднего значения амплитуды.

Колоколообразная одиночная волна уже не сохраняет симметрию при своем движении в нелинейно упругой среде. Подобно гармонической волне, для ряда первоначальных наборов параметров эта волна не изменяет длину подошвы и только показывает тенденцию к образованию двух горбов вместо одного при учете первых трех приближений. На более длинных расстояниях прохождения волны характерно образование двух колоколообразных волн, примыкающих друг к другу и уменьшающих вдвое свои подошвы). Третье приближение позволяет выявить новые волновые эффекты: несимметрию правого и левого горбов относительно пика горба и несимметрию самих горбов относительно друг друга – западание левого и возвышения правого горба.

Научные исследования, результаты которых опубликованы в данной статье, выполнены за счет средств бюджетной программы «Поддержка приоритетных направлений научных исследований» (КПКВК 6541230).

РЕЗЮМЕ. В рамках моделі Мурнагана вивчено теоретично та чисельно нелінійну плоску поздовжню пружну хвилю зміщення для двох форм початкового профілю – гармонічного і дзвіноподібного. Основна новизна полягає в тому, що еволюція хвиль аналізується наближеними методами з урахуванням перших трьох апроксимацій. Аналіз гармонічної хвилі розглядається тільки для порівняння з новими результатами для дзвіноподібної хвилі. Показано деякі суттєві відмінності між еволюцією хвиль. По-перше, симетричні початково профілі трансформуються внаслідок еволюції в спотворенні по-різному: гармонічний профіль симетрично і дзвіноподібний профіль асиметрично. По-друге, третя апроксимація вводить четверту гармоніку для гармонічної хвилі, коли ця хвиля аналізувалася методом послідовних наближень, тоді як дзвіноподібна хвиля характеризується у третьому наближенні по-іншому в рамках аналізу методом обмежень на градієнт зміщення. На відносно довгих відстанях від початку поширення хвилі одnogорба дзвіноподібна хвиля перетворюється в двогорбу. Ці горби прилягають один до одного і зменшують в два рази їх подошви. Третє наближення дозволяє спостерегти нові хвильові ефекти: несиметрію лівого і правого горбів відносно їх піків і несиметрію горбів щодо один до одного – опущення лівого горба і підйом правого. Результати дослідження коментуються.

1. Руцицький Я.Я., Журнал С.І. Хвилі в матеріалах з мікроструктурою. – Київ: Інститут механіки ім. С.П.Тимошенка, 1998. – 377 с.
2. Руцицький Я.Я. Про наближений аналіз еволюції поздовжньої хвилі, що поширюється в пружному середовищі // Доп. НАН України. – 2019. – № 8. – С. 46 – 58.

3. *Cattani C., Rushchitsky J.* Wavelet and Wave Analysis as applied to Materials with Micro and Nanostructure. – Singapore - London: World Scientific, 2007. – 466 p.
4. *Gradstein I.S., Ryzhik I.M.* Table of Integrals, Series, and Products. 7th revised edition. Eds. Jeffrey A., Zwillinger D. – New York: Academic Press Inc., 2007. – 1200 p.
5. *Guz A.N., Rushchitsky J.J.* For the 100th Anniversary of the S. P. Timoshenko Institute of Mechanics of the NASU: Books (Monographs and Textbooks) Published by the Institute // *Int. Appl. Mech.* – 2018. – **54**, N 2. – P. 121 – 142.
6. *Rushchitsky J.J.* Elements of the Theory of Mixtures. – Kiev: Naukova Dumka, 1991. – 160 p.
7. *Rushchitsky J.J.* Certain Class of Nonlinear Hyperelastic Waves: Classical and Novel Models, Wave Equations, Wave Effects // *Int. J. Appl. Math. and Mech.* – 2013. – **9**, N 12. – P. 600 – 643.
8. *Rushchitsky J.J.* Nonlinear Elastic Waves in Materials. – Heidelberg: Springer, 2014. – 455 p.
9. *Rushchitsky J.J.* On Constraints for Displacement Gradients in Elastic Materials // *Int. Appl. Mech.* – 2016. – **52**, N 2. – P. 119 – 132.
10. *Rushchitsky J.J.* Plane nonlinear elastic waves: approximate approaches to analysis of evolution-plenary lecture // Abstracts of 19th int. conf. “Dynamical System Modeling and Stability Investigations – DSMSI 2019”, Ukraine, Taras Shevchenko Kyiv National University, May 22 – 24, 2019. – P. 221 – 223.
11. *Rushchitsky J.J.* Plane Nonlinear Elastic Waves: Approximate Approaches to Analysis of Evolution, Chapter in the book “Understanding Plane Waves” Ed. William A.Cooper – London: Nova Science Publishers, 2019. – 300 p. – P. 201 – 220.
12. *Rushchitsky J.J., Cattani C., Sinchilo S.V.* Physical Constants for One Type of Nonlinearly Elastic Fibrous Micro- and Nanocomposites with Hard and Soft Nonlinearities // *Int. Appl. Mech.* – 2005. – **41**, N 12. – P. 1368 – 1377.
13. *Rushchitsky J.J., Yurchuk V.M.* One Approximate Method for Analyzing Solitary Waves in Nonlinearly Elastic Materials // *Int. Appl. Mech.* – 2016. – **52**, N 3. – P. 282 – 290.
14. *Rushchitsky J.J., Yurchuk V.M.* Numerical Analysis of the Evolution of Plane Longitudinal Nonlinear Elastic Waves with Different Initial Profiles // *Int. Appl. Mech.* – 2017. – **53**, N1. – P. 104 – 110.
15. *Rushchitsky J.J., Yurchuk V.M.* Evolution of SV-Wave with Gaussian Profile // *Int. Appl. Mech.* – 2017. – **53**, N 3. – P. 300 – 304.

Поступила 30.10.2019

Утверждена в печать 09.07.2020

