

І.Ю.Хома¹, Т.М.Прошенко²

**НАПРУЖЕНИЙ СТАН ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ІЗОТРОПНОЇ ПЛАСТИНИ
З КРИВОЛІНІЙНИМ ОТВОРОМ ЗА ЧИСТОГО ЗСУВУ
НА НЕСКІНЧЕННОСТІ**

¹ *Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАНУ,
вул. Нестерова, 3, 03057, Київ, Україна; e-mail: reolog@inmech.kiev.ua*

² *Київський національний університет імені Т. Шевченка,
просп. Академіка Глушкова, 42, 03127, Київ, Україна;
e-mail: t.proshchenko@gmail.com*

Abstract. Using the method of expanding the unknown functions into the Fourier series by the Legendre polynomials together with the boundary-shape perturbation method, the solution of the stress-state problem for an unbounded transversely isotropic plate with the curved hole under the shear forces on infinity is obtained. The stress state of the plate with the square and triangular hole is analyzed numerically.

Key words: transversely isotropic plate, stress state, curved hole, elliptical hole, square hole, triangular hole.

Вступ.

Концентрація напружень біля кругових отворів у нетонких ізотропних та трансверсально-ізотропних пластинах різними методами вивчена достатньо повно [6, 9, 10, 14, 18]. Для розв'язання задач для пластин з некруговими (криволінійними) отворами існуючі методи доповнюються деякими іншими методами. У роботах [4, 5] використовується метод однорідних розв'язків у поєднанні з технікою сингулярних інтегральних рівнянь, а методика розвинення шуканих функцій у ряди Фур'є за поліномами Лежандра доповнюється методом збурення форми межі [13, 15]. Для подолання труднощів у визначенні напруженого стану біля кругових і некругових отворів у [7, 16, 17] застосовується числовий метод скінченноелементної дискретизації області пластини.

Викладеним способом [11] в роботі [13] знайдено розв'язок задачі про розподіл напружень біля криволінійних (еліптичного, квадратного і трикутного із закругленими кутами) отворів в необмеженій трансверсально-ізотропній пластині при рівномірному всебічному розтягу на нескінченності. Цим же способом в [15] розв'язано задачу про напружений стан пластини, послабленої некруговим криволінійним отвором, на поверхні якого задана зрівноважена по товщині пара сил, направлених на розщеплення або стиск пластини по серединній площині.

У даній роботі викладається розв'язання аналогічної [13] задачі про розподіл напружень біля криволінійного (квадратного і трикутного із закругленими кутами) отвору при заданих зсувних зусиллях на нескінченності.

§1. Постановка задачі. Основні рівняння.

Розглянемо необмежену трансверсально-ізотропну пластину постійної товщини $2h$ ($h = \text{const}$). Віднесемо її до декартової системи координат x_i ($i = 1, 2, 3$) і будемо вважати, що x_1, x_2 належать серединній площині S , що співпадає з площиною ізоτροпії, а $x_3 \in [-h, h]$. Пластина послаблена некруговою циліндричною порожниною

$L \times [-h, h]$, крива L якої на площині S незначно відрізняється від кола радіуса R . Поверхня площини вільна від зовнішніх зусиль, а на нескінченності пластина перебуває під дією постійних зсувних зусиль $\sigma_{12}^\infty = \tau$ ($\tau = \text{const}$).

Для розв'язання задачі використаємо метод розкладу за товщиною. Представимо, згідно з [1, 8, 12], компоненти вектору переміщень $u_j(x_1, x_2, x_3)$ і тензора напружень $\sigma_{ij}(x_1, x_2, x_3)$ у вигляді скінченного ряду Фур'є за поліномом Лежандра $P_k(\xi)$ координати товщини

$$\{u_j(x_1, x_2, x_3), \sigma_{ij}(x_1, x_2, x_3)\} = \sum_{k=0}^N \{u_j^{(k)}(x), \sigma_{ij}^{(k)}(x)\} P_k(\xi),$$

де $x = (x_1, x_2) \in S$, $\xi = h^{-1}x_3 \in [-1; 1]$, $u_j^{(k)}(x)$, $\sigma_{ij}^{(k)}(x)$ – коефіцієнти розкладів, що називаються нижче моментами (номер моменту відповідає порядку полінома Лежандра); N – натуральне число, яке будемо вважати парним $N = 2n$ ($n = 0, 1, \dots, < \infty$).

Відносно коефіцієнтів розкладів як функцій двох незалежних змінних отримуємо систему рівнянь рівноваги [11]

$$\partial_\alpha \sigma_{\alpha j}^{(k)} - (2k+1)h^{-1} \sum_{s=0}^{[K]} \sigma_{3j}^{(k-2s+1)} + \chi_j^{(k)} = 0 \quad (j = 1, 2, 3), \quad (1.1)$$

де $\partial_\alpha = \partial/\partial x_\alpha$ ($\alpha = 1, 2$), $K = (k-1)/2$ (символ $[K]$ позначає цілу частину числа K) та співвідношення пружності, що пов'язують моменти напружень $\sigma_{ij}^{(k)}$ і деформацій $\varepsilon_{ij}^{(k)}$, т.б.

$$\sigma_{ij}^{(k)} = c_{ijlm} \varepsilon_{lm}^{(k)}. \quad (1.2)$$

Тут c_{ijlm} – модулі пружності, що задовольняють умовам симетрії $c_{ijlm} = c_{jilm} = c_{lmij}$; $\varepsilon_{lm}^{(k)}$ – моменти деформацій, що визначаються формулами

$$\varepsilon_{\alpha j}^{(k)} = \partial_\alpha u_j^{(k)}; \quad \sigma_{3j}^{(k)} = h^{-1} u_j'^{(k)} \quad (u_j'^{(k)} = (2k+1) \sum_{s=0}^{[N_k]} u_j^{(k+2s+1)}); \quad \alpha = 1, 2, \quad j = 1, 2, 3),$$

де $N_k = (N-k-1)/2$. По індексах, що повторюються, наведені рівності передбачають додавання, причому грецькі букви набувають значень 1, 2, а латинські – 1, 2, 3.

Вільні члени $\chi_j^{(k)}$ у рівняннях (1.1) – функції виду

$$\chi_j^{(k)} = \left(k + \frac{1}{2}\right) \frac{1}{h} \left[\sigma_{3j}^+ - (-1)^k \sigma_{3j}^- \right],$$

де σ_{3j}^+ і σ_{3j}^- – задані значення напружень на плоских гранях $x_3 = h$ і $x_3 = -h$.

§2. Рівняння трансверсально-ізотропної пластины.

Співвідношення пружності (1.2) для трансверсально-ізотропної пластины мають вигляд

$$\begin{aligned} \sigma_{11}^{(k)} &= c_{11} \partial_1 u_1^{(k)} + c_{12} \partial_2 u_2^{(k)} + c_{13} h^{-1} u_3'^{(k)}; \quad \sigma_{12}^{(k)} = c_{66} (\partial_1 u_2^{(k)} + \partial_2 u_1^{(k)}); \\ \sigma_{22}^{(k)} &= c_{12} \partial_1 u_1^{(k)} + c_{11} \partial_2 u_2^{(k)} + c_{13} h^{-1} u_3'^{(k)}; \quad \sigma_{13}^{(k)} = c_{44} (\partial_1 u_3^{(k)} + h^{-1} u_1'^{(k)}); \\ \sigma_{33}^{(k)} &= c_{13} e^{(k)} + c_{33} h^{-1} u_3'^{(k)}; \quad \sigma_{23}^{(k)} = c_{44} (\partial_2 u_3^{(k)} + h^{-1} u_2'^{(k)}), \end{aligned} \quad (2.1)$$

де $e^{(k)} = \partial_\alpha u_\alpha^{(k)}$; $c_{11}, c_{12}, \dots, c_{66}$ – пружні сталі, що визначаються рівностями

$$c_{11} = (1 - \nu^2)E/d; \quad c_{12} = (\nu + \nu^2)E/d; \quad c_{13} = \nu'(1 + \nu)E/d;$$

$$c_{33} = (1 - \nu^2)E'/d; \quad c_{66} = E/2(1 + \nu); \quad d = (1 + \nu)(1 - \nu - 2\nu^2); \quad c_{44} = G',$$

у яких $e = E/E'$; ν, ν' та E, E' – коефіцієнти Пуассона і модулі пружності відповідно у площині ізотропії і нормальній до неї площині; G' – поперечний модуль зсуву.

Підставивши вирази (2.1) у рівність (1.1) і поклавши $\sigma_{3j}^+ = \sigma_{3j}^- = 0$, отримаємо однорідну систему рівнянь відносно моментів компонент переміщень, які описують симетричне (по відношенню до серединної площини S) деформування пластини

$$c_{66}\Delta u_\alpha^{(2k)} + (c_{12} + c_{66})\partial_\alpha e^{(2k)} + (4k + 1)h^{-1}\sum_{s=1}^n \left(\lambda_{2s-1}^{(k)} \partial_\alpha u_3^{(2s-1)} - c_{44}h^{-1}\beta_{2s}^{(k)} u_\alpha^{(2s)} \right) = 0$$

$$(\alpha = 1, 2; k = \overline{0, n});$$

$$c_{44}\Delta u_3^{(2k-1)} + (4k - 1)h^{-1}\sum_{s=0}^n \left(\lambda_{2s}^{(k)} e^{(2s)} - c_{33}h^{-1}\alpha_{2s-1}^{(k)} u_3^{(2s-1)} \right) = 0 \quad (k = \overline{1, n}) \quad (2.2)$$

та кососиметричне деформування

$$c_{66}\Delta u_\alpha^{(2k-1)} + (c_{12} + c_{66})\partial_\alpha e^{(2k-1)} + (4k - 1)h^{-1}\sum_{s=0}^n \left(\lambda_{2s}^{(k)} \partial_\alpha u_3^{(2s)} - c_{44}h^{-1}\alpha_{2s-1}^{(k)} u_\alpha^{(2s-1)} \right) = 0$$

$$(\alpha = 1, 2; k = \overline{1, n});$$

$$c_{44}\Delta u_3^{(2k)} + (4k + 1)h^{-1}\sum_{s=1}^n \left(\lambda_{2s-1}^{(k)} e^{(2s-1)} - c_{33}h^{-1}\beta_{2s}^{(k)} u_3^{(2s)} \right) = 0 \quad (k = \overline{0, n}),$$

де Δ – оператор Лапласа;

$$\lambda_{2s-1}^{(k)} = \begin{cases} -c_{44}, & 1 \leq s \leq k, \\ c_{13}, & k < s \leq n \end{cases}; \quad \lambda_{2s}^{(k)} = \begin{cases} -c_{44}, & 0 \leq s < k, \\ c_{13}, & k \leq s \leq n \end{cases}; \quad (2.3)$$

$\alpha_{2s-1}^{(k)}, \beta_{2s}^{(k)}$ – абсолютні константи виду

$$\alpha_{2s-1}^{(k)} = \begin{cases} s(2s-1), & 1 \leq s \leq k, \\ k(2k-1), & k \leq s \leq n \end{cases}; \quad \beta_{2s}^{(k)} = \begin{cases} s(2s+1), & 1 \leq s \leq k, \\ k(2k+1), & k \leq s \leq n \end{cases}.$$

Помінявши у (2.3) місцями константи c_{13} і c_{44} , отримаємо вирази для $\lambda_{2s-1}^{(k)}$ і $\lambda_{2s}^{(k)}$. Розглянемо систему рівнянь (2.2). Її загальний аналітичний розв'язок має вигляд [11]:

$$c_{66}u_+^{(0)} = \chi^* \varphi(z) - z\overline{\varphi'(z)} - \overline{\psi(z)} + h \sum_{m=1}^N a_m^{(0)} \partial_{\bar{z}} V_m;$$

$$c_{66}u_+^{(2)} = \chi_2^* h^2 \overline{\varphi''(z)} + h \sum_{m=1}^N a_m^{(2)} \partial_{\bar{z}} V_m + ih \sum_{s=1}^n b_s^{(2)} \partial_{\bar{z}} W_s;$$

$$c_{66}u_+^{(2k)} = h \sum_{m=1}^N a_m^{(2k)} \partial_{\bar{z}} V_m + ih \sum_{s=1}^n b_s^{(2k)} \partial_{\bar{z}} W_s \quad (k = \overline{2, n}); \quad (2.4)$$

$$c_{66}u_3^{(1)} = -\chi_1^* h \left[\varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)} \right] + \sum_{m=1}^N c_m^{(1)} V_m; \quad u_+^{(2k)} = u_1^{(2k)} + i u_2^{(2k)};$$

$$c_{66}u_3^{(2k-1)} = \sum_{m=1}^N c_m^{(2k-1)} V_m \quad (k = \overline{2, n}); \quad 2\partial_{\bar{z}} = \partial/\partial x_1 + i \partial/\partial x_2;$$

$$c_{66}he^{(0)} = (\chi^* - 1)h \left[\varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)} \right] + \sum_{m=1}^N c_m^{(0)} V_m; \quad c_{66}he^{(2k)} = \sum_{m=1}^N c_m^{(2k)} V_m,$$

де $\varphi(z)$, $\psi(z)$ – довільні голоморфні функції комплексної змінної $z = x_1 + ix_2$; V_m та W_s – метагармонічні функції, що задовольняють рівнянням

$$\Delta V_m - \mu_m^2 V_m = 0; \quad \Delta W_s - \lambda_s^2 W_s = 0, \quad (2.5)$$

у яких $\mu_m^2 = k_m h^{-2}$; $\lambda_s^2 = t_s h^{-2}$; k_m та t_s – корені характеристичних рівнянь

$$\det \|\alpha_{km} - k\beta_{km}\| = 0 \quad (k, m \in [1, N]); \quad \det \|q_{ls} - t\delta_{ls}\| = 0 \quad (l, s \in [1, n]). \quad (2.6)$$

Тут δ_{ls} – символ Кронекера; α_{km} , β_{km} , q_{ls} , а також $a_m^{(2k)}$, $b_s^{(2k)}$, $c_m^{(2k-1)}$ – відомі безрозмірні константи, що залежать від модулів пружності c_{ij} , як, наприклад,

$$\chi^* = 1 + \frac{2c_{66}}{c_1 c_{11}}; \quad \chi_1^* = \frac{2c_{13} c_{66}}{c_1 c_{11} c_{33}}; \quad \chi_2^* = \frac{2\chi_1^*}{3}; \quad c = 1 - \frac{c_{13}^2}{c_{11} c_{33}}; \quad c_1 = c - \frac{c_{66}}{c_{11}}.$$

При симетричному деформуванні пластини рівняння стану (2.1) у комплексній формі представляються наступним чином:

$$\begin{aligned} \sigma_{11}^{(2k)} + \sigma_{22}^{(2k)} &= 2 \left[(c_{12} + c_{66}) e^{(2k)} + (4k+1) c_{13} h^{-1} \sum_{s=k+1}^n u_3^{(2s-1)} \right]; \\ \sigma_{11}^{(2k)} - \sigma_{22}^{(2k)} + 2i\sigma_{12}^{(2k)} &= 4c_{66} \partial_{\bar{z}} u_+^{(2k)}; \\ \sigma_{33}^{(2k)} &= c_{13} e^{(2k)} + (4k+1) c_{33} h^{-1} \sum_{s=k+1}^n u_3^{(2s-1)} \quad (k = \overline{0, n}); \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$\sigma_+^{(2k-1)} = \sigma_{13}^{(2k-1)} + i\sigma_{33}^{(2k-1)} = c_{44} \left[2\partial_{\bar{z}} u_3^{(2k-1)} + (4k-1) h^{-1} \sum_{s=k}^n u_+^{(2s)} \right].$$

Підставляючи (2.4) у співвідношення (2.7) і переходячи до полярної системи координат r , θ , матимемо

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}^{(0)} + \sigma_{\theta\theta}^{(0)} &= 4 \left[\varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)} \right] + 2h^{-1} \sum_{m=1}^N d_m^{(0)} V_m; \quad \sigma_{33}^{(0)} = h^{-1} \sum_{m=1}^N d_{3m}^{(0)} V_m; \\ \sigma_{rr}^{(0)} - \sigma_{\theta\theta}^{(0)} + 2i\sigma_{r\theta}^{(0)} &= -4e^{-2i\theta} \left[z\overline{\varphi''(z)} + \overline{\psi'(z)} \right] + 4h \sum_{m=1}^N a_m^{(0)} e^{-2i\theta} \partial_{\bar{z}}^2 V_m; \\ \sigma_{rr}^{(2)} - \sigma_{\theta\theta}^{(2)} + 2i\sigma_{r\theta}^{(2)} &= 4he^{-2i\theta} \left[\chi_2^* h \overline{\varphi'''(z)} + \sum_{m=1}^N a_m^{(2)} \partial_{\bar{z}}^2 V_m + i \sum_{s=1}^n b_s^{(2)} \partial_{\bar{z}}^2 W_s \right]; \\ \sigma_{rr}^{(2k)} + \sigma_{\theta\theta}^{(2k)} &= 2h^{-1} \sum_{m=1}^N d_m^{(2k)} V_m; \quad \sigma_{33}^{(2k)} = h^{-1} \sum_{m=1}^N d_{3m}^{(2k)} V_m \quad (k = \overline{1, n}); \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$\sigma_{rr}^{(2k)} - \sigma_{\theta\theta}^{(2k)} + 2i\sigma_{r\theta}^{(2k)} = 4he^{-2i\theta} \left(\sum_{m=1}^N a_m^{(2k)} \partial_{\bar{z}}^2 V_m + i \sum_{s=1}^n b_s^{(2k)} \partial_{\bar{z}}^2 W_s \right);$$

$$\sigma_{r_3}^{(2k-1)} + i\sigma_{\theta_3}^{(2k-1)} = 2e^{-i\theta} \left(\sum_{m=1}^N p_m^{(2k-1)} \partial_{\bar{z}} V_m + i \sum_{s=1}^n q_s^{(2k-1)} \partial_{\bar{z}} W_s \right),$$

де $d_m^{(2k)}$, $d_{3m}^{(2k)}$, $p_m^{(2k-1)}$, $q_s^{(2k-1)}$ – безрозмірні константи.

Звідси отримуємо умови для розв'язання внутрішньої та зовнішньої граничних задач. Для нескінченної області з круговою межею радіуса R голоморфні функції $\Phi(z) = \varphi'(z)$, $\Psi(z) = \psi'(z)$ покладемо такими, що мають вигляд

$$\Phi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{-n}; \quad \Psi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^{-n}, \quad (2.9)$$

де a_n , b_n ($n > 0$) – довільні сталі; a_0 , b_0 – константи, що визначаються напруженнями на нескінченності, т. б.

$$a_0 + \bar{a}_0 = \frac{1}{4}(\sigma_{11}^{(0)\infty} + \sigma_{22}^{(0)\infty}); \quad b_0 = \frac{1}{4}(\sigma_{22}^{(0)\infty} - \sigma_{11}^{(0)\infty} + 2i\sigma_{12}^{(0)\infty}).$$

При заданих зусиллях зсуву $\sigma_{12}^{(0)\infty} = \tau$ ($\tau = \text{const}$) маємо, що $a_0 + \bar{a}_0 = 0$, $b_0 = i\tau/2$.

Вигляд метагармонічних функцій V_m залежить від значень коренів характеристичного рівняння (2.6), які можуть бути дійсними або комплексним. Якщо маємо $2n_1$ ($n_1 \leq n$) дійсних додатних і $2(n - n_1)$ комплексно-спряжених коренів, то

$$V_l = \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n^{(l)} K_n(rR^{-1}x_l) e^{in\theta} \quad (l \in [1, 2n_1]);$$

$$V_{2l+1} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n^{(l)} H_n^{(1)}(rR^{-1}x_{2l+1}) e^{in\theta}; \quad (2.10)$$

$$V_{2l+2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n^{(l)} H_n^{(2)}(rR^{-1}x_{2l+2}) e^{in\theta} \quad (l \in [n_1, n-1]),$$

де $K_n(rR^{-1}x_l)$, $H_n^{(1)}(rR^{-1}x_{2l+1})$ і $H_n^{(2)}(rR^{-1}x_{2l+2})$ – циліндричні функції Бесселя, Ханкеля першого і другого роду; $x_l = Rh^{-1}\sqrt{k_l}$, $x_{2l+1} = Rh^{-1}\sqrt{-k_{2l+1}}$, $x_{2l+2} = \bar{x}_{2l+1}$; $B_n^{(l)}$, $C_n^{(l)}$, $D_n^{(l)}$ – довільні сталі. Корені характеристичного рівняння (2.6) для метагармонічних функцій W_s дійсні додатні, тому

$$W_s = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{B}_n^{(s)} K_n(rR^{-1}y_s) e^{in\theta}. \quad (2.11)$$

Тут $y_s = Rh^{-1}\sqrt{t_s}$.

Для вільного від зовнішніх зусиль кругового отвору радіуса R граничні умови мають вигляд

$$\sigma_{rr}^{(2k)}(r, \theta) - i\sigma_{r\theta}^{(2k)}(r, \theta)|_{r=R} = 0 \quad (k = \overline{0, n}); \quad \sigma_{r_3}^{(2k-1)}(r, \theta)|_{r=R} = 0 \quad (k = \overline{1, n}).$$

Звідси, враховуючи формули (2.4), (2.8) і значення функцій (2.9) – (2.11), отримуємо алгебраїчну систему рівнянь для визначення невідомих констант.

§3. Пластина з криволінійним отвором.

Нехай пластина послаблена некруговою циліндричною порожниною $L \times [-h, h]$, контур L якої на площині S незначно відрізняється від кругового контуру радіуса R і описується рівняннями

$$x_1 = R(\cos \vartheta + \varepsilon \cos m\vartheta); \quad x_2 = R(\sin \vartheta - \varepsilon \sin m\vartheta), \quad (3.1)$$

де m – ціле додатне число; ε – малий параметр. При визначених m та ε отримуємо відповідні форми отворів: еліптичну, трикутну і квадратну із закругленими кутами. Функція, яка конформно відображає зовнішню область одиничного круга на нескінченну область, обмежену кривою (3.1), задається формулою

$$z = x + iy = R^{-1}\omega(\zeta) = \zeta + \varepsilon f(\zeta), \quad (3.2)$$

у якій $x = x_1/R$, $y = x_2/R$, $z = re^{i\theta}$, $\zeta = \rho e^{i\vartheta}$, $f(\zeta) = \zeta^{-m}$; x та y – безрозмірні декартові координати; ρ і ϑ – ортогональні криволінійні координати.

Оскільки система координат (ρ, ϑ, ξ) повернута на деякий кут β відносно (r, θ, x_3) навколо загальної осі $\xi = h^{-1}x_3$, то за відомими формулами перетворення компонент тензора напружень маємо співвідношення

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho\rho}^{(2k)} - \sigma_{\vartheta\vartheta}^{(2k)} - 2i\sigma_{\rho\vartheta}^{(2k)} &= e^{2i\beta} (\sigma_{rr}^{(2k)} - \sigma_{\theta\theta}^{(2k)} - 2i\sigma_{r\theta}^{(2k)}); \\ \sigma_{\rho\rho}^{(2k)} + \sigma_{\vartheta\vartheta}^{(2k)} &= \sigma_{rr}^{(2k)} + \sigma_{\theta\theta}^{(2k)}; \quad \sigma_{\xi\xi}^{(2k)} = \sigma_{33}^{(2k)} \quad (k=\overline{0, n}); \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$\sigma_{\rho\xi}^{(2k-1)} - i\sigma_{\vartheta\xi}^{(2k-1)} = e^{i\beta} (\sigma_{r3}^{(2k-1)} - i\sigma_{\theta 3}^{(2k-1)}) \quad (k=\overline{1, n}).$$

Тут $\sigma_{ij}^{(l)} = \sigma_{ij'}^{(l)}(\rho, \vartheta)$ ($i, j' = \rho, \vartheta, \xi$); $\sigma_{ij}^{(l)} = \sigma_{ij}^{(l)}(r, \theta)$ ($i, j = r, \theta, 3$).

Згідно з конформним відображенням (3.2) зв'язок між змінними r, θ та ρ, ϑ здійснюється за формулами

$$r = R^{-1}|\omega(\zeta)|; \quad \theta = \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{Im} \omega(\zeta)}{\operatorname{Re} \omega(\zeta)}; \quad e^{i\beta} = \frac{\zeta}{|\zeta|} \frac{\omega'(\zeta)}{|\omega'(\zeta)|} \frac{\overline{\omega(\zeta)}}{|\omega(\zeta)|} \quad (3.4)$$

і основні рівняння (2.5) у площині ζ матимуть вигляд

$$\Delta V_l - \mu_l^2 |\omega'(\zeta)|^2 V_l = 0; \quad \Delta W_s - \lambda_s^2 |\omega'(\zeta)|^2 W_s = 0 \quad (3.5)$$

$$\left(\Delta = 4\partial_\zeta \partial_{\bar{\zeta}} = \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2} \right).$$

Як впливає із співвідношень (3.4), рівняння (3.5) будуть досить складними і отримати їх точний аналітичний розв'язок з відокремлюваними змінними неможливо. Тому розв'язок задачі будемо шукати, наслідуючи [2, 3], у вигляді рядів за додатними степенями малого параметру ε , т.б.

$$\sigma_{ij'}^{(l)}(\rho, \vartheta) = \sum_{(\tau)} \varepsilon^\tau \sigma_{ij'}^{(l, \tau)}(\rho, \vartheta); \quad u_{j'}^{(l)}(\rho, \vartheta) = \sum_{(\tau)} \varepsilon^\tau u_{j'}^{(l, \tau)}(\rho, \vartheta). \quad (3.6)$$

Очевидно, використовуючи рівності (3.3), необхідно і праві частини (3.3) представити у вигляді рядів за додатними степенями малого параметру ε . З формули (3.4) з урахуванням функції відображення (3.2) знаходимо розклад експоненти

$$e^{i\beta} = 1 + i\varepsilon q_1(\zeta, \bar{\zeta}) + \varepsilon^2 \left[-\frac{1}{2} q_1^2(\zeta, \bar{\zeta}) + i q_2(\zeta, \bar{\zeta}) \right] + \dots, \quad (3.7)$$

де

$$q_1(\zeta, \bar{\zeta}) = \frac{1}{\rho^2} \operatorname{Im} \left[\zeta \overline{f(\zeta)} + \zeta \bar{\zeta} f'(\zeta) \right]; \quad q_2(\zeta, \bar{\zeta}) = \frac{1}{2\rho^4} \operatorname{Im} \left[\bar{\zeta}^2 f^2(\zeta) - \zeta^2 \bar{\zeta}^2 f'^2(\zeta) \right],$$

а довільну скалярну функцію $\Phi^{(k)}(r, \theta)$, згідно з [2], можна представити рядом

$$\Phi^{(k)}(r, \theta) = \sum_{p=0}^{\infty} \varepsilon^p \frac{1}{p!} L_p \Phi^{(k)}(\rho, \vartheta), \quad (3.8)$$

у якому L_p – оператори виду

$$L_0 = 1; \quad L_1 = f(\zeta) \partial_{\zeta} + \overline{f(\zeta)} \partial_{\bar{\zeta}}; \quad L_2 = f^2(\zeta) \partial_{\zeta^2} + 2f(\zeta) \overline{f(\zeta)} \partial_{\zeta} \partial_{\bar{\zeta}} + \overline{f^2(\zeta)} \partial_{\bar{\zeta}^2}, \dots$$

Тут важливо зазначити, що члени ряду (3.8) знаходимо внаслідок дії диференціальних операторів L_p на відповідні функції $\Phi^{(k)}(\rho, \vartheta)$, які отримуємо з $\Phi^{(k)}(r, \theta)$ формальною заміною змінних r, θ на ρ, ϑ .

Враховуючи розклади (3.6), (3.7) і (3.8), з рівностей (3.3) після деяких перетворень та порівнянь виразів при однакових степенях параметра ε , отримуємо співвідношення

$$\sigma_{\rho\rho}^{(2k,\tau)} + \sigma_{\vartheta\vartheta}^{(2k,\tau)} = \sum_{j=0}^{\tau} \Lambda_1^{(\tau-j)} \left(\sigma_{rr}^{(2k,j)} + \sigma_{\theta\theta}^{(2k,j)} \right); \quad \sigma_{\xi\xi}^{(2k,\tau)} = \sum_{j=0}^{\tau} \Lambda_1^{(\tau-j)} \sigma_{33}^{(2k,j)};$$

$$\sigma_{\rho\rho}^{(2k,\tau)} - \sigma_{\vartheta\vartheta}^{(2k,\tau)} - 2i\sigma_{\rho\vartheta}^{(2k,\tau)} = \sum_{j=0}^{\tau} \Lambda_2^{(\tau-j)} \left(\sigma_{rr}^{(2k,j)} - \sigma_{\theta\theta}^{(2k,j)} - 2i\sigma_{r\theta}^{(2k,j)} \right);$$

$$\sigma_{\rho\xi}^{(2k-1,\tau)} - i\sigma_{\vartheta\xi}^{(2k-1,\tau)} = \sum_{j=0}^{\tau} \Lambda_3^{(\tau-j)} \left(\sigma_{r3}^{(2k-1,j)} - i\sigma_{\theta3}^{(2k-1,j)} \right),$$

де Λ_p^l – оператори виду

$$\Lambda_p^{(0)} = 1 \quad (p=1, 2, 3); \quad \Lambda_1^{(1)} = L_1; \quad \Lambda_2^{(1)} = L_1 + 2iq_1; \quad \Lambda_3^{(1)} = L_1 + iq_1;$$

$$2\Lambda_1^{(2)} = L_2; \quad 2\Lambda_2^{(2)} = L_2 - 4q_1^2 + 4i(q_1 L_1 + q_2); \quad 2\Lambda_3^{(2)} = L_2 - q_1^2 + 2i(q_1 L_1 + q_2).$$

Звідси отримуємо вирази для граничних умов, які записуються таким самим способом, як і для пластини з круговим отвором. Маємо

$$\left[\sigma_{\rho\rho}^{(2k,\tau)}(\rho, \vartheta) - i\sigma_{\rho\vartheta}^{(2k,\tau)}(\rho, \vartheta) \right]_{\rho=1} = 0 \quad (k = \overline{0, n});$$

$$\sigma_{\rho\xi}^{(2k-1,\tau)}(\rho, \vartheta) \Big|_{\rho=1} = 0 \quad (k = \overline{1, n}).$$

Отже, у кожному з наближень приходимо до розв'язку крайової задачі для кругового отвору.

§4. Результати числових досліджень.

Викладено результати числових досліджень напруженого стану трансверсально-ізотропної пластини з некруговою циліндричною порожниною (з квадратним і трикутним із закругленими кутами контуром у площині S). Поверхня порожнини вільна від зовнішніх зусиль, а на нескінченності пластини знаходиться під дією постійних

зсувних зусиль. Розглянуто три наближення за малим параметром ε і знайдено вирази для компонент напружень. Так, кільцеві напруження $\sigma_{\vartheta\vartheta}/\tau$ визначаються формулою

$$\frac{1}{\tau}\sigma_{\vartheta\vartheta} = -\sin 2\vartheta + \sum_{k=0}^n \sigma_{\vartheta\vartheta}^{(2k)} P_{2k}(\xi),$$

у якій через $\sigma_{\vartheta\vartheta}^{(2k)}(\rho, \vartheta, \varepsilon)$ позначені вирази

$$\begin{aligned} \sigma_{\vartheta\vartheta}^{(2k)}(\rho, \vartheta, \varepsilon) = & \left[T_{\vartheta\vartheta}^{(2k,0)}(\rho) + \varepsilon T_{\vartheta\vartheta}^{(2k,1)}(\rho) + \varepsilon^2 T_{\vartheta\vartheta}^{(2k,2)}(\rho) \right] \sin 2\vartheta + \\ & + \varepsilon \left[t_{\vartheta\vartheta}^{(2k,1)}(\rho) + \varepsilon t_{\vartheta\vartheta}^{(2k,2)}(\rho) \right] \sin 6\vartheta + \varepsilon^2 \tau_{\vartheta\vartheta}^{(2k,2)}(\rho) \sin 10\vartheta \end{aligned}$$

для квадратного із закругленими кутами отвору і

$$\begin{aligned} \sigma_{\vartheta\vartheta}^{(2k)}(\rho, \vartheta, \varepsilon) = & \left[T_{\vartheta\vartheta}^{(2k,0)}(\rho) + \varepsilon^2 T_{\vartheta\vartheta}^{(2k,2)}(\rho) \right] \sin 2\vartheta + \\ & + \varepsilon \left[t_{\vartheta\vartheta}^{(2k,1)}(\rho) \sin \vartheta + \tau_{\vartheta\vartheta}^{(2k,1)}(\rho) \sin 5\vartheta \right] + \varepsilon^2 \left[t_{\vartheta\vartheta}^{(2k,2)}(\rho) \sin 4\vartheta + \tau_{\vartheta\vartheta}^{(2k,2)}(\rho) \sin 8\vartheta \right] \end{aligned}$$

для трикутного із закругленими кутами отвору. Тут $T_{\vartheta\vartheta}^{(2k,j)}(\rho)$, $t_{\vartheta\vartheta}^{(2k,j)}(\rho)$, $\tau_{\vartheta\vartheta}^{(2k,j)}(\rho)$ – складові, що містять циліндричні функції.

Числові розрахунки виконано для пластини з коефіцієнтами Пуассона $\nu = 0,3$; $\nu' = 0,25$ і відношеннями модулів пружності $E/E' = 1,5$; $E/G' = 5,0$. Функція відображення $f(\zeta)$ і параметри m , ε та R отворів, що розглядаються, приймаються такими, як у роботі [3].

Порожнина із квадратним у плані контуром. Для квадратного отвору вказані параметри мають вигляд

$$f(\zeta) = \zeta^{-3} \quad (m = 3); \quad \varepsilon = -1/9; \quad R = 0,9a,$$

де $2a$ – діагональ квадрата.

На рис. 1, а, б представлені зміни кільцевих $\sigma_{\vartheta\vartheta}/\tau$ і поперечних σ_{33}/τ напружень у точці $\rho = 1$, $\vartheta = -\pi/4$ на серединній $\xi = 0$ (суцільні лінії) та граничній $\xi = 1$ (пунктирні лінії) площинах у залежності від відносної товщини пластини a/h . Криві 0 відповідають круговій порожнині (нульове наближення), а криві 1 та 2 – некруговій порожнині (перше та друге наближення за параметром ε). Як видно, кільцеві напру-

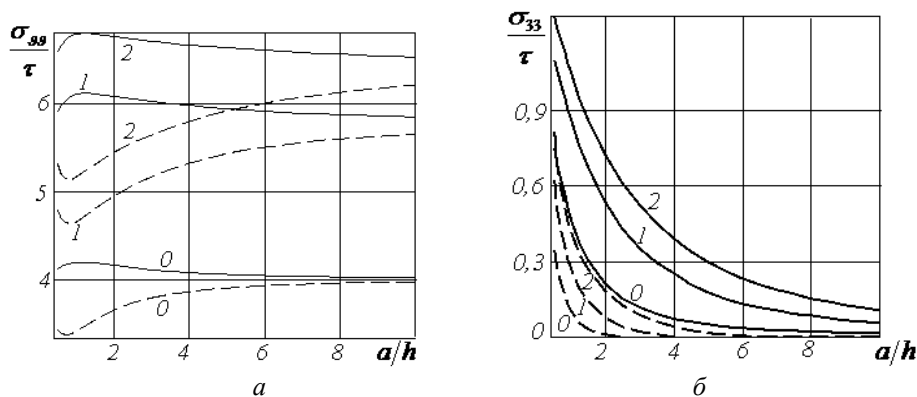


Рис. 1

ження $\sigma_{\vartheta\vartheta}/\tau$ із збільшенням a/h змінюються немонотонно, досягаючи максимуму на серединній ($\xi = 0$) та мінімуму на граничній ($\xi = 1$) площинах пластини в діапазоні $0,4 < a/h < 0,6$. Нормальні поперечні напруження σ_{33}/τ швидко спадають із зменшенням a/h , наближаючись до нульових значень.

Зміну кільцевих напружень $\sigma_{\vartheta\vartheta}/\tau$ вздовж контуру отвору ($0 \leq \vartheta \leq \pi/2$) на серединній ($\rho = 1, \xi = 0$) та граничній ($\rho = 1, \xi = 1$) площинах пластини зображено на рис. 2. Зауважимо, що криві 0 відповідають круговій порожнині, а криві 2 – некруговій порожнині з квадратним на S контуром.

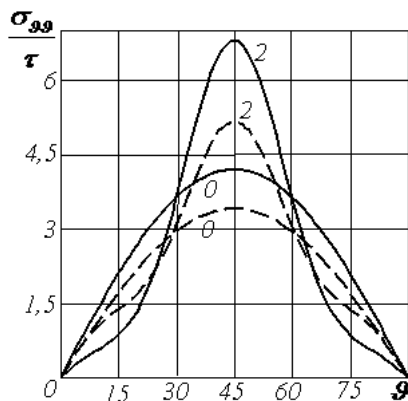


Рис. 2

На рис. 3 показано розподіл поперечних напружень σ_{33}/τ по товщині пластини в перерізі $\rho = 1,05$, $\vartheta = -\pi/4$ для кругової (суцільні лінії) та некругової порожнини з квадратним у плані контуром (пунктирні лінії) при відносній товщині $a/h = 2$ та коефіцієнтах Пуассона $\nu' = 0,25$ (крива 1), $\nu' = 0,3$ (крива 2) і $\nu' = 0,35$ (крива 3).

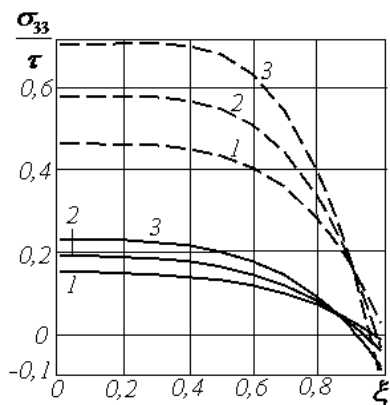


Рис. 3

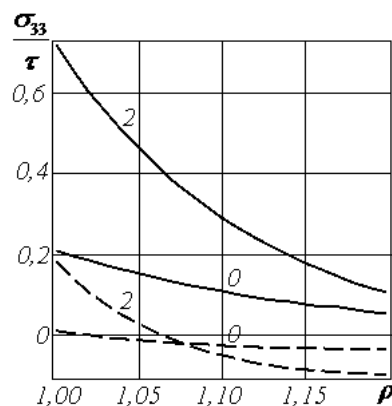


Рис. 4

Криві на рис. 4 характеризують згасання σ_{33}/τ при віддаленні від поверхні порожнини на серединній (суцільні лінії) та граничній (пунктирні лінії) площинах при $a/h = 2$, $\vartheta = -\pi/4$.

Порожнина з трикутним у площині S контуром. При тих самих значеннях пружних констант проведено розрахунки для визначення напруженого стану в околі порожнини з трикутним на S контуром, параметри якого мають такі значення:

$$m = 2; \varepsilon = 1/4; R = 8h_0/15,$$

де h_0 – висота правильного трикутника.

На рис. 5 а, б наведено криві зміни напружень σ_{99}/τ та σ_{33}/τ у точці $\rho = 1$, $\vartheta = 125^\circ$ на серединній (суцільні лінії) та граничній (пунктирні лінії) площинах в залежності від відносної товщини пластини h_0/h . Як і у випадку квадратного отвору, із зменшенням товщини пластини кільцеві напруження σ_{99}/τ на серединній площині зменшуються, а на граничній – збільшуються. Поперечні напруження σ_{33}/τ на серединній та граничній площинах монотонно спадають.

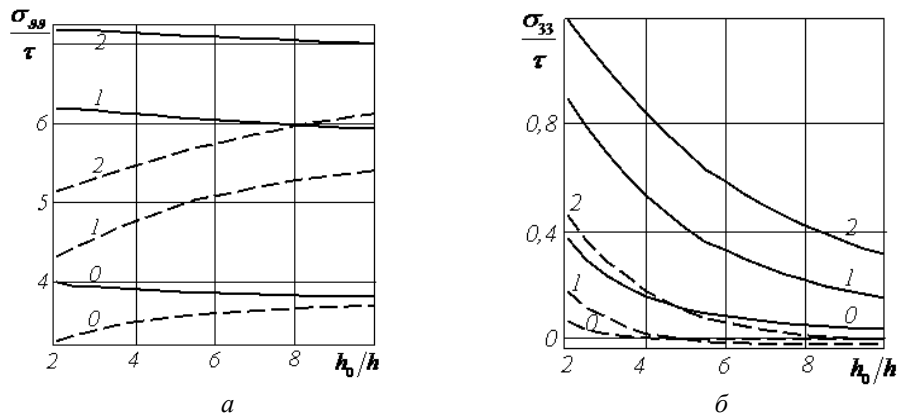


Рис. 5

Криві на рис. 6 а, б характеризують зміну напружень σ_{99}/τ та σ_{33}/τ по контуру отвору ($0 \leq \vartheta \leq \pi$) на серединній (суцільні лінії) та граничній (пунктирні лінії) площинах пластини при відношенні $h_0/h = 2$. Як і раніше, криві 0 відповідають круговій порожнині, а криві 2 – некруговій з трикутним контуром на S . Найбільших значень напруження досягають на серединній площині ($\xi = 0$) в околі точки $\rho = 1$, $\vartheta = 125^\circ$.

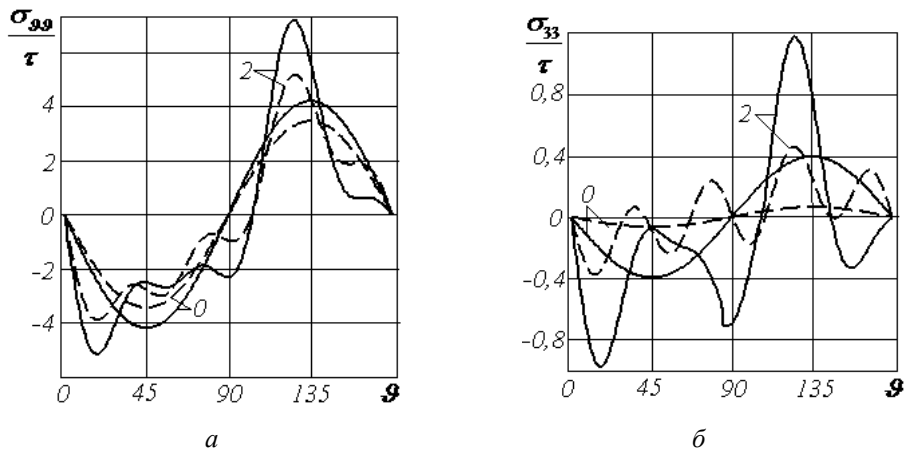


Рис. 6

Розподіл напружень вздовж контуру трикутного отвору суттєво відрізняється від розподілу напружень вздовж кругового отвору. Аналогічний характер розподілу напружень по контуру криволінійного отвору має місце і в теорії оболонок [3].

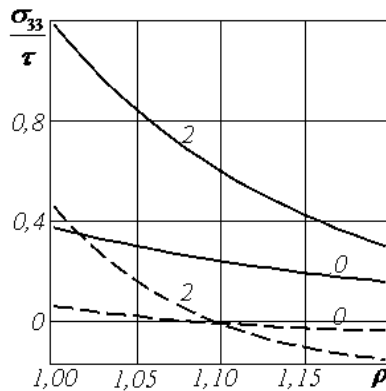


Рис. 7

На рис. 7 представлено криві зміни поперечних напружень σ_{33}/τ на серединній ($\xi = 0$, $\vartheta = 125^\circ$) та граничній ($\xi = 1$, $\vartheta = 125^\circ$) площинах пластини при віддаленні від поверхні порожнини.

Висновки.

У викладеній статті дано постановку і розв'язано задачу про розподіл напружень біля криволінійного (квадратного і трикутного із закругленими кутами) отвору у необмеженій трансверсально-ізотропній пластині при заданих зсувних зусиллях на нескінченності. Розв'язок задачі знайдено у вигляді рядів за додатними степенями малого параметру ε , який, серед інших, визначає форму отвору. Проведено числовий аналіз розподілу кільцевих напружень вздовж контурів отворів та поперечних напружень по товщині пластини у серединній та граничній площинах пластини. Розглянуто три наближення розв'язку за малим параметром ε .

РЕЗЮМЕ. Методом розкладу функцій в ряди Фур'є за поліномами Лежандра разом з методом збурення форми границі знайдено розв'язок задачі про напружений стан необмеженої трансверсально-ізотропної пластини з криволінійним отвором при постійних зсувних зусиллях на нескінченності. Описано результати числових досліджень та проведено їх аналіз.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: трансверсально-ізотропна пластинка, напружений стан, криволінійний отвір, еліптичний отвір, квадратний отвір, трикутний отвір.

1. Векуа И.Н. Теория тонких пологих оболочек переменной толщины // Тр. Тбилис. матем. ин-та. – 1965. – Вып. 30. – С. 3 – 103.
2. Гузь А.Н., Немши Ю.Н. Метод возмущения формы границы в механике сплошных сред – Киев: Вища школа, 1989. – 352 с.
3. Гузь А.Н., Чернышенко И.С., Чехов В.Н. и др. Методы расчета оболочек: в 5-и томах. Т. 1. Теория тонких оболочек, ослабленных отверстиями. – Киев: Наук. думка, 1980. – 686 с.
4. Фильштинский Л.А., Кушнир Д.В. Гармонические импульсные возбуждения многосвязных цилиндрических тел // Прикл. матем. и механика. – 2006. – 70, вып. 2. – С. 305 – 314.
5. Bardzokas D.I., Kushnir D.V., Filshhtinskii L.A. Dynamic Problems of the Theory of Elasticity for Layers and Semilayers with Cavities // Acta Mech. – 2009. – 208. – P. 81 – 95.
6. Burniston E.E. On the Extension of an Infinite Elastic Plate Containing an Axisymmetric Hole // J. Appl. Mech. – 1972. – 39, N 2. – P. 507 – 512.
7. Darwish F., Gharaiaben M., Toshtoush G. A Modified Equation for the Stress Concentration Countersunk Holes // Eur. J. Mech. A/Solids. – 2012. – 36. – P. 94 – 103.
8. Fellers J.I., Soler A.I. Approximate Solution of the Finite Cylinder Problem Using Legendre Polynomials // AIAA J. – 1970. – 8, N 11. – P. 2037 – 2042.

9. *Folias E.S., Wang J.S.* On the Three-dimensional Stress Fields around a Circular Hole in a Plate of Arbitrary Thickness // *Comput. Mech.* – 1990. – **6**, N 5. – P. 379 – 391.
10. *Green A.E.* Three-dimensional Stress Systems in Isotropic Plates // *Phil. Trans. Royal Soc. of London. Ser. A.* – 1948. – **240**, N 285. – P. 561 – 597.
11. *Khoma I.Yu.* Tension of a Nonthin Transversely Isotropic Plate with a Noncircular Cylindrical Cavity // *Int. Appl. Mech.* – 2006. – **42**, N 11. – P. 1285 – 1297.
12. *Khoma I.Yu.* Representing the Solutions of the Equilibrium Equations for Functionally Inhomogeneous Transversely Isotropic Plates // *Int. Appl. Mech.* – 2017. – **53**, N 2. – P. 196 – 208.
13. *Khoma I.Yu., Dashko O.G.* Stress State of a Nonthin Transversely Isotropic Plate with a Curved Hole // *Int. Appl. Mech.* – 2015. – **51**, N 4. – P. 461 – 473.
14. *Khoma I.Yu., Proshchenko T.M.* Tension and Shear of a Transversely Isotropic Piezoceramic Plate with a Circular Hole with Mixed Conditions on Flat Sides // *Int. Appl. Mech.* – 2017. – **53**, N 6. – P. 704 – 715.
15. *Khoma I.Yu., Proshchenko T.M.* The Stress State of a Transversely Isotropic Plate with a Curvilinear Hole for a Given Splitting Force on the Boundary Surface // *Int. Appl. Mech.* – 2019. – **55**, N 4. – P. 434 – 449.
16. *Rezaepazhand J., Jafari M.* Stress Concentration in Metallic Plates with Special Shaped Cutout // *Int. J. Mech. Sci.* – 2010. – **52**, N 1. – P. 96 – 102.
17. *Yang Zh.* The Stress and Strain Concentrations of an Elliptical Hole in an Elastic Plate of Finite Subjected to Tensile Stress // *Int. J. Fract.* – 2009. – **155**. – P. 43 – 44.
18. *Yang Zh., Kim Ch-Boo, Chjo Ch., Beom N.G.* The Concentration of Stress and Strain in Finite Thickness Elastic Plate Containing a Circular Hole // *Int. J. Solids Struct.* – 2008. – **45**. – P. 713 – 731.

Надійшла 28.12.2018

Затверджена до друку 15.12.2020
