

В. М. Михалевич¹, І. В. Абрамчук²

НАЙБІЛЬШЕ ЗНАЧЕННЯ НАКОПИЧЕНОЇ ДЕФОРМАЦІЇ ПРИ
ЛІНІЙНИХ ДВОЛАНКОВИХ ТРАЄКТОРІЯХ ДЕФОРМУВАННЯ
ТРИКУТНОПОДІБНОГО ВИДУ

Вінницький національний технічний університет,
Хмельницьке шосе 95, 21021, Вінниця, Україна;

e-mail: ¹ mykhalevych@vntu.edu.ua, ² abramchuk@vntu.edu.ua

Abstract. Linear two-stage deformation trajectories with zero initial and final strain rates were considered within the framework of the damage accumulation model of the hereditary type. Several problems to find the largest value of accumulated plastic strain have been formulated and investigated. All problems are reduced to nonlinear programming problems with three unknowns, a linear objective function and constraints in the form of nonlinear inequalities and/or strict equalities. The existence and uniqueness of solutions of the formulated problems are investigated. The analytical dependence of the accumulated deformation on the parameters of the model and the trajectory of deformation is obtained and investigated. It is shown that the largest accumulated deformation corresponds to the left limiting trajectory, in fact, a single-stage trajectory with a linear decrease in the strain rate.

Key words: strain trajectories, strain rate, damage accumulation model, hereditary type model, accumulated plastic strain, largest value, nonlinear programming, existence and uniqueness of solution.

Вступ.

Зародження теорії підсумовування пошкоджень пов'язують з працями Пальмгрена – Майнера, в яких запропонована і обґрунтована гіпотеза лінійного підсумовування пошкоджень.

Фундаментальні результати з теорії підсумовування пошкоджень отримані А.А. Ільющиним [4]. Найбільш повний аналітичний огляд праць з експериментальних і теоретичних досліджень тривалої міцності металів при нестационарних складних напружених станах, опублікованих за останні 60 років, здійснено в працях О.М. Локощенко [7]. Ряд цікавих результатів з моделювання руйнування в умовах повзучості та розвитку теорії підсумовування пошкоджень і моделей спадкового типу отримано в роботах В.В. Москвітін [12], В.П. Голуба [17, 18, 19] і А.В. Хохлова [13, 14]. Модель підсумовування пошкоджень у вигляді інтеграла Бейлі стосовно пластичного деформування вперше запропонована В.Л. Колмогоровим.

У цій праці розглядатимемо виключно ізотермічні процеси.

Одним із перших скалярний варіант моделі тривалої міцності спадкового типу дослідив В.В. Москвітін [12]

$$\int_0^{t_f} (t_f - \tau)^{m-1} \sigma_i^{\alpha m}(\tau) d\tau = \frac{B^m}{m}, \quad (0.1)$$

де σ_i – інтенсивність напруження; t_f – час до руйнування матеріалу при заданому процесі навантаження $\sigma_i = \sigma_i(t)$; B, m, α – матеріальні сталі.

За умови незмінності у часі компонент тензора напружень $\sigma_{ij}(t) = \sigma_{ij} = \text{const}$, а, отже, і інтенсивності напруження $\sigma_i(t) = \sigma_i = \text{const}$, з цієї моделі можемо отримати співвідношення

$$(\sigma_i^\alpha t_{fs})^m = B^m,$$

звідки випливає степенева апроксимація кривої тривалої міцності

$$\sigma_i^\alpha t_{fs} = B. \quad (0.2)$$

У випадку $m = 1/\alpha$ модель (0.1) стає лінійною відносно σ_i

$$\int_0^{t_f} (t_f - \tau)^{m-1} \sigma_i(\tau) d\tau = \frac{B^m}{m}.$$

З цього стає очевидним жорсткий зв'язок між апроксимацією ядра в інтегральному представленні (0.1) та апроксимацією кривої тривалої міцності (0.2). Вибір виду однієї з цих апроксимацій однозначно визначає вид іншої. До того ж, в лінійній моделі матеріальні сталі повністю визначаються апроксимацією кривої тривалої міцності

$$\alpha = -\frac{\ln(t_{f2}) - \ln(t_{f1})}{\ln(\sigma_{i2}) - \ln(\sigma_{i1})}; \quad B = \exp\left(\frac{\ln(\sigma_{i2})\ln(t_{f1}) - \ln(\sigma_{i1})\ln(t_{f2})}{\ln(\sigma_{i2}) - \ln(\sigma_{i1})}\right),$$

де t_{f1}, t_{f2} – час до руйнування матеріалу під дією незмінних впродовж навантаження напружень σ_{i1} та σ_{i2} , відповідно. Тобто, для визначення матеріальних сталей, в моделі з вибраним варіантом степеневого ядра інтегрального представлення, необхідно мати результати експериментальних досліджень на тривалу міцність, принаймні, при двох різних значеннях інтенсивності напружень.

Автором [11, 24] запропонована та досліджена модель граничних деформацій при високотемпературній деформації, що враховує вплив швидкості деформації на підсумовування пошкоджень в матеріалах. Спрощену скалярну версію вказаної моделі можна записати так

$$\psi(t) = \int_0^t \varphi(t - \tau) f(\dot{\epsilon}_i(\tau)) d\tau < 1, \quad t \in (0; t_f), \quad \psi(t_f) = 1, \quad (0.3)$$

де ψ – рівень пошкоджень; $\dot{\epsilon}_i$ – інтенсивність швидкості деформації; t_f – час до руйнування матеріалу при заданому процесі деформування $\dot{\epsilon}_i = \dot{\epsilon}_i(t)$; $\varphi(t - \tau)$ – ядро спадковості; f – деяка функція.

Відповідно запропонованій класифікації процесів навантаження та деформування [11], модель (0.1) описує процеси пропорційного навантаження, що визначаються умовами

$$\sigma_{ij}(t) = \sigma_{ij}^{(0)} C(t), \quad C(t) \geq 0.$$

Еквівалентними до цієї умови є такі

$$\beta_{ij}(t) = \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{s_{ij}(t)}{\sigma_i(t)} = \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{s_{ij}^{(0)}}{\sigma_i^{(0)}} = \beta_{ij}^{(0)} = \text{const}; \quad (0.4)$$

$$\sigma_i(t) = \sigma_i^{(0)} C(t); \quad (0.5)$$

$$\eta(t) = \frac{3\sigma(t)}{\sigma_i(t)} = \eta^{(0)} = \text{const}, \quad (0.6)$$

де $s_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma \delta_{ij}$ – дівіатор тензора напружень σ_{ij} ; $\sigma = \sigma_{ii}/3$ – середнє напруження; δ_{ij} – символ Кронекера; β_{ij} – напрямний тензор напружень; η – інваріантний показник напруженого стану. Верхній індекс (0) означає, що відповідна величина є сталою. Одною з основних ознак процесів пропорційного навантаження є незмінність виду напруженого стану, що визначається параметром Надаї-Лоде для напружень. Окремими прикладами такого процесу є рівномірний осьовий розтяг або стиск, зсув, а також і процеси складного навантаження, зокрема розтяг + кручення із забезпеченням умов (0.4) – (0.6).

Модель (0.3) призначена для описання процесів квазіпростого гарячого деформування, що визначаються умовами

$$\gamma_{ij}(t) = \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\dot{\varepsilon}_{ij}(t)}{\dot{\varepsilon}_i(t)} = \gamma_{ij}^{(0)} = \text{const}, \quad (0.7)$$

де $\dot{\varepsilon}_{ij}$ – дівіатор швидкостей деформацій; γ_{ij} – напрямний тензор швидкостей деформацій. Характерною ознакою процесів квазіпростого гарячого деформування є незмінність, в процесі навантаження, параметра Надаї-Лоде для швидкостей деформацій. Окремими прикладами такого процесу є рівномірний осьовий розтяг або стиск, зсув, а також і процеси складного навантаження, зокрема розтяг + кручення без обов'язкового забезпечення умови (0.6). В процесах квазіпростого гарячого деформування можуть змінюватися за довільним законом інтенсивність швидкості деформації $\dot{\varepsilon}_i$ та показник η . Надалі обмежимося розглядом процесів квазіпростого гарячого деформування за умови незмінності показника напруженого стану (0.6).

Для степеневого ядра спадковості на основі (0.3) можемо записати

$$\int_0^{t_f} (t_f - \tau)^{n-1} \dot{\varepsilon}_i^{\lambda n}(\tau) d\tau = \frac{g^n}{n}, \quad (0.8)$$

де g, n, λ – матеріальні сталі.

За умови незмінності у часі компонент напрямного тензора швидкостей деформацій (0.7) та інтенсивності швидкості деформацій $\dot{\varepsilon}_i(t) = \dot{\varepsilon}_i = \text{const}$, з цієї моделі випливає

$$(\dot{\varepsilon}_i^{\lambda} t_{fs})^n = A^n,$$

а також степенева апроксимація кривої граничного стану при стаціонарному деформуванні

$$\dot{\varepsilon}_i^{\lambda} t_{fs} = g \quad (0.9)$$

або

$$\dot{\varepsilon}_i^{\lambda-1} \bar{\varepsilon}_{fs} = g, \quad (0.10)$$

де $\bar{\varepsilon}_{fs}$ – гранична пластична деформація до руйнування матеріалу, що відповідає швидкості деформацій $\dot{\varepsilon}_i = \text{const}$.

Для довільного закону зміни інтенсивності швидкості деформацій $\dot{\varepsilon}_i = \dot{\varepsilon}_i(t)$ величина накопиченої пластичної деформації визначається як

$$\bar{\varepsilon}(t) = \int_0^t \dot{\varepsilon}_i(\tau) d\tau \quad (0.11)$$

і, зокрема, для осьових рівномірних розтягу або стиску циліндричних зразків дорівнює

$$\bar{\varepsilon}(t) = \left| \ln \left(\frac{l(t)}{l_0} \right) \right|, \quad (0.12)$$

де l_0, l – відповідно початкова та поточна довжина (висота) зразка.

Із суто формальної точки зору модель граничних деформацій (0.8) відрізняється від моделі тривалої міцності (0.1) тільки заміною інтенсивності напружень σ_i інтенсивністю швидкості деформацій $\dot{\varepsilon}_i$. І для одного й того самого закону зміни інтенсивності напружень та інтенсивності швидкості деформацій

$$\sigma_i(t) = \dot{\varepsilon}_i(t) = u(t)$$

з моделей (0.1) та (0.8) впливатимуть одні й ті самі співвідношення та критеріальні залежності з точністю до позначень та фізичної сутності параметрів моделі. Очевидно, що вказані залежності матимуть однакові властивості. Тобто, в цьому випадку маємо типову ситуацію математичного моделювання, коли під час вивчення одного із двох процесів ми глибше розуміємо можливі особливості перебігу іншого.

В той же час модель (0.8) має істотну особливість: інтеграл від інтенсивності швидкості деформацій (0.11) визначає величину накопиченої пластичної деформації $\bar{\varepsilon}$, що може бути визначена експериментально, зокрема, за співвідношенням (0.12). Саме ця величина використовується як міра здатності матеріалів сприймати пластичну деформацію без руйнування. Величина $\int_0^t \sigma_i(\tau) d\tau$ подібного значення не має.

Зазначена особливість моделі (0.8) виявилась надзвичайно суттєвою, оскільки надає можливість формулювати та розв'язувати оригінальні для теорії підсумовування пошкоджень оптимізаційні задачі.

Важливими є питання щодо системи експериментів, що необхідні для визначення матеріальних сталей, так і обмежень, яким вони мають задовольняти.

Розглянемо двоступеневе деформування з паузою між ступенями та досягненням граничного стану на другій ступені:

$$\dot{\varepsilon}_i(t) = \begin{cases} \dot{\varepsilon}_i^{(1)}, & 0 \leq t \leq t_1 \\ 0, & t_1 \leq t \leq t_1 + t_p \\ \dot{\varepsilon}_i^{(1)}, & t_1 + t_p \leq t \leq t_f \end{cases} .$$

При цьому з (0.8) випливає критеріальне співвідношення [11].

$$(\psi_1 + \Delta_p + \psi_{*2})^n - (\Delta_p + \psi_{*2})^n + \psi_{*2}^n = 1, \quad (0.13)$$

де $\psi_1 = t_1/t_{*s}^{(1)} = \bar{\varepsilon}_1/\bar{\varepsilon}_{*s}^{(1)}$ – використаний ресурс пластичності на першій ступені; $t_{*s}^{(1)}$, $\bar{\varepsilon}_{*s}^{(1)}$ – відповідно час до руйнування матеріалу та гранична пластична деформація матеріалу, що відповідають деформуванню із сталою швидкістю інтенсивності деформації $\dot{\varepsilon}_i^{(1)}$ та визначаються співвідношеннями (0.9), (0.10); $\Delta_p = t_p/t_{*s}^{(1)}$ – приведена пауза; $\psi_{*2} = (t_f - t_1 - t_p)/t_{*s}^{(1)}$ – залишковий ресурс на другій ступені.

Це рівняння є неявною функцією залишкового ресурсу від використаного ресурсу та приведеної паузи

$$\psi_{*2} = \psi_{*2}(\psi_1, \Delta_p); \quad \psi_1 \in [0; 1), \quad \Delta_p \in [0; \infty).$$

З моделей (0.1) та (0.8) впливають формально тотожні критеріальні співвідношення. Так, стосовно до двоступеневого навантаження з паузою між ступенями з моделі (0.1) впливає співвідношення формально тотожне (0.13) з точністю до позначення та фізичної сутності параметра n . В той же час вказані критеріальні співвідношення описують різні процеси: під час двоступеневого деформування впродовж першої та другої ступені відбувається деформування з постійною швидкістю інтенсивно-

сті деформацій $\dot{\epsilon}_i^{(1)}$; під час двоступеневого навантаження впродовж першої та другої ступені величина інтенсивності напружень є одною й тою самою та незмінною.

В цій праці нас в першу чергу цікавитимуть матеріали з чутливістю граничної пластичної деформації до інтенсивності швидкості деформації, а саме – такі матеріали, для яких існує температурно-швидкісний діапазон, в якому представлена у вигляді $\bar{\epsilon}_{fs} = \bar{\epsilon}_{fs}(\dot{\epsilon}_{is})$ функція (0.10) є спадною. З цього випливає, що

$$\lambda > 1.$$

Ця умова є важливою відмінністю моделей (0.1) та (0.8). Так, при $n = 1/\lambda$ маємо лінійну модель (0.8), з якої випливає

$$\bar{\epsilon}_{fs} = g \dot{\epsilon}_i^{(n-1)/n}; \quad 0 < n < 1. \quad (0.14)$$

З лінійної моделі (0.1) ($m = 1/\alpha$) за умови зменшення граничного часу до руйнування t_{fs} при збільшенні величини інтенсивності напружень σ_i впливає тільки умова $m > 0$. Нерівність $m < 1$ впливає тільки з умови $\psi_1 + \psi_{*2} > 1$, що має виконуватися для співвідношення, формально тотожного до (0.13) і яке впливає з моделі (0.1). У цьому випадку умова $\psi_1 + \psi_{*2} > 1$ відображує часткове відновлення використаного ресурсу впродовж паузи.

Слід зазначити, що в літературі можна знайти приклади степеневих залежностей (0.14), що побудовані на основі експериментальних даних для конкретних матеріалів, зокрема, в [20, 25] ці залежності побудовані для різних температур

$$\bar{\epsilon}_{fs} = k(T) \dot{\epsilon}_i^q,$$

де $k(T)$ – коефіцієнт, що залежить від температури T . Коефіцієнт q виявився незалежним від температури та рівним $q = -0,013$ в діапазоні $T = 950 - 1300^\circ\text{C}$, $\dot{\epsilon}_i = 0,001 - 1,0 \text{ c}^{-1}$ для роторної сталі 30Cr2Ni4MoV [20]. За даними [25] для двох магнієвих сплавів MgNi19 та MgCa0.8 відповідно $q = -0,252$ та $q = -1,22$, в діапазоні $T = 20 - 300^\circ\text{C}$, $\dot{\epsilon}_i = 0,01 - 0,1 \text{ c}^{-1}$.

Автором [11] наведено приклади зіставлення експериментальних та розрахункових результатів, що впливають з критеріальних співвідношень, отриманими на основі моделі (0.3) для різних процесів деформування $\dot{\epsilon}_i = \dot{\epsilon}_i(t)$.

Стосовно до двоступеневого деформування з паузою між ступенями на основі (0.3), із використанням експоненціального представлення ядра спадковості $\varphi(t - \tau)$, отримано співвідношення [11], аналогічне співвідношенню (0.13)

$$\Delta\psi = \frac{1}{n} \ln \left(1 + e^{n\psi_1} (e^{n\Delta_p} - 1) \right) - \Delta_p, \quad (0.15)$$

де $\Delta\psi$ – величина відновленого впродовж паузи використаного ресурсу пластичності на першій ступені $\Delta\psi = \psi_1 + \psi_{*2} - 1$.

Детально проаналізовано зіставлення співвідношення (0.15) з експериментальними даними з двоступеневого кручення суцільних зразків із сталі 14X17H2 з паузою між ступенями [2]. В указаній праці для апроксимації отриманих даних в діапазоні $950^\circ\text{C} \leq T \leq 1150^\circ\text{C}$, $0 \leq \psi_1 < 1$, $0 \leq t_p \leq 30$ сек. було запропоновано емпіричне співвідношення $\Delta\psi = \exp(0,241\psi_1^{0,588} (T/1000)^{-1,361} t_p^{0,251}) - 1$.

Відзначено низку суттєвих переваг співвідношення (0.15), навіть, за умови звуження його значення до одної з версій емпіричної апроксимації.

Показано також, що ті самі закономірності прослідковуються і в літературних експериментальних даних з двоступеневого кручення або розтягу з проміжною паузою суцільних зразків із хромонікелевих сталей X18H10T, X23H18, 20X23H18, 10X17H13M2T, 20X13, сталі ШХ15 [11]. Зауважується, що подібні експерименти моделюють деякі технологічні процеси обробки тиском, зокрема, гарячу реверсивну прокатку на обтискувальному стані.

В [11] обґрунтовано відомий з літератури, експериментально виявлений важливий висновок про більшу технологічність схеми зі зменшенням швидкості в порівнянні зі схемою збільшення швидкості при безперервному двоступеневому деформуванні з різними швидкостями на кожній ступені.

У роботі [8] сформульована варіаційна задача ізопериметричного типу і показано, що в загальному випадку розв'язку цієї задачі не існує. Показано, що стосовно до класу двоступеневого деформування варіаційна задача зводиться до задачі нелінійного програмування та запропоновано методи розв'язання аналогічних задач стосовно до класу багатоступеневого деформування [5, 8].

При дослідженні взаємозв'язку теорії підсумовування пошкоджень спадкового типу з класичною задачею про таутохрону був встановлений закон зміни швидкості деформацій, що приводить до переходу матеріалу в стан надпластичності [6]. Застосування теорії інтегральних рівнянь дозволило розробити підхід для отримання більш широкого спектру співвідношень, що призводять до переходу матеріалу в стан надпластичності [22].

Показана ефективність застосування розробленої моделі в дослідженні оптимальних законів розподілу сил спортсмена, що долає певну дистанцію [10]. Встановлено, що вказаний підхід відображає низку досить нетривіальних закономірностей, що спостерігаються на практиці. В результаті виявлено глибинні зв'язки, що проявляються на феноменологічному рівні при протіканні, на перший погляд, зовсім різних процесів.

З огляду на вже досліджені доволі цікаві та важливі властивості моделі підсумовування пошкоджень спадкового типу, важливо дослідити вказану модель для якомога більш широкого кола процесів деформування $\dot{\epsilon}_i = \dot{\epsilon}_i(t)$.

В роботі [9] автори припустилися кількох помилок, що призвело до спотворення деяких ключових результатів.

У цій статті представлені результати дослідження найбільшого і найменшого значень граничної деформації для класу лінійних дволанкових траєкторій деформування трикутноподібного виду.

§1. Постановка задачі.

Під час неізотермічних процесів гарячої обробки тиском матеріалів заготовка охолоджується. Для малопластичних матеріалів це призводить не тільки до погіршення деформовності заготовок, а й до зростання опору деформуванню, отже, й до збільшення енергозатрат [5]. Для матеріалів з чутливістю граничної пластичної деформації до інтенсивності швидкості деформації, важливим є пошук режимів деформування для скорочення часу процесу деформування без втрати якості виробу, тобто, з урахуванням пластичних можливостей матеріалу.

Розглянемо варіаційну задачу ізопериметричного типу, що сформульована в рамках моделі підсумовування пошкоджень [8]. Цільовою функцією є величина граничної накопиченої пластичної деформації $\bar{\epsilon}_f$

$$\bar{\epsilon}_f = \int_0^{t_f} \dot{\epsilon}_i(\tau) d\tau \rightarrow \max, \quad (1.1)$$

обмеження задачі складаються з умов досягнення граничного стану

$$\int_0^{t_f} \varphi(t-\tau) f(\dot{\epsilon}_i(\tau)) d\tau = 1 \quad (1.2)$$

і належності точок досліджуваних траєкторій $\dot{\varepsilon}_i = \dot{\varepsilon}_i(t)$ області допустимих значень

$$\int_0^t \varphi(t-\tau) f(\dot{\varepsilon}_i(\tau)) d\tau \leq 1, \quad \forall t \in (0, t_f), \quad (1.3)$$

де t, τ – час; $\dot{\varepsilon}_i$ – швидкість деформації – шукана функція; t_f – момент досягнення граничного стану; $\varphi(t-\tau)$ – ядро спадковості; f – деяка функція.

Розглянемо деформування за лінійною дволанковою траєкторією трикутно-подібного виду, схема якого показана на рис. 1, а: $\dot{\varepsilon}_A > \dot{\varepsilon}_0 > 0$. Відповідно до цього закону маємо

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_i = \bar{R}(t, t_A, \dot{\varepsilon}_0) &= \dot{\varepsilon}_0 + (\dot{\varepsilon}_A - \dot{\varepsilon}_0) \frac{t}{t_A}, \quad 0 \leq t \leq t_A, \\ 0 < t_A < t_f; \end{aligned} \quad (1.4)$$

$$\dot{\varepsilon}_i = \bar{R}(t, t_A, \dot{\varepsilon}_0) = \frac{\dot{\varepsilon}_0 - \dot{\varepsilon}_A}{t_f - t_A} (t - t_A) + \dot{\varepsilon}_A, \quad t_A < t \leq t_f,$$

де $\dot{\varepsilon}_0 = \bar{R}(t=0, t_A, \dot{\varepsilon}_0) = \bar{R}(t=t_f, t_A, \dot{\varepsilon}_0)$, $\dot{\varepsilon}_A = \bar{R}(t=t_A, t_A, \dot{\varepsilon}_0)$.

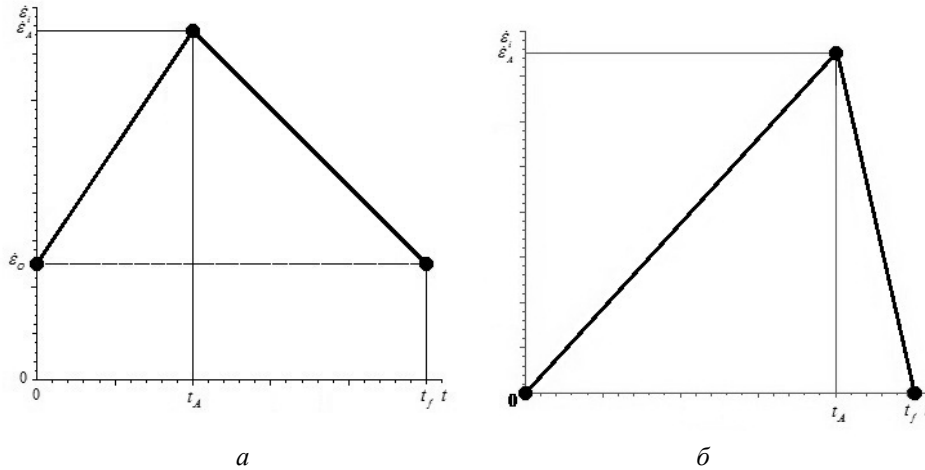


Рис. 1

Зменшимо кількість невідомих за рахунок введення умови збігу моментів досягнення граничного стану і нульового значення швидкості деформацій. Відповідний закон зміни швидкості деформацій зображений на рис. 1, б. У цьому випадку на основі (1.4) отримаємо

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_i = \bar{R}(t, t_A) &= \dot{\varepsilon}_A \frac{t}{t_A}, \quad 0 \leq t \leq t_A, \\ 0 < t_A < t_f; \end{aligned} \quad (1.5)$$

$$\dot{\varepsilon}_i = \bar{R}(t, t_A) = \dot{\varepsilon}_A \left(1 - \frac{t - t_A}{t_f - t_A} \right), \quad t_A < t \leq t_f.$$

Для двох граничних випадків $t_A \rightarrow 0$ та $t_A \rightarrow t_f$ отримаємо відповідно

$$\bar{R}(t, t_A \rightarrow +0) = \bar{R}(t, t_A = 0) = \dot{\varepsilon}_A \left(1 - \frac{t}{t_f}\right), \quad 0 \leq t \leq t_f; \quad (1.6)$$

$$\bar{R}(t, t_A \rightarrow t_f - 0) = \bar{R}(t, t_A = t_f) = \dot{\varepsilon}_A \frac{t}{t_f}, \quad 0 \leq t \leq t_f. \quad (1.7)$$

Відповідні граничні одноланкові траєкторії наведені на рис. 2. В цьому випадку цільова функція, відповідно (1.1), дорівнює

$$\bar{\varepsilon}_f = \frac{1}{2} t_f \dot{\varepsilon}_A \rightarrow \max. \quad (1.8)$$

Надалі будемо використовувати степеневе представлення ядра спадковості, що в сукупності з лінійним варіантом моделі (1.2) тотожне моделі (0.8) при $\lambda = 1/n$ та породжує степеневу залежність кривої граничних деформацій від часу

$$\bar{\varepsilon}_{fs} = g (\dot{\varepsilon}_i)^{(1-1/n)}, \quad (1.9)$$

де $\bar{\varepsilon}_{fs}$ – величина граничної накопиченої пластичної деформації, що відповідає деформуванню з постійною швидкістю деформації; g, n – матеріальні константи ($g > 0, 0 < n \leq 1$).

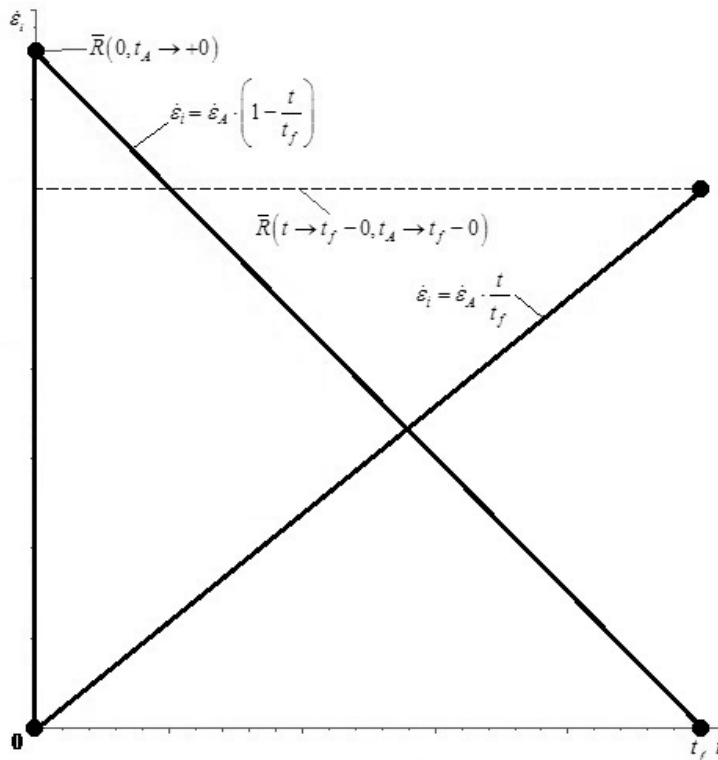


Рис. 2

Тоді, відповідно обмеження (1.3), отримаємо

$$\psi(t, t_A) = \frac{\dot{\varepsilon}_A}{g^n(n+1)} t^n \left(n+1 - \frac{t}{t_f} \right) \leq 1, \quad 0 \leq t \leq t_f, \quad t_A = 0;$$

$$\psi(t, t_A) = \frac{\dot{\varepsilon}_A}{g^n(n+1)} \frac{t^{n+1}}{t_A} < 1, \quad 0 \leq t \leq t_A, \quad 0 < t_A < t_f; \quad (1.10)$$

$$\psi(t, t_A) = \frac{\dot{\varepsilon}_A}{g^n(n+1)} \frac{1}{t_A} \left(t^{n+1} - \frac{(t-t_A)^{n+1}}{1-\theta} \right) \leq 1, \quad t_A < t \leq t_f, \quad 0 < t_A < t_f;$$

$$\psi(t, t_A) = \frac{\dot{\varepsilon}_A}{g^n(n+1)} \frac{1}{t_f} t^{n+1} \leq 1, \quad 0 \leq t \leq t_f, \quad t_A = t_f.$$

А, відповідно до (1.2):

$$\frac{\dot{\varepsilon}_A}{g^n(n+1)} t_f^n n = 1, \quad t_A = 0; \quad \frac{\dot{\varepsilon}_A}{g^n(n+1)} \theta (t_f^n - (t_f - t_A)^n) = 1; \quad (1.11)$$

$$\frac{\dot{\varepsilon}_A}{g^n(n+1)} t_f^n = 1, \quad t_A = t_f, \quad (1.12)$$

де θ – нормована абсциса точки зламу

$$\theta = \frac{t_A}{t_f}, \quad 0 < \theta \leq 1.$$

Вираз (1.10) авторами [9] записано некоректно.

Отже, ми отримали задачу нелінійного програмування (задача № 1) з лінійною цільовою функцією (1.8) і нелінійними обмеженнями у вигляді строгих рівностей

$$\dot{\varepsilon}_A(\theta) = \left(\frac{g}{t_f} \right)^n \frac{(n+1)}{n}, \quad \theta = 0 \Leftrightarrow t_A = 0; \quad (1.13)$$

$$\dot{\varepsilon}_A(\theta) = \left(\frac{g}{t_f} \right)^n (n+1) \frac{\theta}{1-(1-\theta)^n}, \quad 0 < \theta < 1 \Leftrightarrow 0 < t_A < t_f; \quad (1.14)$$

$$\dot{\varepsilon}_A(\theta) = \left(\frac{g}{t_f} \right)^n (n+1), \quad \theta = 1 \Leftrightarrow t_A = t_f \quad (1.15)$$

та нерівностей (1.10).

Множиною допустимих значень є множина координат $(t_A, \dot{\varepsilon}_A, \psi)$ або $(\theta, \dot{\varepsilon}_A, \psi)$, що при заданих n, g, t_f задовольняють обмеження (1.10), (1.13), (1.14), (1.15). Пошук розв'язку сформульованої задачі означає визначення серед множини допустимих значень таких величин змінних $(t_A, \dot{\varepsilon}_A, \psi)$, що відповідають максимальним значенням функції (1.8).

§2. Дослідження існування розв'язку.

Для дослідження існування розв'язку задачі № 1: (1.8), (1.10), (1.13) – (1.15) розглянемо дві допоміжні задачі нелінійного програмування.

Задача № 1.1: (1.8), (1.13) – (1.15).

Задача № 1.2: (1.8), (1.13) – (1.15) та (1.10) при $0 < t_A < t_f, 0 \leq t \leq t_A$.

Покажемо, що існує і притому єдиний розв'язок допоміжної задачі № 1.1.

Теорема 1. Нехай гранична умова описується рівняннями (1.2), (1.9), тоді під час деформування за траєкторією (1.5) – (1.7), швидкість деформації в точці зламу набуває найбільше значення при $\theta=0$ і найменше значення при $\theta=1$ та є монотонно спадною функцією на інтервалі $\theta \in (0; 1)$.

Доведемо неперервність на відрізку $\theta \in [0, 1]$ функції $\dot{\varepsilon}_A = \dot{\varepsilon}_A(\theta)$, що визначена рівняннями (1.13) – (1.15).

Очевидно, що функція $\dot{\varepsilon}_A = \dot{\varepsilon}_A(\theta)$ є неперервною на інтервалі $0 < \theta < 1$. Тому необхідно дослідити поведінку функції на кінцях інтервалу.

Визначимо границю $\lim_{\theta \rightarrow +0} \dot{\varepsilon}_A$ на основі виразу (1.14). В результаті застосування правила Лопітала отримаємо

$$\lim_{\theta \rightarrow +0} \dot{\varepsilon}_A = \lim_{\theta \rightarrow +0} \left(\frac{g}{t_f} \right)^n (n+1) \frac{\theta}{1-(1-\theta)^n} = \left(\frac{g}{t_f} \right)^n (n+1) \lim_{\theta \rightarrow +0} \frac{1}{n(1-\theta)^{n-1}} = \left(\frac{g}{t_f} \right)^n \frac{n+1}{n}.$$

Із порівняння останнього співвідношення з (1.13) очевидно, що

$$\dot{\varepsilon}_A(\theta)_{\theta=0} = \lim_{\theta \rightarrow +0} \dot{\varepsilon}_A(\theta).$$

Аналогічним чином можна встановити

$$\dot{\varepsilon}_A(\theta)_{\theta=1} = \lim_{\theta \rightarrow 1-0} \dot{\varepsilon}_A(\theta).$$

Отже, функція

$$\dot{\varepsilon}_A = R_A(\theta) = \left(\frac{g}{t_f} \right)^n (n+1) \begin{cases} \frac{1}{n}, & \theta = 0, \\ \frac{\theta}{1-(1-\theta)^n}, & 0 < \theta \leq 1 \end{cases} \quad (2.1)$$

є неперервною на відрізку $\theta \in [0, 1]$.

Покажемо, що функція $R_A(\theta)$ монотонно спадає на інтервалі $\theta \in (0; 1)$. З цією метою визначимо та дослідимо похідну функції

$$\frac{d(R_A(\theta))}{d\theta} = \left(\frac{g}{t_f} \right)^n (n+1) \frac{1-(1-\theta)^n - \theta n(1-\theta)^{n-1}}{(1-(1-\theta)^n)^2}, \quad 0 < \theta \leq 1.$$

Оскільки

$$\frac{\left(\frac{g}{t_f} \right)^n (n+1)}{(1-(1-\theta)^n)^2} > 0, \quad 0 < \theta < 1, \quad 0 < n < 1,$$

знак похідної визначається знаком виразу

$$u(\theta, n) = 1 - (1-\theta)^n - \theta n(1-\theta)^{n-1}, \quad 0 < \theta < 1, \quad 0 < n < 1.$$

Доведемо, що

$$u(\theta, n) < 0, \quad (0 < \theta < 1, \quad 0 < n < 1). \quad (2.2)$$

Виконаємо перетворення

$$u(\theta, n) = 1 - (1-\theta)^{n-1}(1-\theta + \theta n) < 0, \quad (0 < \theta < 1, \quad 0 < n < 1),$$

звідки випливає

$$1 - \theta + \theta n > (1 - \theta)^{1-n}, \quad 0 < \theta < 1, \quad 0 < n < 1. \quad (2.3)$$

Із застосуванням розвинення функції в ряд Тейлора отримаємо співвідношення

$$(1 - \theta)^{1-n} = 1 - (1 - n)\theta - \frac{(1 - n)n}{2!}\theta^2 - \frac{(1 - n)n(n + 1)}{3!}\theta^3 - \\ - \frac{(1 - n)n(n + 1)(n + 2)}{4!}\theta^4 - \dots,$$

з урахуванням якого нерівність (2.3) може бути зведена до очевидної нерівності

$$\frac{(1 - n)n}{2!}\theta^2 + \frac{(1 - n)n(n + 1)}{3!}\theta^3 + \frac{(1 - n)n(n + 1)(n + 2)}{4!}\theta^4 + \dots > 0,$$

що і є свідченням істинності нерівності (2.2).

Отже, неперервна функція (2.1) є строго спадною на інтервалі $0 < \theta < 1$ і набуває найбільше і найменше значення на його кінцях. Тим самим теорему 1 доведено.

У зв'язку з заміною рівностей (1.13) – (1.15) однією рівністю (2.1), уточнимо постановку сформульованих задач:

задача № 1: (1.8), (1.10), (2.1);

задача № 1.1: (1.8), (2.1);

задача № 1.2: (1.8), (2.1), (1.10) при $0 \leq t \leq t_A$.

Оскільки на відрізку $\theta \in [0, 1]$ функція $\dot{\varepsilon}_A = R_A(\theta)$ досягає свого максимального значення, до того ж тільки в точці $\theta = 0$, існує і притому єдиний розв'язок задачі № 1.1.

Задача № 1.2 відрізняється від задачі № 1.1 тільки наявністю додаткового обмеження у вигляді нерівності

$$\dot{\varepsilon}_A \leq \left(\frac{g}{\theta t_f} \right)^n (n + 1). \quad (2.4)$$

Якщо розв'язок задачі № 1.1 задовольняє цій нерівності, він буде також розв'язком задачі № 1.2. Перевіримо чи задовольняє розв'язок задачі № 1.1 вказану нерівність.

При $\theta \rightarrow +0$ обмеження (2.4) з урахуванням (2.1) може бути зведене до очевидної нерівності

$$n > \lim_{\theta \rightarrow +0} \theta^n = 0, \quad \forall n \in (0; 1].$$

В іншому випадку отримаємо

$$\frac{\theta^{n+1}}{1 - (1 - \theta)^n} \leq 1, \quad 0 < n \leq 1. \quad (2.5)$$

Отже, при заданому значенні матеріальної константи n , розв'язок задачі № 1.1 є одночасно і розв'язком задачі № 1.2 тільки за умови, що θ належить області допустимих значень (2.5).

Задача № 1 відрізняється від допоміжної задачі № 1.2 тільки наявністю нерівностей (1.10) при $t_A < t \leq t_f$, $0 \leq t_A < t_f$. Покажемо двома способами, що вказані нерівності в загальному випадку не виконуються.

Спосіб 1. Визначимо частинну похідну від лівої частини одної з нерівностей (1.10), отримаємо

$$\psi'_t(t, \theta) = \frac{\dot{\epsilon}_A}{g^n \theta t_f} \left(t^n - \frac{(t - \theta t_f)^n}{1 - \theta} \right), \quad \theta t_f < t \leq t_f, \quad 0 < \theta < 1. \quad (2.6)$$

Знайдемо границю

$$\lim_{t \rightarrow t_f - 0} \psi'_t(t, \theta) = \frac{\dot{\epsilon}_A t_f^{n-1}}{g^n \theta} (1 - (1 - \theta)^{n-1}).$$

Оскільки

$$\frac{\dot{\epsilon}_A}{g^n \theta} t_f^{n-1} > 0, \quad \theta > 0,$$

то

$$\text{sign} \left(\lim_{t \rightarrow t_f - 0} \psi'_t(t, \theta) \right) = \text{sign} (1 - (1 - \theta)^{n-1}).$$

Припустимо, що

$$1 - (1 - \theta)^{n-1} < 0, \quad (0 < \theta < 1, 0 < n < 1), \quad (2.7)$$

тоді

$$1 - (1 - \theta)^{n-1} < 0 \Leftrightarrow (1 - \theta)^{n-1} > 1 \Leftrightarrow (1 - \theta)^{1-n} < 1 \Leftrightarrow \theta > 0, \quad (0 < \theta < 1, 0 < n < 1).$$

Отримали очевидну нерівність, що свідчить про істинність нерівності (2.7). Отже,

$$\lim_{t \rightarrow t_f - 0} \psi'_t(t, \theta) < 0, \quad (0 < \theta < 1, 0 < n < 1).$$

Звідси, з урахуванням справедливості рівності (2.1), випливає, що існує лівий проколений окіл точки t_f (позначимо через $U_{t_f} \cap \{t : t < t_f\}$) такий, що

$$\forall t \in U_{t_f} \cap \{t : t < t_f\} : \psi(t) > 1. \quad (2.8)$$

Остання нерівність показує, що обмеження (1.10) при $t_A < t \leq t_f$ не виконується.

Аналогічна ситуація має місце і з першою з нерівностей (1.10). Визначимо похідну від лівої частини цієї нерівності, отримаємо

$$\psi'_t(t, \theta) = \frac{\dot{\epsilon}_A}{g^n} \left(n t^{n-1} - \frac{t^n}{t_f} \right), \quad 0 \leq t \leq t_f, \quad t_A = 0.$$

Обчислимо границю

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow t_f - 0} \psi'_t(t, \theta) &= \lim_{t \rightarrow t_f - 0} \left[\frac{\dot{\epsilon}_A}{g^n} \left(n t^{n-1} - \frac{t^n}{t_f} \right) \right] = \\ &= \frac{\dot{\epsilon}_A}{g^n} t_f^{n-1} (n-1) < 0, \quad 0 \leq t \leq t_f, \quad t_A = 0, \quad 0 < n < 1. \end{aligned}$$

І в цьому випадку існує окіл $U_{t_f} \cap \{t : t < t_f\}$, для точок якого виконується нерівність (2.8).

Нерівності (1.10) виконуються тільки для правої граничної одноланкової траєкторії ($t_A = t_f, 0 \leq t \leq t_f$).

Спосіб 2. У цьому способі будемо слідувати абсолютно традиційним шляхом: знайдемо стаціонарну точку першого роду t_e на основі похідної (2.6) і покажемо, що

$$\psi(t_e, \theta) > 1, \quad \theta t_f < t_e < t_f, \quad (0 < \theta < 1, 0 < n < 1).$$

На основі (2.6) легко отримати

$$1 - \frac{1}{(1-\theta)} \left(1 - \theta \frac{t_f}{t_e}\right)^n = 0, \quad (0 < \theta < 1, 0 < n < 1),$$

звідки знаходимо

$$t_e = \frac{\theta t_f}{1 - (1-\theta)^{\frac{1}{n}}}, \quad (0 < \theta < 1, 0 < n < 1).$$

Покажемо, що $\theta t_f < t_e < t_f$. Дійсно

$$\theta < 1 \Rightarrow 1 - \theta > 0 \Rightarrow (1-\theta)^{\frac{1}{n}} > 0 \Rightarrow 1 - (1-\theta)^{\frac{1}{n}} < 1,$$

до того ж

$$1 - \theta < 1 \Rightarrow (1-\theta)^{\frac{1}{n}} < 1 \Rightarrow 1 - (1-\theta)^{\frac{1}{n}} > 0,$$

отже

$$t_e = \frac{\theta t_f}{1 - (1-\theta)^{\frac{1}{n}}} > \theta t_f, \quad (0 < \theta < 1, 0 < n < 1).$$

З іншого боку

$$\begin{aligned} \theta > 0 \Rightarrow 1 - \theta < 1 \Rightarrow (1-\theta)^{\frac{1-n}{n}} < 1 \Rightarrow (1-\theta)^{\frac{1}{n}} < 1 - \theta \Rightarrow \\ \Rightarrow 1 - (1-\theta)^{\frac{1}{n}} > \theta \Rightarrow \frac{\theta}{1 - (1-\theta)^{\frac{1}{n}}} < 1, \quad (0 < \theta < 1, 0 < n < 1), \end{aligned}$$

в результаті отримаємо вираз для визначення стаціонарної точки

$$t_e = \frac{\theta}{1 - (1-\theta)^{\frac{1}{n}}} t_f < t_f, \quad (0 < \theta < 1, 0 < n < 1),$$

підстановка якого в (1.10) при $t_A < t \leq t_f$ приводить до виразу

$$\psi \left(t = t_e = \frac{\theta t_f}{1 - (1-\theta)^{\frac{1}{n}}}, \theta \right) = \frac{\dot{\varepsilon}_A}{g^n (n+1) t_A} \left(\frac{t_f^{n+1} \theta^{n+1}}{\left(1 - (1-\theta)^{\frac{1}{n}}\right)^{n+1}} - \frac{\left(t_f \frac{\theta}{1 - (1-\theta)^{\frac{1}{n}}} - t_A \right)^{n+1}}{1 - \theta} \right),$$

$$0 < t_A < t_e < t_f, \quad (0 < \theta < 1, 0 < n < 1). \quad (2.9)$$

За допомогою нескладних перетворень останнього співвідношення з урахуванням (2.1), отримаємо

$$\psi(t=t_e, \theta) = \varphi(\theta, n) \varphi^n\left(\theta, \frac{1}{n}\right), \quad (0 < \theta < 1, 0 < n < 1),$$

де

$$\varphi(\theta, n) = \frac{\theta}{1 - (1 - \theta)^n}.$$

Для доведення умови

$$\varphi(\theta, n) \varphi^n\left(\theta, \frac{1}{n}\right) > 1, \quad \forall \theta \in (0; 1), \quad \forall n \in (0; 1)$$

з урахуванням співвідношень

$$0 < \varphi\left(\theta, \frac{1}{n}\right) < 1 \Rightarrow \varphi\left(\theta, \frac{1}{n}\right) < \varphi^n\left(\theta, \frac{1}{n}\right) < 1 \quad \forall \theta \in (0; 1), \quad \forall n \in (0; 1),$$

справедливість яких легко довести, досить показати, що

$$\varphi(\theta, n) \varphi^n\left(\theta, \frac{1}{n}\right) > 1, \quad \forall \theta \in (0; 1), \quad \forall n \in (0; 1).$$

Позначимо $z = 1 - t$ та запишемо останню нерівність у вигляді

$$(1 - z)^2 > (1 - z^n) \left(1 - z^{\frac{1}{n}}\right), \quad \forall z \in (0; 1), \quad \forall n \in (0; 1). \quad (2.10)$$

Отриману нерівність легко довести з урахуванням стандартних нерівностей [1], які запишемо у вигляді

$$\begin{cases} 1 - z^n \geq n(1 - z) \\ z^n - 1 \geq \frac{1}{n}(z - 1) \end{cases}, \quad z > 0, \quad \forall n \in (0; 1).$$

У нашому випадку $0 < z < 1$. Із застосуванням формули Лагранжа про скінченні прирости для степеневі функції або за допомогою стандартної нерівності Юнга для неперервної, строго зростаючої функції, нескладно довести, що в цьому випадку справедливі строгі нерівності

$$\begin{cases} 1 - z^n > n(1 - z) \\ z^n - 1 > \frac{1}{n}(z - 1) \end{cases}, \quad \forall z \in (0; 1), \quad \forall n \in (0; 1). \quad (2.11)$$

Після застосування першої нерівності (2.11) нерівність (2.10) стає тотожною другій нерівності (2.11).

Отже, розв'язок задачі № 1 існує тільки для траєкторії з $t_A = t_f$. Для всіх інших траєкторій, для яких $0 \leq t_A < t_f$, розв'язку задачі № 1 не існує.

Графічна інтерпретація сутності отриманих результатів показана на рис. 3. Розрахунки виконані відповідно до (1.10), (1.11), (1.12) при $n = 0,5$. Номерами 1 – 4 вказані криві, що відповідають значенням $\theta = 0,1; 0,5; 0,9; 1$, відповідно. Слід звернути увагу на те, що абсциса кривої накопичення пошкоджень, що збігається з точкою зміни кольору цієї кривої, дорівнює відповідному значенню θ і відповідає точці зламу траєкторії деформування. Вимога одночасного досягнення граничного стану і нульового значення швидкості деформацій при деформуванні за лінійними двоанковими траєкто-

р'ями трикутноподібного виду призводить до виходу будь-якої траєкторії $\psi = \psi(t, t_A)$ ($0 \leq t_A < t_f$), що задовольняє умові $\psi(t_f, t_A) = 1$, за межі області допустимих значень з порушенням нерівностей (1.10).

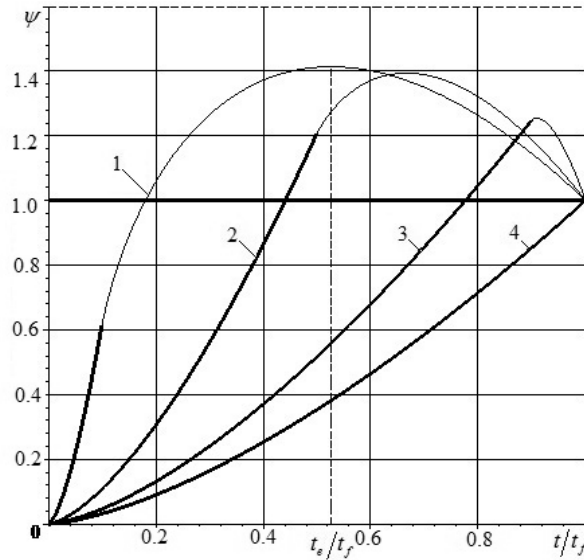


Рис. 3

Слід зауважити, що в скалярній теорії підсумовування пошкоджень для більшості моделей і траєкторій типовим є монотонне зростання функції пошкоджень на всій області визначення. Це стосується як повзучості [3], так і пластичного деформування [11, 16, 23], зокрема, листових матеріалів [15, 21, 26]. І тільки для моделей спадкового типу стосовно траєкторій окремого класу, елементом якого є розглянута множина лінійних дволанкових траєкторій трикутноподібного виду, функція $\psi = \psi(t, t_A)$ досягає свого екстремуму при $t = t_e$, $t_A < t_e < t_f$.

Унікальність отриманого результату полягає в тому, що модель описує ефект зменшення рівня пошкоджень (після досягнення максимального значення) на тлі строго зростаючої накопиченої деформації та незмінності напрямного тензора приростів пластичних деформацій.

До теперішнього часу ефект зменшення пошкоджень на тлі строго зростаючої накопиченої деформації був описаний тільки на основі тензорних моделей накопичення пошкоджень. При цьому розглядалися або тіла з початковою анізотропією граничних деформацій, або процеси зі зміною компонент напрямного тензора приростів пластичних деформацій. Останнє стосується зміни в процесі деформування виду деформації і / або головних напрямків тензора приростів пластичних деформацій.

Подібна ситуація є яскравим прикладом важливості забезпечення виконання нерівності (1.3) разом із строгою рівністю (1.2) при постановці варіаційних задач.

Модифікуємо постановку задачі № 1 в такий спосіб.

§3. Постановка і дослідження модифікованої задачі.

Задача № 2. Знайти параметри $(t_A, \dot{\epsilon}_A, \psi)$ деформування за лінійними дволанковими траєкторіями трикутноподібного виду із заданою тривалістю t_B

$$\dot{\epsilon}_i = r(t, t_A) = \dot{\epsilon}_A \left(1 - \frac{t}{t_B} \right), \quad 0 \leq t \leq t_B, t_A = 0;$$

$$\dot{\varepsilon}_i = r(t, t_A) = \dot{\varepsilon}_A \frac{t}{t_A}; \quad 0 \leq t \leq t_A, \quad 0 < t_A < t_B; \quad (3.1)$$

$$\dot{\varepsilon}_i = r(t, t_A) = \dot{\varepsilon}_A \left(1 - \frac{t - t_A}{t_B - t_A} \right), \quad t_A < t \leq t_B, \quad 0 < t_A < t_B;$$

$$\dot{\varepsilon}_i = r(t, t_A) = \dot{\varepsilon}_A \frac{t}{t_f}, \quad 0 \leq t \leq t_B, \quad t_A = t_B,$$

що відповідають найбільшій накопиченій деформації.

Запишемо математичну модель сформульованої задачі.

Цільова функція

$$\bar{\varepsilon}_B = \frac{1}{2} \dot{\varepsilon}_A t_B \rightarrow \max ,$$

обмеження

$$\psi(t, \mu) = \frac{\dot{\varepsilon}_A}{g^n (n+1)} t^n \left(n+1 - \frac{t}{t_B} \right) \leq 1, \quad 0 \leq t \leq t_B, \quad t_A = 0 \Leftrightarrow \mu = 0;$$

$$\psi(t, \mu) = \frac{\dot{\varepsilon}_A}{g^n (n+1) \mu t_B} t^{n+1} < 1, \quad 0 \leq t \leq t_A, \quad 0 < t_A < t_B \Leftrightarrow 0 < \mu < 1; \quad (3.2)$$

$$\psi(t, \mu) = \frac{\dot{\varepsilon}_A}{g^n (n+1) \mu t_B} \left(t^{n+1} - \frac{(t - \mu t_B)^{n+1}}{1 - \mu} \right) \leq 1, \quad t_A < t \leq t_B, \quad 0 < t_A < t_B \Leftrightarrow 0 < \mu < 1;$$

$$\psi(t, \mu) = \frac{\dot{\varepsilon}_A}{g^n (n+1) t_B} t^{n+1} \leq 1, \quad 0 \leq t \leq t_B, \quad t_A = t_B \Leftrightarrow \mu = 1,$$

де

$$\mu = \frac{t_A}{t_B}. \quad (3.3)$$

Покажемо, що існує і притому єдиний розв'язок задачі № 2.

Сформулюємо і доведемо теорему.

Теорема 2. Нехай швидкість деформацій змінюється за лінійною дволанковою траєкторією трикутноподібного виду із заданою тривалістю t_B (3.1), тоді, відповідно до обмежень задачі № 2, швидкість деформації в точці зламу приймає найбільше і найменше значення відповідно при $\mu = 0$, $\mu = 1$ і є монотонно спадною функцією на інтервалі $\mu \in (0; 1)$.

Визначимо максимальне значення функції $\psi = \psi(t, \mu)$ при фіксованому значенні μ за співвідношенням

$$\psi(t_e, \mu) = \frac{\dot{\varepsilon}_A}{n+1} \left(\frac{t_B}{g} \right)^n \begin{cases} n^n, & \mu = 0, \\ \varphi^n \left(\mu, \frac{1}{n} \right), & 0 < \mu \leq 1, \end{cases} \quad (0 < n < 1),$$

що отримано на основі (2.9) шляхом алгебраїчних перетворень з урахуванням нових позначень (3.3).

На основі співвідношення

$$\psi(t_e, \mu) = 1$$

визначимо величину $\dot{\varepsilon}_A$ як функцію нормованої абсциси точки зламу μ

$$\dot{\varepsilon}_A(\mu) = (n+1) \left(\frac{g}{t_B} \right)^n \begin{cases} n^{-n}, & \mu = 0, \\ \varphi^{-n} \left(\mu, \frac{1}{n} \right), & 0 < \mu \leq 1, \end{cases} \quad (0 < n < 1). \quad (3.4)$$

Отже, співвідношення, що отримано в способі 2 доведення відсутності існування розв'язку задачі № 1, використані при розв'язанні задачі № 2.

Аналогічно тому, як ми це робили вище, можна довести, що функція (3.4) є неперервною на відрізку $\mu \in [0; 1]$ та строго спадною на інтервалі $\mu \in (0; 1)$ і, отже, приймає найбільше і найменше значення відповідно при $\mu = 0$ і $\mu = 1$. Теорему доведено.

Тим самим доведено існування і єдиність розв'язку задачі № 2: найбільше значення цільової функції дорівнює

$$(\bar{\varepsilon}_B)_{\max} = \frac{1}{2} (n+1) \left(\frac{g}{nt_B} \right)^n t_B$$

і при цьому забезпечується виконання нерівностей (3.2), що з урахуванням (3.4) і позначенням

$$\lambda = \frac{t}{t_B},$$

можна записати у вигляді

$$\begin{aligned} \psi(\lambda, \mu) &= \left(\frac{\lambda}{n} \right)^n (n+1-\lambda) \leq 1, \quad 0 \leq \lambda \leq 1, \quad \mu = 0; \\ \psi(\lambda, \mu) &= \left(\frac{\lambda}{\varphi \left(\mu, \frac{1}{n} \right)} \right)^n \frac{\lambda}{\mu} < 1, \quad 0 \leq \lambda \leq \mu, \quad 0 < \mu < 1; \\ \psi(\lambda, \mu) &= \left(\frac{\lambda}{\varphi \left(\mu, \frac{1}{n} \right)} \right)^n \frac{\lambda}{\mu} \left(1 - \frac{\left(1 - \frac{\mu}{\lambda} \right)^{n+1}}{1-\mu} \right) \leq 1, \quad \mu < \lambda \leq 1, \quad 0 < \mu < 1; \\ \psi(\lambda, \mu) &= \lambda^{n+1} \leq 1, \quad 0 \leq \lambda \leq 1, \quad \mu = 1. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Графічну інтерпретацію сутності отриманих результатів показано на рис. 4, а.

На основі (0.11) з урахуванням (3.1), отримаємо

$$\bar{\varepsilon}(\lambda, \mu) = 2\lambda - \lambda^2, \quad 0 \leq \lambda \leq 1, \quad \mu = 0, \quad \bar{\varepsilon}(\lambda, \mu) = \frac{1}{\mu} \lambda^2, \quad 0 \leq \lambda \leq \mu, \quad 0 < \mu < 1; \quad (3.6)$$

$$\bar{\varepsilon}(\lambda, \mu) = 1 - \frac{(1-\lambda)^2}{1-\mu}, \quad \mu < \lambda \leq 1, \quad 0 < \mu < 1, \quad \bar{\varepsilon}(\lambda, \mu) = \lambda^2, \quad 0 \leq \lambda \leq 1, \quad \mu = 1,$$

де $\bar{\varepsilon}$ – нормована величина накопиченої деформації

$$\bar{\varepsilon}(\lambda, \mu) = \frac{\bar{\varepsilon}(\lambda, \mu)}{\frac{1}{2} \dot{\varepsilon}_A t_B}.$$

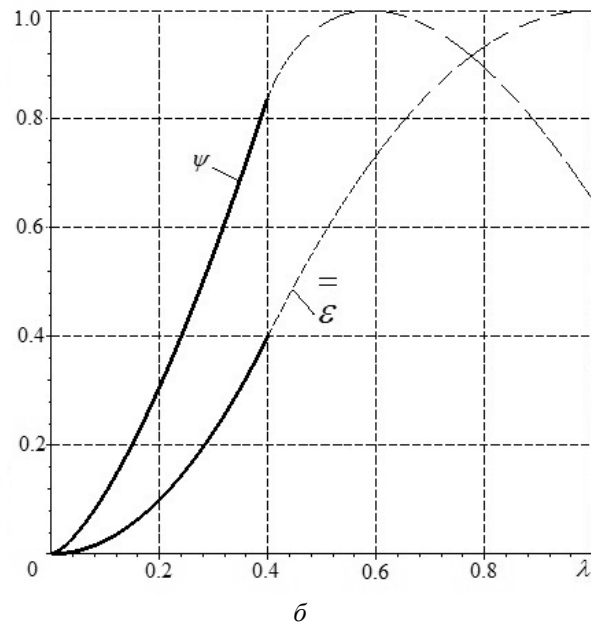
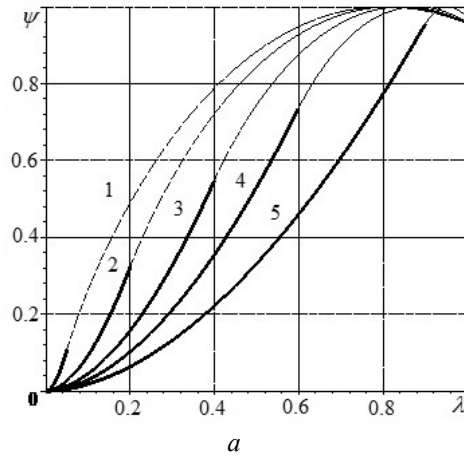


Рис. 4

Розрахунки рівня пошкодження та нормованої накопиченої деформації (рис. 4) виконані відповідно за співвідношеннями (3.5), (3.6) для магнієвих сплавів: а) MgNi19, $n = 0,799$, номерами 1–5 указано криві, що відповідають значенням $\mu = 0,05; 0,2; 0,4; 0,6; 0,9$; б) MgCa0.8 $n = 0,45$; $\mu = 0,4$. Перша та друга ланка траєкторії деформування показані відповідно товстими суцільними та тонкими переривчастими лініями. Абсциси точки переходу від першої до другої ланки для кожної лінії дорівнюють відповідному значенню μ . Особливої уваги на рис. 4, б заслуговує ефект зменшення рівня пошкодження разом з ростом накопиченої деформації.

Висновки.

1. Задача варіаційного числення на знаходження найбільшого значення граничної накопиченої деформації щодо окремого класу лінійного дволанкового деформування може бути зведена до задачі нелінійного програмування з трьома невідомими, лінійною цільовою функцією і обмеженнями у вигляді нелінійних нерівностей і строгих рівностей.

2. В ході дослідження існування та єдиності розв'язку зазначеної задачі нелінійного програмування виявлено, що вимога одночасного досягнення граничного стану і нульового значення швидкості деформацій під час деформування за лінійними дволанковими траєкторіями трикутноподібного виду призводить до виходу будь-якої траєкторії за межі області допустимих значень. Винятком є тільки траєкторія лінійного збільшення від нуля швидкості деформації аж до досягнення граничного стану.

3. Показано, що для розглянутого класу лінійного дволанкового деформування розв'язок задачі про найбільшу накопичену деформацію існує для модифікованої задачі, що отримана вилученням вимоги досягнення граничного стану в момент досягнення нульового значення швидкості деформації.

4. Для зазначеної модифікованої задачі отримано аналітичний розв'язок, згідно якому накопичена деформація зменшується зі збільшенням абсциси точки зламу.

РЕЗЮМЕ. В рамках моделі накопичення пошкоджень спадкового типу розглянуто лінійні дво-ступеневі траєкторії деформації з нульовою початковою та кінцевою швидкістю деформації. Сформульовано та досліджено декілька задач для визначення найбільшого значення накопиченої пластичної деформації. Показано, що всі задачі зводяться до задач нелінійного програмування з трьома невідомими, лінійною цільовою функцією та обмеженнями у вигляді нелінійних нерівностей та/або строгих рівностей. Досліджено існування та єдиність розв'язків сформульованих задач. Отримано та досліджено аналітичну залежність накопиченої деформації від параметрів моделі та траєкторії деформації. Показано, що найбільша накопичена деформація відповідає лівій граничній траєкторії, що по суті є одноланковою траєкторією з лінійним зменшенням швидкості деформації.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: траєкторія деформації, швидкість деформації, модель накопичення пошкоджень, модель спадкового типу, накопичена пластична деформація, найбільше значення, нелінійне програмування, існування та єдиність розв'язку.

1. *Беккенбах Э., Беллман Р.* Неравенства. – Москва: КомКнига, 2007. – 276 с.
2. *Богатов А.А., Смирнов М.В., Криницын В.А.* Влияние горячей прерывистой деформации на пластичность металла // Изв. вузов. Черная металлургия. – 1981. – № 12. – С. 37 – 40.
3. *Голуб В.П.* Определяющие уравнения в нелинейной механике поврежденности // Прикл. механика. – 1993. – 29, № 10. – С. 37 – 49.
4. *Ильюшин А.А.* Об одной теории длительной прочности // Механика твердого тела. – 1967. – № 3. – С. 21 – 25.
5. *Краєвський В.О., Михалевич В.М.* Оптимізація швидкісного режиму багатоступеневого гарячого деформування при однаковій тривалості ступенів // Вісник Донецького нац. ун-ту. Сер. А: Природничі науки. – 2015. – № 1 – 2. – С. 46 – 52.
6. *Краєвський В.О., Михалевич В.М.* Взаємозв'язок теорії підсумовування пошкоджень із задачею про таутохрону // Вісник Вінницького політехн. ін-ту. – 2016. – № 5. – С. 152 – 158.
7. *Локоценко А.М., Фомин Л.В., Терауд В.В., Басалов Ю.Г., Агабабян В.С.* Ползучесть и длительная прочность металлов при нестационарных сложных напряженных состояниях (обзор) // Вестн. Самарского гос. техн. ун-та. Сер. физ.-мат. науки. – 2020. – 24, № 2. – С. 275 – 318.
8. *Михалевич В.М., Краєвський В.* Постановка и решение оптимизационных задач в теории деформируемости // Вісник нац. техн. ун-ту України "Київський політехнічний інститут". Серія машинобудування. – Київ: НТУУ "КПІ", 2010. – С. 142 – 145.
9. *Михалевич В.М., Краєвський В.О.* Постановка та розв'язання задачі знаходження найменших та найбільших значень основних характеристик окремого класу дволанкового деформування // Вісник машинобудування та транспорту. – 2, № 10. – С. 40 – 47.
10. *Михалевич В.М., Краєвський В.А., Козлова К.Ф.* Определение оптимальной схемы изменения скорости бега спортсмена на длинной дистанции // Збір. наук. праць «Фізична культура, спорт та здоров'я нації». – 2011. – 12, Том 2. – С. 155 – 162.
11. *Михалевич В.М.* Тензорні моделі накопичення пошкоджень. – Вінниця: "УНІВЕРСУМ-Вінниця", 1998 – 195 с.
12. *Москвитин В.В.* Сопротивление вязкоупругих материалов. – Москва: Наука, 1972. – 327 с.

13. *Хохлов А.В.* Кривые длительной прочности нелинейной модели вязкоупругопластичности типа Максвелла и правило суммирования поврежденности при ступенчатых нагружениях // Вестн. Самарского гос. техн. ун-та. Сер. физ.-мат. науки. – 2016. – **20**, № 3. – С. 524 – 534.
14. *Хохлов А.В.* Кривые длительной прочности, порождаемые линейной теорией вязкоупругости в сочетании с критериями разрушения, учитывающими историю деформирования // Труды МАИ. – 2016. – №91. – С. 1 – 32.
15. *Bai Y., Wierzbicki T.* A new model of metal plasticity and fracture with pressure and Lode dependence // Int. J. of Plasticity. – № 24. – P. 1071 – 1096.
16. *Cockcroft M.G., Latham D.J.* Ductility and the Workability of Metals // J. of the Institute of Metals – 1968. – **96**. – P. 33 – 39.
17. *Golub V.P., Krizhanovskii V.I., Rusinov A.A.* A Mixed Criterion of Delayed Creep Failure under Plane Stress // Int. Appl. Mech. – 2003. – **39**, №5. – С. 556 – 565.
18. *Golub V.P.* The Nonlinear Mechanics of Continual Damage and Its Application to Problems of Creep and Fatigue // Int. Appl. Mech. – 2000. – №3. – С. 303 – 342.
19. *Golub V.P., Ragulina V.S., Fernati P.V.* Determining the Parameters of the Hereditary Kernels of Non-linear Viscoelastic Isotropic Materials in Torsion // Int. Appl. Mech. – 2015. – **51**, N 2 – С. 196 – 206.
20. *He J., Cui Z., Chen F., Xiao Y., Ruan L.* The new ductile fracture criterion for 30Cr2Ni4MoV ultra-super-critical rotor steel at elevated temperatures. // Materials and Design – 2013. – **52**, N 12. – P. 547 – 555.
21. *Hooputra H., Gese H., Dell H., Werner H.* A comprehensive failure model for crashworthiness simulation of aluminium extrusions // Int. J. of Crashworthiness. – 2004. – **9**, N 5. – P. 449 – 464.
22. *Kraievskiy V. Mykhalevych V., Sawicki D., Ostapenko O.* Modeling of the materials superplasticity based on damage summation theory // Proc. SPIE 10808, Photonics Applications in Astronomy, Communications, Industry, and High-Energy Physics Experiments, (2018) 108084S (1 October 2018), Poland.
23. *Lemaitre J.* A Course on Damage Mechanics. – Berlin: Springer, 2012. – 228 p.
24. *Mikhalevich V.M.* The model of ultimate strains during hot deformation // Izvestia Akademii nauk SSSR. Metally. – 1991. – N 5. – P. 89 – 95.
25. *Milenin A., Furushima T., Du P. et al.* Improving the workability of materials during the dieless drawing processes by multi-pass incremental deformation // Archives Civ. Mech. Eng. – 2020. – **20**, N 3. – article id.86.
26. *Mohr D., Marcadet S.J.* Micromechanically-motivated phenomenological Hosford-Coulomb model for predicting ductile fracture initiation at low stress triaxialities // Int. J. of Solids and Struct. – 2015 – **67-68**. – P. 40 – 55.

Надійшла 26.08.2020

Затверджена до друку 24.06.2021