УДК 512.552.13

Б. В. Забавський, С. І. Білявська

СЛАБКА ГЛОБАЛЬНА РОЗМІРНІСТЬ СКІНЧЕННИХ ГОМОМОРФНИХ ОБРАЗІВ КОМУТАТИВНОЇ ОБЛАСТІ БЕЗУ

Обчислено слабку глобальну розмірність скінченного гомоморфного образу комутативної області Безу. Зокрема, доведено, що якщо для комутативної області Безу R і ненульового елемента $a \in R$ фактор-кільце R / aR має скінченну глобальну розмірність, тоді a – адекватний елемент.

Відомо, що комутативна область є спадковою тоді і тільки тоді, коли довільний гомоморфний образ кільця R є самоін'єктивним і артіновим кільцем [1]. Більше того, комутативна область є областю Дедекінда тоді, коли довільний гомоморфний образ цієї області є квазіфробеніусовим кільцем [1]. Нижче досліджено скінченні гомоморфні образи комутативної області Безу шляхом обчислення їх гомологічних розмірностей.

Введемо всі необхідні означення і факти. Надалі під кільцем розумітимемо комутативне кільце з одиницею, причому $1 \neq 0$. Всі модулі унітарні і через M_R позначимо категорію правих R-модулів. Під областю Дедекінда розумітимемо спадкову комутативну область, а під областю Прюфера – напівспадкову [1].

Означення 1. Комутативне кільце R називають слабким квазіфробеніусовим, якщо воно когерентне і для довільного ненульового скінченно породженого ідеалу I виконується рівність $Ann(Ann\ I) = I$, де $Ann\ I = \left\{x \mid x \in R,\ \ x \cdot I = (0)\right\}$ [2].

Означення 2. Кільце R називають арифметичним, якщо ґратка ідеалів кільця R дистрибутивна [5].

Під гомоморфним образом розуміємо нетривіальні гомоморфні образи.

Означення 3. Якщо довільний ін'єктивний R-модуль є плоским, то кільце називають IF-кільцем [6].

Означення 4. Число $gl.w.\dim(R) = \sup\left\{w.d.(A) \mid A \in m_R\right\}$ називають слабкою глобальною розмірністю кільця R, де $w.\dim(A)$, $A \in M_R$ – таке найменше число n, що існує точна послідовність $0 \to B_n \to B_{n-1} \to \ldots \to B_0 \to A \to 0$, де всі B_i – плоскі R-модулі [7].

Означення 5. Скажемо, що R-модуль M є горенштейнівським плоским модулем, якщо існують послідовності плоских R-модулів $\ldots \to F_1 \to F_0 \to F^0 \to F^1$ такі, що $M \cong \mathrm{Im}(F_0 \to F^0)$, причому функтор $I \otimes -$ зберігає точність цієї послідовності для довільного ін'єктивного R-модуля I.

Означення 6. Для натурального числа n скажемо, що R-модуль M має горенштейнівську плоску розмірність n (у позначеннях $G.gl.\dim(m) \leq n$), якщо M має горенштейнівську плоску резольвенту довжини n, тобто, якщо існує точна послідовність $0 \to G_n \to \ldots \to G_0 \to M \to 0$, де G_i – горенштейнівськими плоскі R-модулі. А слабку горенштейнівську розмірність (у позначеннях $w.G.gl.\dim(m)$) визначають як $\sup\left\{G.gl.\dim_R(M) \mid M \in m_R\right\}$ [8].

Означення 7. R-модуль N є горенштейнівським ін'єктивним, якщо існує точна послідовність $\ldots \to E_1 \to E_0 \to E^0 \to E^1 \to \ldots$ таких ін'єктивних модулів, що $N = Ker(E^0 \to F^1)$, причому для довільного ін'єктивного R-модуля E, функтом $Hom_R(E,-)$ зберігає точність цієї послідовності [7].

Через $Rad\ R$ позначимо множину всіх нільпотентних елементів комутативного кільця R.

Означення 8. Кільцем Безу називаємо комутативне кільце, в якому довільний скінченно породжений ідеал є головним [6].

Означення 9. Нехай R – комутативне кільце Безу. Елемент a кільця R назвемо адекватним, якщо для довільного елемента $b \in R$ елемент a можна подати у вигляді $a = rs$, де $rR + bR = R$, і для довільного необоротного дільника s' елемента s ідеал $s'R + bR$ є власним, тобто $s'R + bR \neq R$ [9].

Серед важливих результатів у цьому напрямку варто виділити такі теореми.

Теорема 1 [3]. Комутативна область R є областю Прюфера тоді і тільки тоді, коли фактор-кільце R / I є слабким квазіфробеніусовим кільцем для довільного ненульового ідеалу I.

Теорема 2 [4]. Гомоморфний образ комутативної області Безу є арифметичним кільцем.

Теорема 3. Нехай R – комутативна область Безу, а $\bar{R}$ – її довільний гомоморфний образ. $Rad\ \bar{R} = \{0\}$ тоді і тільки тоді, коли $w.gl.\dim(\bar{R}) \leq 1$.

Доведення. Згідно з теоремою 2 довільний гомоморфний образ $\bar{R}$ комутативної області Безу R є арифметичним кільцем. Згідно з [5], $w.gl.\dim\ \bar{R} \leq 1$ тоді і тільки тоді, коли $Rad\ \bar{R} = \{0\}$. Теорема доведена.

Водночас для скінченних гомоморфних образів комутативної області Безу можна уточнити значення $w.gl.\dim$.

Теорема 4. Нехай R – комутативна область Безу, тоді для довільного ненульового елемента a слабка глобальна розмірність фактор-кільця R/aR рівна 0 або нескінченності.

Доведення. Оскільки для комутативної області Безу R фактор-кільце R / aR є IF-кільцем [6], тоді згідно з [2] R / aR – слабке квазіфробеніусове кільце. А це означає, що $w.gl.\dim(R / aR)$ дорівнює 0 або нескінченності [2].

Більше того, маємо такий результат.

Теорема 5. Нехай R – комутативна область Безу, причому $a \in R \setminus \{0\}$. Якщо фактор-кільце R / aR має скінченну слабку глобальну розмірність, тоді a - адекватний елемент.

Доведення. Оскільки R – комутативна область Безу і $a \in R \setminus \{0\}$, тоді R / aR є IF-кільцем. Оскільки R / aR має скінченну глобальну розмірність, то згідно з теоремою 4 $w.gl.\dim(R / aR) = 0$. А це означає, що R / aR є регулярним кільцем [1]. Позначимо $\bar{R} = R / aR$. Доведемо, що $\bar{0} = 0 + aR$ є адекватним елементом, тобто для довільного елемента $\bar{b} = b + aR$ елемент $\bar{0}$ можна подати у вигляді $\bar{0} = \bar{r} \cdot \bar{s}$, де $\bar{r}\bar{R} + \bar{b}\bar{R} = \bar{R}$, і для довільного елемента $\bar{s}'$, такого, що $\bar{s}\bar{R} \subseteq \bar{s}'\bar{R} \neq \bar{R}$, маємо $\bar{s}'\bar{R} + \bar{b}\bar{R} \neq \bar{R}$. Оскільки $\bar{R}$ – регулярне кільце, то згідно з [1] подамо елемент $\bar{b} \in \bar{R}$ у вигляді $\bar{b} = \bar{e} \cdot \bar{u}$, де $\bar{e}$ – ідемпотент кільця $\bar{R}$, а $\bar{u}$ – оборотний елемент $\bar{R}$. Очевидно, що $\bar{1} - \bar{e}$ – ідемпотент кільця $\bar{R}$. Тоді $\bar{0} = \bar{e}\left(\bar{1} - \bar{e}\right)$. Покладемо $\bar{r} = \bar{1} - \bar{e}$, $\bar{s} = \bar{e}$ і отримаємо шукане подання. Оскільки в кільці $\bar{R}$ елемент $\bar{0}$ є адекватним, тоді згідно з

[10] елемент a є адекватним елементом кільця R. Теорема доведена.

Як наслідок з [3, 6, 8, 9] отримуємо такий результат.

Теорема 6. Нехай R – комутативна область Безу і $a \in R \setminus \{0\}$. Тоді $w.G.gl(R / aR) = 0$.

Теорема 7. Комутативна область R є областю Дедекінда тоді і тільки тоді, коли для довільного ненульового ідеалу I, $G.gl.\dim(R / I) = 0$.

Теорема 8. Комутативна область R є областю Прюфера тоді і тільки тоді, коли для довільного ненульового скінченно породженого ідеалу I, $w.G.gl.\dim(R / I) = 0$.

Наслідок 1. Комутативна область R є областю Дедекінда тоді і тільки тоді, коли для довільного ненульового ідеалу I довільний R / I-модуль є горенштейнівським ін'єктивним.

Наслідок 2. Комутативна область R є областю Прюфера тоді і тільки тоді, коли для довільного ненульового скінченно породженого ідеалу I довільний R / I-модуль є горенштейнівським плоским модулем.

1. *Гаркуша Г. А.* FP-иньективные и слабо квазифробениусовые кольца // Записки научных семинаров ЛОМИ. – 1999. – 265. – С. 110–129.
2. *Фейс К.* Алгебра: кольца, модули и категории. – Т.2. – М.: Мир. – 1979. – 464 с.
3. *Boisen M., Larsen M.* On Prufer rings as image of Prufer domains // Proc. Amer. Math. Soc. – 1973. – 40, № 1. – P. 87–90.
4. *Colby R.* Rings which have flat injective modules // J. Algebra. – 1975. – 35. –P. 239–252.
5. *Enochs E., Jenda O. M.* Gorenstein injective and projective modules // Math. Z. – 1995. – 220. – P. 611–633.
6. *Holm H.* Gorenstein homological dimension // J. Pure. Appl. Algebra. – 2004. – 189. – P. 167–197.
7. *Jensen C.* A remark on arithmetical rings // Proc. Amer. Math. Soc. – 1964. – 15. – P. 951–954.
8. *Mahdon N, Tamkkante M., Yassemi S.* On strongly Gorenstein Von Neumann Regular Rings // Comm. Algebra. – 2011. – 39. – P. 3242–3252.
9. *Matlis E.* Commutative semi-coherent and semi-regular rings // J. of Algebra. – 1985. – 95. – P. 343–372.
10. *Zabavsky B.V., Bilavska S.I.* Every zero adequate ring is an exchange ring // Fundamentalnaya and prikladnaya mathematica. – 2011/2012. – 17., № 3. – P. 61–66.

СЛАБАЯ ГЛОБАЛЬНАЯ РОЗМЕРНОСТЬ КОНЕЧНЫХ ГОМОМОРФНЫХ ОБРАЗОВ КОММУТАТИВНОЙ ОБЛАСТИ БЕЗУ

Вычислена слабая глобальная размерность конечного гомоморфного образа коммутативной области Безу. В частности, доказано, что если для коммутативной области Безу R и ненулевого елемента $a \in R$ фактор-кольцо R / aR имеет конечную глобальную размерность, тогда a – адекватный елемент.

WEAKLY GLOBAL DIMENSION OF FINITE HOMOMORPHIC IMAGES OF COMUTATIVE BEZOUT DOMAIN

In this paper calculated, a weakly global dimension finitely homomorphic image of a commutative Bezout domain. Partially, proved, if R is a commutative Bezout domain and for non zero element $a \in R$ factor-ring R / aR has a finitely global dimension, then a is an adequate element.

Львів. нац. ун-т імені Івана Франка, Львів

Одержано
12.10.12