

РОЗСІЯННЯ ІМПУЛЬСІВ SH-ХВИЛЬ ТОНКИМ ПРЯМОЛІНІЙНИМ П'ЄЗОЕЛЕКТРИЧНИМ ВКЛЮЧЕННЯМ МАЛОЇ ЖОРСТКОСТІ У ПРУЖНОМУ СЕРЕДОВИЩІ

Досліджено амплітудно-часові і спектральні характеристики ехо-імпульсів SH-хвиль від тонкостінних прямолінійних п'єзоелектричних включень малої жорсткості та змінної товщини, що знаходяться у пружному ізотропному однорідному середовищі. Методика дослідження базується на використанні інтегрального перетворення Фур'є за часом та методу сингулярних інтегральних рівнянь.

Вступ. Нестационарні процеси у пружних середовищах з тонкостінними пружними неоднорідностями переважно вивчали без урахування електричних властивостей матеріалів. Тут слід згадати праці [2, 3, 5, 11–13], де розглядали такі задачі (а також відповідні стаціонарні і статичні задачі) для різних обмежень на пружні властивості тонкого включення. Проте об'єктом сучасних досліджень (актуальних для розробки новітніх засобів ультразвукової діагностики та неруйнівного контролю, створення композитних матеріалів з новими властивостями тощо) все частіше стають хвильові поля в електропружних неоднорідних структурах, в тому числі і з тонкостінними концентраторами напружень [4, 9, 10]. Нижче викладено методику аналізу особливостей розсіяння імпульсів пружних SH-хвиль різної форми прямолінійним п'єзоелектричним включенням змінної товщини та малої жорсткості, що знаходиться у пружному ізотропному середовищі.

Формулювання задачі розсіяння. Нехай у пружному ізотропному необмеженому середовищі з модулем зсуву μ та густиною ρ в умовах ідеального механічного контакту і за поздовжнього зсуву пружної системи міститься тонке прямолінійне п'єзоелектричне включення, що займає область $W_\varepsilon = \{(x_1, x_2) : |x_1| < a, 2|x_2| \leq h(x_1)\}$, де $h(x_1)$ та $2a$ – товщина та довжина неоднорідності, $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ – декартові координати. Характерним параметром включення є мала відносна товщина $\varepsilon = a^{-1} \max_{|x| < a} h(x) \ll 1$. Матеріал неоднорідності з пружною сталюю c_{44}^0 належить до кристалографічного класу $6mm$, а вісь симетрії шостого порядку перпендикулярна до площини x_1x_2 [1, 9].

За поздовжнього зсуву відмінні від нуля компоненти векторів переміщень у електропружній системі задовольняють рівняння

$$\Delta u(\mathbf{x}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2} = 0, \quad \mathbf{x} \in \square^2 \setminus W_\varepsilon; \quad u(\mathbf{x}, t) = u^{in}(\mathbf{x}, t) + u^s(\mathbf{x}, t);$$

$$\Delta u^0(\mathbf{x}, t) - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 u^0(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2} = 0, \quad \Delta u^0(\mathbf{x}, t) - \frac{\varepsilon_{11}^0}{e_{15}^0} \Delta \varphi^0(\mathbf{x}, t) = 0, \quad \mathbf{x} \in W_\varepsilon; \quad (1)$$

$$c = \sqrt{\mu/\rho}, \quad c_0 = \sqrt{c_{44}^0 (1 + \eta^2)/\rho_0}, \quad \eta = e_{15}^0 / \sqrt{c_{44}^0 \varepsilon_{11}^0},$$

та умови міжфазного контакту

$$u(\mathbf{x}, t) = u^0(\mathbf{x}, t), \quad \frac{\partial u(\mathbf{x}, t)}{\partial n} = \gamma \frac{\partial}{\partial n} \left(u^0(\mathbf{x}, t) + \frac{e_{15}^0}{c_{44}^0} \varphi^0(\mathbf{x}, t) \right), \quad \mathbf{x} \in \partial W_\varepsilon. \quad (2)$$

Тут $u^{in}(\mathbf{x}, t)$, $u(\mathbf{x}, t)$ та $u^s(\mathbf{x}, t)$ – падаюче, повне та розсіяне поля переміщень у матриці; $u^0(\mathbf{x}, t)$ та $\varphi^0(\mathbf{x}, t)$ – переміщення та електричний потенціал у неоднорідності; c та c_0 – швидкості поперечних хвиль у матриці та включенні відповідно; η – коефіцієнт електромеханічного зв'язку; ρ_0 , e_{15}^0 та ε_{11}^0 – густина, п'єзоелектрична стала та діелектрична проникність матеріалу неоднорідності; $\gamma = c_{44}^0/\mu$; t – час; n – зовнішня нормаль до границі ∂W_ε .

Вважаємо, що на поверхні включення ∂W_ε виконується умова рівності нулю електричної індукції

$$\frac{\partial}{\partial n} \left(u^0(\mathbf{x}, t) - \frac{\varepsilon_{11}^0}{e_{15}^0} \varphi^0(\mathbf{x}, t) \right) = 0, \quad (3)$$

а на включення набігає імпульс SH-хвиль

$$u^{in}(\mathbf{x}, t) = a\varphi[\tau - (x_1 \sin \theta_{in} - x_2 \cos \theta_{in})/a], \quad (4)$$

де $\varphi(\tau)$ – модуляція імпульсу в часі, $\varphi(\tau) = 0$ при $\tau < 0$; $\tau = ct/a : \theta_{in}$ – кут падіння хвилі. Функції $u(\mathbf{x}, t)$, $u^0(\mathbf{x}, t)$ та $\varphi^0(\mathbf{x}, t)$ задовольняють принцип причинності у відповідних областях [7].

Аналітико-числовий розв'язок задачі. Використовуючи перетворення Фур'є за часом

$$g(\mathbf{x}, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\mathbf{x}, \tau) \exp(i\omega\tau) d\tau, \quad g(\mathbf{x}, \tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(\mathbf{x}, \omega) \exp(-i\omega\tau) d\omega,$$

для визначення Фур'є-густини $u^s(\mathbf{x}, \omega)$ розв'язку задачі (1)–(4) отримуємо відповідну стаціонарну задачу [4, 7]. Причому

$$u^{in}(\mathbf{x}, \omega) = a\varphi(\omega) \exp[i\omega(x_1 \sin \theta_{in} - x_2 \cos \theta_{in})/a], \quad (5)$$

де $u^{in}(\mathbf{x}, \omega)$ та $\varphi(\omega)$ – Фур'є-густини величин $u^{in}(\mathbf{x}, \tau)$ та $\varphi(\tau)$ відповідно.

Надалі вважаємо, що жорсткість включення набагато менша, ніж матриці:

$$0 \leq \gamma \leq \sqrt{\varepsilon}. \quad (6)$$

Тоді динамічну рівновагу тонкого п'єзоелектричного включення малої жорсткості з навколишнім ізотропним середовищем можна асимптотично наближено змодельовати граничними умовами, записаними на серединній лінії включення [6, 8, 11]:

$$\begin{aligned} \Phi(x_1, \omega) &= u(x_1, +0, \omega) - u(x_1, -0, \omega) = \frac{h(x_1)}{\gamma_*} \frac{\partial u(x_1, \pm 0, \omega)}{\partial x_2}, \\ \frac{\partial u(x_1, +0, \omega)}{\partial x_2} &= \frac{\partial u(x_1, -0, \omega)}{\partial x_2}, \quad |x_1| < a, \quad x_2 = 0, \quad \gamma_* = \gamma(1 + \eta^2). \end{aligned} \quad (7)$$

Тут $\Phi(x_1, \omega)$ – стрибок переміщень на серединній лінії включення.

Подамо розв'язок стаціонарної задачі у вигляді інтегрального подання:

$$u^s(\mathbf{x}, \omega) = \int_{-a}^a \Phi(x_1^0, \omega) \frac{\partial G(\mathbf{x}, \mathbf{x}^0)}{\partial x_2^0} dx_1^0; \quad (8)$$

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}^0) = \frac{i}{4} H_0^{(1)}(kR), \quad R = |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|, \quad \mathbf{x}^0 = (x_1^0, x_2^0), \quad x_2^0 = 0,$$

де $G(\mathbf{x}, \mathbf{x}^0)$ – функція Гріна; $H_0^{(1)}(kR)$ – функція Ханкеля першого роду; k – хвильове число поперечних хвиль у матриці.

Задовольнивши поданням (8) граничні умови (7), отримаємо інтегральне рівняння для визначення стрибка переміщень $\Phi(x_1, \omega)$ на серединній лінії включення:

$$q_1(x_1)\Phi(x_1, \omega) + k^2 \int_{-a}^a \Phi(p, \omega) K(k|x_1 - p|) dp = q_2(x_1, \omega), \quad |x_1| < a; \quad (9)$$

$$K(t) = -\frac{i}{4} \frac{H_1^{(1)}(t)}{t}, \quad q_1(x_1) = \gamma_* h^{-1}(x_1), \quad q_2(x_1, \omega) = \frac{\partial u^{in}(\mathbf{x}, \omega)}{\partial x_2},$$

$$x_2 = 0.$$

Методика розв'язання інтегрального рівняння (9) описана раніше [4, 13]. Знаючи стрибок переміщень на серединній лінії включення, переміщення $u^s(\mathbf{x}, \omega)$ у зоні Фраунгофера (дальній хвильовій зоні) визначаємо зі співвідношень

$$u^s(\mathbf{x}, \omega) \approx \frac{1}{\sqrt{r/a}} \exp(ikr) f(\theta, \omega), \quad r \rightarrow \infty,$$

$$x_1 = -r \sin \theta, \quad x_2 = r \cos \theta,$$

$$f(\theta, \omega) = -ik \cos(\theta) \int_{-a}^a \Phi(x_1) \exp(ikx_1 \sin \theta) dx_1, \quad (10)$$

де $f(\theta, \omega)$ – спектр комплексної амплітуди розсіяння SH-хвиль; (r, θ) – полярні координати.

Аналіз числових результатів. Дослідимо спочатку усталені коливання композита. Розв'язавши рівняння (9), за допомогою співвідношення (10) проаналізуємо залежність нормованої амплітуди розсіяння $f_*(\theta) = |f(\theta, \omega)|/k_* u_0$ від коефіцієнта електромеханічного зв'язку η , параметра відносної жорсткості включення $\bar{\gamma} = \gamma/\varepsilon$ та приведеної частоти $k_* = ka$. Розрахунки виконані в припущенні, що параметр товщини включення $\varepsilon = 0,1$.

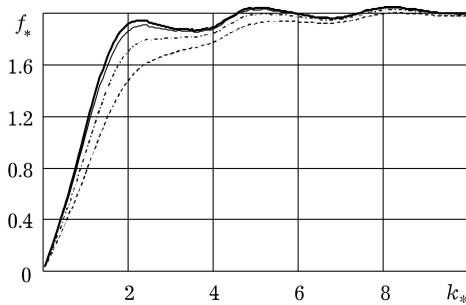


Рис. 1.

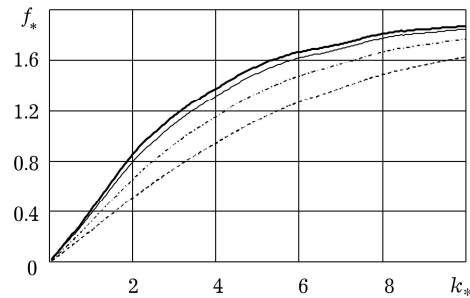


Рис. 2.

На рис. 1 і 2 проілюстровано спектри амплітуди f_* для включень з відносними жорсткостями $\bar{\gamma} = 0,5$ і 2 відповідно. Розглядали включення сталюї

товщини при $\theta_{in} = \theta = 0$. Тут суцільні жирні криві побудовано для умови $\eta = 0$ (п'єзоефект відсутній), а суцільним тонким, штрихпунктирним і штриховим відповідують значення $\eta = 0,3; 0,6$ і $0,9$. Як бачимо, вплив п'єзоефекту суттєвий у діапазонах низьких і резонансних частот і може сягати 30...40%. Зі зростанням коефіцієнта електромеханічного зв'язку η рівень амплітуд розсіяння (в тому числі і за інших форм розсіювача) знижується.

Нестационарні ехо-сигнали обчислюємо методом Ромберга [7] за формулою

$$u_0(\theta, \tau_0) = \frac{\sqrt{r/a}}{a} u^s(r, \theta, \tau) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \int_0^{\omega_0} f(\theta, \omega) \exp(-i\omega\tau_0) d\omega, \quad (11)$$

$$\tau_0 = \tau - r/a, \quad r/a \ll 1,$$

де значення ω_0 знаходимо з числового експерименту. Модуляцію імпульсу в часі приймаємо у вигляді ($n_* \geq 0$):

квазімонохроматичний імпульс

$$\varphi(\tau) = p \tau^{n_*} (\tau_* - \tau)^{n_*} \sin(\omega_* \tau), \quad \tau < \tau_*; \quad \varphi(\tau) = 0, \quad \tau > \tau_*; \quad (12)$$

імпульс у формі слабкої ударної хвилі

$$\varphi(\tau) = p \tau^{n_*} \exp(-\alpha_* \tau), \quad \tau > 0. \quad (13)$$

На рис. 3 і 4 зображені нестационарні ехо-сигнали $u_0(0, \tau_0)$ ($\theta_{in} = 0$), відбиті від включення малої жорсткості і сталої товщини при $\bar{\gamma} = 2$, $\varepsilon = 0,1$. Суцільні криві побудовано за умови $\eta = 0$ (п'єзоефект відсутній), а штрихові відповідують значенню $\eta = 0,9$. Приймаємо, що на неоднорідність набігають квазімонохроматичні імпульси (12) за значень параметрів $\omega_* = 6$, $\tau_* = 1,04$, $p = 20$, $n_* = 2$ (рис. 3) та імпульси (13), в яких $\alpha_* = 10$, $p = 185$, $n_* = 2$ (рис. 4).

Аналіз ехо-сигналів за часом затримки свідчить, що вони формуються, в основному, дзеркально відбитими імпульсами (час приходу $\tau_0 = 0$) та сигналами, двічі дифрагованими на кінцях включення. Часові залежності амплітуд розсіяння подібні до модуляцій падаючого імпульсу. Зі збільшенням коефіцієнта електромеханічного зв'язку η рівень u_0 на максимумах сигналів для різних модуляцій імпульсів зменшується несуттєво (порядку 10%).

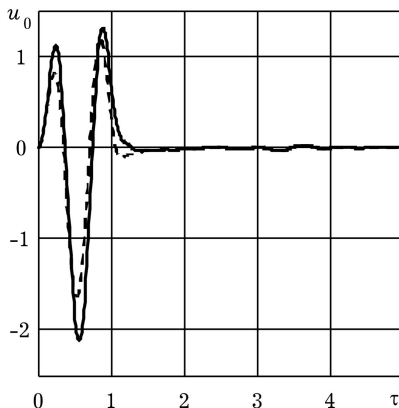


Рис. 3.

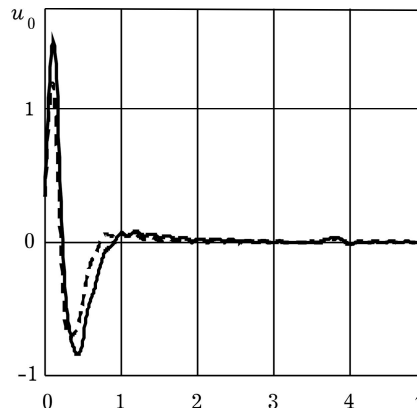


Рис. 4.

Висновки. Розроблено методику визначення амплітуд розсіяння імпульсів хвиль поздовжнього зсуву тонким прямолінійним п'єзоелектричним включенням малої жорсткості і довільної товщини. Методику можна поширити для тонкостінних криволінійних неоднорідностей.

Із числового аналізу амплітуд розсіяння випливають такі основні якісні та кількісні закономірності поведінки розсіяних полів. Для електроізолюваних п'єзоелектричних включень малої жорсткості зі зростанням коефіцієнта електромеханічного зв'язку зменшуються рівні амплітуд розсіяних хвиль у дальній зоні. За усталених імпульсних режимів зондування максимальний відносний вплив п'єзоефекту суттєвий у діапазонах низьких та резонансних частот і може сягати 30...40%. Зі збільшенням хвильового розміру розсіювача він нівелюється. Аналіз ехо-сигналів за часами затримки свідчить, що формують їх, в основному, дзеркально відбиті імпульси та сигнали, двічі дифраговані на кінцях неоднорідності. Ці закономірності спостерігається за різних товщин прямолінійних включень, кутів падіння і розсіяння імпульсів хвиль та параметрів контрастності розсіювачів.

Роботу частково підтримали НАН України та НТЦУ (проект № 5726).

1. Балакирев М. К., Гишинский И. А. Волны в пьезокристаллах. – Новосибирск: Наука, 1982. – 239 с.
2. Кит Г. С., Кунец Я. И., Михаськів В. В. Взаимодействие стационарной волны с тонким дискообразным включением малой жесткости в упругом теле // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 2004. – № 5. – С. 82–89.
3. Кунець Я. І., Матус В. В., Пороховський В. В. Розсіяння імпульсів пружних SH-хвиль на тонкостінному пружному криволінійному включенні // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2000. – **43**, № 4. – С. 150–154.
4. Кунець Я. І., Рабош Р. В. Поздовжній зсув пружного середовища з тонким прямолінійним гострокінцевим п'єзоелектричним включенням низької жорсткості // Там само. – 2010. – **53**, № 3. – С. 141–146.
5. Михаськів В. В., Кунець Я. І., Міщенко В. О. Напруження у тривимірному тілі з тонким податливим включенням за фронтом імпульсних хвиль // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2003. – **39**, № 3. – С. 63–68.
6. Мовчан А. Б., Назаров С. А. Напряжено-деформированное состояние в вершине острого включения // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1986. – № 3. – С. 155–163.
7. Подстригач Я. С., Поддубняк А. П. Рассеяние звуковых пучков на упругих телах сферической и цилиндрической формы. – К.: Наук. думка, 1986. – 264 с.
8. Сулим Г. Т. Основи математичної теорії термopужної рівноваги деформованих твердих тіл з тонкими включеннями. – Львів: Досл.-видав. центр НТШ, 2007. – 716 с.
9. Сулим Г. Т., Кунець Я. І., Рабош Р. В. Асимптотичний аналіз динамічної взаємодії тонкого прямолінійного п'єзоелектричного включення з пружним середовищем за поздовжнього зсуву // Вісник Донецьк. ун-ту. – 2008. – № 1. – С. 137–141.
10. Сулим Г. Т., Пастернак Я. М. Концентрація напружень та електричних зміщень на тонких включеннях у п'єзоелектричних тілах // Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології. – 2011. – Вип. **13**. – С. 139–148.
11. Kit H. S., Kunets Ya. I., Yemets V. F. Elastodynamic scattering from a thin-walled inclusion of low rigidity // Int. J. Eng. Sci. – 1999. – **37**. – P. 331–345.
12. Moiseenok A. P., Popov V. G. Interaction of plane nonstationary waves with a thin elastic inclusion under smooth contact conditions // Mechanics of Solids. – 2009. – **44**, No.4. – P. 621–631.
13. Mykhas'kiv V. V. Numerical Simulation of Wave Propagation in 3D Elastic Composites with Rigid Disk-Shaped Inclusions of Variable Mass, Chapter 2. Composites and Their Applications (edited by N. Hu). – Rijeka (Croatia): InTech Press, 2012. – P. 17–36.

РАССЕЯНИЕ ИМПУЛЬСОВ SH-ВОЛН ТОНКИМ ПРЯМОЛИНЕЙНЫМ ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКИМ ВКЛЮЧЕНИЕМ МАЛОЙ ЖЕСТКОСТИ В УПРУГОЙ СРЕДЕ

Исследованы амплитудно-временные и спектральные характеристики эхо-импульсов SH-волн от тонкостенных прямолинейных пьезоэлектрических включений малой жесткости и переменной толщины, находящихся в упругой изотропной однородной среде. Методика базируется на использовании интегрального преобразования Фурье по времени и метода сингулярных интегральных уравнений.

SH-WAVE PULSES SCATTERING BY A THIN LINEAR PIEZOELECTRIC INCLUSION OF LOW RIGIDITY IN ELASTIC MEDIUM

The amplitude-time and spectral characteristics of SH-wave echo-pulses from thin-walled linear piezoelectric inclusions low rigidity and varying thickness, which are in elastic isotropic homogeneous medium, are investigated. The procedure of investigation is based on utilization the Fourier time integral-transform and the method of singular integral equations.

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
12.09.13