УДК 517.958:532.72

О. Ю. Чернуха, А. Є. Давидок

МОДЕЛЮВАННЯ ДИФУЗІЙНИХ ПОТОКІВ У ДВОФАЗНІЙ БАГАТОШАРОВІЙ ВИПАДКОВО НЕОДНОРІДНІЙ СМУЗІ ЗА РІВНОМІРНОГО РОЗПОДІЛУ ФАЗ

Досліджено випадковий дифузійний потік домішкової речовини у двофазній багатошаровій смузі. Крайові задачі сформульовано для функції стохастичного потоку маси за нульової початкової умови. Розглянуто два випадки: нульовий і сталий ненульовий початкові розподіли концентрації в тілі. Побудовано еквівалентне інтегро-диференціальне рівняння, розв'язок якого отримано у вигляді ряду Неймана. Одержано розрахункові формули для усередненого за ансамблем конфігурацій фаз дифузійного потоку за нульової та ненульової сталої початкових концентрацій для рівномірного розподілу фаз. Встановлено залежність поведінки усередненого дифузійного потоку від різних характеристик середовища.

Під час моделювання і дослідження процесів масоперенесення у багатофазних неоднорідних тілах потрібно враховувати вплив просторово випадково розташованих включень. У пористих середовищах, складних геологічних структурах, наноструктурах, композитних матеріалах тощо важливою характеристикою масоперенесення, крім хімічного потенціалу чи концентрації мігрувальної речовини, є її дифузійний потік. Застосування апарату усереднення за ансамблем конфігурацій фаз наштовхується на деякі труднощі, оскільки, як правило, невідомими є функції кореляції градієнта випадкового поля концентрації та стохастичного коефіцієнта дифузії. Для вирішення цієї проблеми деякі автори [8, 10, 11] пропонують, зокрема для пористих тіл, балансові рівняння складати для гомогенізованих середовищ, фізичні характеристики яких є усередненими і враховують відмінності фаз, але при цьому нехтується взаємодія між фазами. У праці [9] випадковий потік визначають за законом Дарсі, для якого коефіцієнт фільтрації є функцією просторової координати. Для побудови розв'язку задачі застосовують методи малих збурень та згладжування і вважають, що фази у середовищі розташовані за нормальним законом розподілу, тоді середній потік дорівнює нулю і визначають тільки двоточкову функцію коваріації.

У цій праці досліджено дифузійні потоки у двофазній випадково неоднорідній шаруватій смузі за підходом, запропонованим раніше [6], за яким крайові задачі дифузії формулюють безпосередньо для функції потоку. При цьому виникає необхідність у додаткових дослідженнях для такої моделі, оскільки, коли на «верхній» межі тіла значення потоку більше, ніж на «нижній», в обмежене тіло може надійти необмежена кількість дифундівної речовини, що недопустимо. У протилежному випадку також приходимо до певних протиріч. Тому пропонуємо граничні умови на одній з поверхонь тіла накладати на функцію концентрації дифундівної речовини.

Об'єкт дослідження та формулювання задачі. Нехай у смузі товщиною z_0, яка складається з n_0 підшарів фази $j=0$ та n_1 підшарів фази $j=1$, дифундує домішкова речовина (рис. 1). Припускаємо, що об'ємна частка однієї з фаз (матриці) v_0 набагато перевищує об'ємну частку іншої фази (включення): $v_0 >> v_1$. Вважаємо також, що фази у тілі розташовані за рівномірним законом розподілу, а коефіцієнти дифузії є сталими у межах кожної з фаз.

Рівняння дифузії домішкової речовини, подане через потоки маси, має вигляд [6]

$$\frac{\partial \vec{J}(\vec{r},t)}{\partial t} = D(\vec{r})\vec{\nabla} \otimes \vec{\nabla} \cdot \vec{J}(\vec{r},t), \tag{1}$$

де $\vec{J}(\vec{r},t)$ − потік маси; $D(\vec{r})$ − коефіцієнт дифузії, який загалом є функцією просторових координат і не залежить від часу, $\vec{\nabla}\otimes\vec{\nabla} = \nabla_i\nabla_j\,\vec{i}^{\,i}\otimes\vec{i}^{\,j}$ ($i, j = \overline{1,3}$), $\nabla_1 = \partial/\partial x$, $\nabla_2 = \partial/\partial y$, $\nabla_3 = \partial/\partial z$, $\vec{i}^{\,i}$ − базисний вектор ($\vec{i}^{\,1} = \vec{i}$, $\vec{i}^{\,2} = \vec{j}$, $\vec{i}^{\,3} = \vec{k}$); $\vec{r}$ − радіус-вектор біжучої точки; t − час.

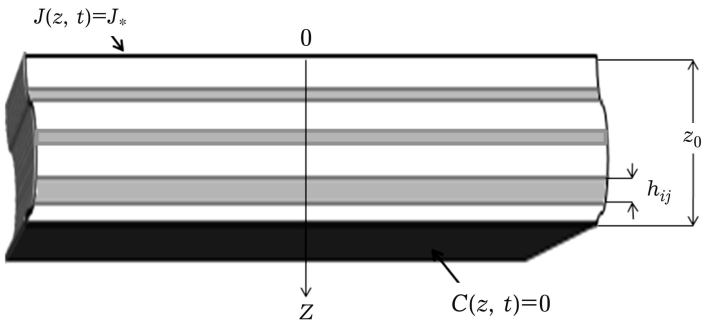


Рис. 1. Двофазна смуга випадково неоднорідної шаруватої структури.

В одновимірному за просторовою координатою випадку (шарувате тіло) рівняння (1) має вигляд

$$\frac{\partial J(z,t)}{\partial t} = D(z)\frac{\partial^2 J(z,t)}{\partial z^2}, \qquad (2)$$

де $D(z) = \begin{cases} D_0,\ z\in\Omega_0; \\ D_1,\ z\in\Omega_1, \end{cases}$ Ω_j − область j-ої фази ($j = 0, 1$).

Припускаємо, що у початковий момент часу у тілі відсутній дифузійний потік. На межі шару $z = 0$ він сталий, а на межі $z = z_0$ концентрація домішкових частинок дорівнює нулю, при цьому функцію потоку на цій межі потрібно визначити додатково:

$$J(z,t)\big|_{t=0} = 0\,; \qquad (3)$$

$$J(z,t)\big|_{z=0} = J_* \equiv \mathrm{const}\,, \quad J(z,t)\big|_{z=z_0} = F(t). \qquad (4)$$

Умова (3) означає, що в початковий момент часу розподіл концентрації в тілі є сталим і може бути як нульовим, так і відмінним від нуля.

Інтегро-диференціальне рівняння, еквівалентне вихідній крайовій задачі. Введемо в розгляд випадкову функцію просторової координати типу одиничної сходинкової функції Гевісайда [3] − «функцію структури», яка задовольняє умову суцільності тіла:

$$\eta_{ij}(z) = \begin{cases} 1, & z\in\Omega_{ij}\,; \\ 0, & z\notin\Omega_{ij}, \end{cases} \qquad \sum_{j=0}^{1}\sum_{i=1}^{n_j}\eta_{ij}(z) = 1\,, \quad i = \overline{1,n_j}\,, \quad j = 0, 1\,,$$

де Ω_{ij} − i-та однозв'язна область j-ої фази, $\Omega_j = \bigcup_{i=1}^{n_j}\Omega_{ij}$.

За допомогою функції η_{ij} коефіцієнт дифузії можна подати у вигляді

$$D(z) = \sum_{i=1}^{n_0} D_0\eta_{i0}(z) + \sum_{i=1}^{n_1} D_1\eta_{i1}(z)\,.$$

Підставивши таке подання у рівняння (2), одержимо:

$$\frac{\partial J(z,t)}{\partial t} - \left(\sum_{i=1}^{n_0} D_0\eta_{i0}(z) + \sum_{i=1}^{n_1} D_1\eta_{i1}(z)\right)\frac{\partial^2 J(z,t)}{\partial z^2} = 0\,.$$

Якщо позначити оператори

$$L(z,t) \equiv \frac{\partial}{\partial t} - \left(\sum_{i=1}^{n_0} D_0 \eta_{i0}(z) + \sum_{i=1}^{n_1} D_1 \eta_{i1}(z) \right) \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad L_0(z,t) = \frac{\partial}{\partial t} - D_0 \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

та врахувати умову суцільності тіла, то рівняння (2) можна подати так:

$$L_0(z,t) J(z,t) = L_s(z,t) J(z,t), \tag{5}$$

де $L_s(z,t) = L_0(z,t) - L(z,t)$, тобто $L_s(z,t) \equiv L_s(z) = \sum_{i=1}^{n_1} \left(D_1 - D_0 \right) \eta_{i1}(z)\, \partial^2 / \partial z^2$.

Неоднорідність структури тіла розглядаємо як внутрішні джерела, тоді розв'язок крайової задачі (3)–(5) можна подати у вигляді суми розв'язку однорідної крайової задачі та згортки функції Гріна з джерелом:

$$J(z,t) = J_0(z,t) + \int_0^t \int_0^{z_0} G(z,z',t,t') L_s(z') J(z',t') dz' dt'. \tag{6}$$

Тут $J_0(z,t)$ – розв'язок однорідної крайової задачі; $G(z,z',t,t')$ – функція Гріна крайової задачі з точковим джерелом [4]

$$G(z,z',t,t') = \frac{\theta(t-t')}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} e^{-D_0 y_k{}^2 (t-t')} \left[\cos\left(y_k (z-z') \right) - \cos\left(y_k (z+z') \right) \right],$$

$$y_k = k\pi / z_0. \tag{7}$$

Для знаходження розв'язку однорідної крайової задачі $J_0(z,t)$ спочатку потрібно визначити граничну умову для функції потоку на межі $z = z_0$. Для цього розв'язуємо крайову задачу дифузії, сформульовану для функції концентрації мігрувальних частинок $C(z,t)$, і використовуємо перший закон Фіка. Тоді потік в однорідному шарі за нульової початкової концентрації має вигляд [7]

$$J_0(z,t) = J_* \left(1 - \frac{2}{z_0} \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n^{-1} e^{-D_0 \xi_n^2 t} \sin(\xi_n z) \right), \tag{8}$$

зокрема, на межі $z = z_0$: $J_0(z,t)\big|_{z=z_0} \equiv F(t) = J_* \left(1 - \frac{2}{z_0} \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n^{-1} (-1)^{n+1} e^{-D_0 \xi_n^2 t} \right)$,

де $\xi_n = \pi(2n-1) / 2z_0$. Аналогічно для ненульової сталої початкової концентрації C_* маємо:

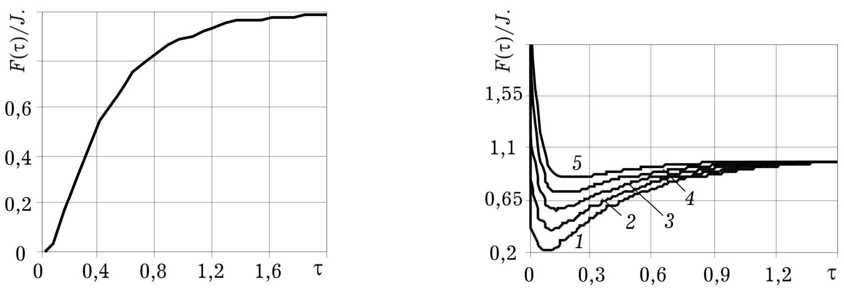
$$J_0(z,t) = J_* - \frac{2}{z_0} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-D_0 \xi_n^2 t} \left(J_* / \xi_n + (-1)^n C_* D_0 \right) \sin(\xi_n z), \tag{9}$$

а при $z = z_0$ одержимо таку крайову умову для функції дифузійного потоку:

$$J_0(z,t)\big|_{z=z_0} \equiv \tilde{F}(t) = J_* - \frac{2}{z_0} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} e^{-D_0 \xi_n^2 t} \left(J_* / \xi_n + (-1)^n C_* D_0 \right).$$

Проілюстрована поведінка функцій $F(t)$ за нульової (рис. 2*а*) і $\tilde{F}(t)$ за ненульової (рис. 2*б*) концентрацій у початковий момент часу за різних значень $C_* / J_* = 0{,}1;\ 0{,}2;\ 0{,}3;\ 0{,}4;\ 0{,}5$ (криві *1*—*5*). Числові розрахунки виконано у безрозмірних змінних [2] $\eta = z/z_0$, $\tau = D_0 t / z_0^2$.

Зазначимо, що за нульової початкової концентрації функція $F(t)$ монотонно зростальна, а за деякої сталої ненульової початкової концентрації функція $\tilde{F}(t)$ різко спадає і, досягнувши локального мінімуму, починає зростати. Крім того, що більше значення відношення C_* / J_*, то швидше функція $\tilde{F}(t)$ виходить на усталений режим.



а *б*

Рис. 2. Поведінка функцій $F(\tau) / J_*$ за нульової (*а*) та $\tilde{F}(\tau) / J_*$ за ненульової (*б*) початкових концентрацій за різних значень відношення концентрації до дифузійного потоку на поверхні $z = 0$.

Ряд Неймана. Розв'язок рівняння (6) шукатимемо методом послідовних ітерацій [1] у вигляді ряду Неймана. Зокрема, для отримання першої ітерації запишемо значення функції потоку в точці (z', t'), оскільки рівняння (6) справедливе для всіх точок області $\{t \in [0; \tau[, \tau < \infty; \ \ z \in [0; z_0]\}$, в тому числі і для $z = z'$, $t = t'$. Таким чином, маємо:

$$J(z', t') = J_0(z', t') + \int_0^{t'} \int_0^{z_0} G(z', z'', t', t'') L_s(z'') J(z'', t'') dz'' dt''.$$

Підставивши цей вираз у праву частину рівняння (6), отримаємо:

$$J(z, t) = J_0(z, t) + \int_0^{t} \int_0^{z_0} G(z, z', t, t') L_s(z') J_0(z', t') dz' dt' +$$
$$+ \int_0^{t} \int_0^{z_0} G(z, z', t, t') L_s(z') \int_0^{t'} \int_0^{z_0} G(z', z'', t', t'') L_s(z'') J(z'', t'') dz'' dt'' dz' dt'. \qquad (10)$$

За умови $z = z''$, $t = t''$ запишемо дифузійний потік у точці (z'', t'') і підставимо знайдений вираз у рівняння (10). Так одержимо другу ітерацію. Повторюючи таку процедуру нескінченну кількість разів, одержимо:

$$J(z, t) = J_0(z, t) + \int_0^{t} \int_0^{z_0} G(z, z', t, t') L_s(z') J_0(z', t') dz' dt' +$$
$$+ \int_0^{t} \int_0^{z_0} G(z, z', t, t') L_s(z') \int_0^{t'} \int_0^{z_0} G(z', z'', t', t'') L_s(z'') J_0(z'', t'') dz'' dt'' dz' dt' +$$
$$+ \int_0^{t} \int_0^{z_0} G(z, z', t, t') L_s(z') \int_0^{t'} \int_0^{z_0} G(z', z'', t', t'') L_s(z'') \times$$
$$\times \int_0^{t''} \int_0^{z_0} G(z'', z''', t'', t''') L_s(z''') J_0(z''', t''') dz''' dt''' dz'' dt'' dz' dt' + \ldots . \qquad (11)$$

Зазначимо, що перший член ряду Неймана (11) − дифузійний потік $J_0(z, t)$ в однорідному середовищі з фізичними характеристиками матриці, другий доданок описує збурення потоку, викликані включеннями з іншими фізичними характеристиками. Тобто, враховуючи вигляд оператора $L_s(z)$, другий член ряду Неймана є сумою збурень потоку, кожне з яких виникає, якщо в однорідне середовище помістити включення з характеристиками, відмінними від характеристик базової фази. Третій доданок у ряді (11) відповідає тим збуренням, що виникають, якщо в середовище з коефіцієнтом дифузії матриці поміщати почергово по два включення з іншими фізичними характеристиками, тобто він описує ефекти парного взаємовпливу включень на потік маси і т.д.

Ряд (11) є інтегральним рядом Неймана [1]. Зокрема, в одновимірному випадку він абсолютно і рівномірнозбіжний, якщо коефіцієнти дифузії обмежені [5]: $D_0, D_1 \le K < \infty$ і $D_0 \ne 0$.

Усереднення отриманого розв'язку. Припускаємо, що всі підшари фази включень мають однакову характерну (середню) ширину h_1. Виконаємо процедуру усереднення за ансамблем конфігурації фаз, обмежившись двома першими членами ряду Неймана (11). Вважаємо, що випадковою координатою, яка характеризує положення включення, є координата верхньої межі прошарку. Тоді

$$\langle J(z,t)\rangle = \langle J_0(z,t)\rangle + \int_0^t \int_0^{z_0} G(z,z',t,t')\langle L_s(z')\rangle J_0(z',t')dz'dt'. \tag{12}$$

Врахуємо, що $\langle J_0(z,t)\rangle = J_0(z,t)$, $\langle L_s(z')\rangle = \sum_{i=1}^{n_j}(D_1 - D_0)\langle \eta_{i1}(z')\rangle \partial^2/\partial z'^2$.

Усереднимо функцію $\eta_{i1}(z')$:

$$\langle \eta_{i1}(z')\rangle = \langle \eta_{i1}(z'-z_{i1})\rangle = \left\langle \begin{cases} 1, & z'-z_{i1} \in [0,h_1] \\ 0, & z'-z_{i1} \notin [0,h_1] \end{cases} \right\rangle =$$

$$= \frac{1}{V}\int_0^{z_0-h_1} \eta_{i1}(z'-z_{i1})dz_{i1} = \frac{1}{V}\int_0^{z'} \eta_{i1}(x)dx,$$

де $x = z' - z_{i1}$.

Можливі такі два випадки:

1) якщо $z' \le h_1$, тоді $\frac{1}{V}\int_0^{z'} \eta_{i1}(x)dx = \frac{1}{V}\int_0^{z'} dx = \frac{z'}{V}$;

2) якщо $z' \ge h_1$, тоді $\frac{1}{V}\int_0^{z'} \eta_{i1}(x)dx = \frac{1}{V}\int_0^{h_1} dx = \frac{h_1}{V}$.

Таким чином, $\sum_{i=1}^{n_1}\langle \eta_{i1}(z')\rangle = \begin{cases} v_1 z'/h_1, & z' \le h_1 \\ v_1, & z' \ge h_1 \end{cases}$.

Підставивши знайдені вирази у формулу (12), одержимо вираз для потоку частинок у багатошаровій смузі, усередненого за ансамблем конфігурацій фаз з рівномірною функцією розподілу:

$$\langle J(z,t)\rangle_{\text{conf}} = J_0(z,t) + (D_1 - D_0)\int_0^t \left[\frac{v_1}{h_1}\int_0^{h_1} z'G(z,z',t,t')\frac{\partial^2 J_0(z',t')}{\partial z'^2}dz' + \right.$$

$$\left. + v_1 \int_{h_1}^{z_0} G(z,z',t,t')\frac{\partial^2 J_0(z',t')}{\partial z'^2}dz' \right] dt'. \tag{13}$$

У формулі (13) не враховано конкретний вигляд крайових умов, що дає можливість застосовувати її для різних типів початкових та граничних умов. Якщо сюди підставити вираз для функції Гріна (7) та вираз (8) для дифузійного потоку в однорідному шарі за нульової початкової концентрації, отримаємо:

$$\frac{1}{J_*}\langle J(z,t)\rangle_{\text{conf}} = 1 - \frac{2}{z_0}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\xi_n}e^{-D_0\xi_n^2 t}\sin(\xi_n z) +$$

$$+\frac{2v_1(D_1-D_0)}{z_0^2 D_0}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\xi_n\,\bar{A}_{kn}}{y_k^2-\xi_n^2}\left[e^{-D_0\xi_n^2 t}-e^{-D_0 y_k^2 t}\right]\sin(y_k z)\,. \qquad (14)$$

Коли у початковий момент часу відомий сталий ненульовий розподіл концентрації у смузі, у формулу (13) підставляємо співвідношення (9):

$$\frac{1}{J_*}\langle J(z,t)\rangle_{\text{conf}} = 1 - \frac{2}{z_0}\sum_{n=1}^{\infty}e^{-D_0\xi_n^2 t}\left(\frac{1}{\xi_n}+(-1)^n D_0\frac{C_*}{J_*}\right)\sin(\xi_n z) +$$

$$+\frac{2v_1(D_1-D_0)}{z_0^2 D_0}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\xi_n\,\bar{A}_{kn}}{y_k^2-\xi_n^2}\left(1+(-1)^n D_0\frac{C_*}{J_*}\xi_n\right)\left(e^{-D_0\xi_n^2 t}-e^{-D_0 y_k^2 t}\right)\sin(y_k z)\,. \quad (15)$$

Тут

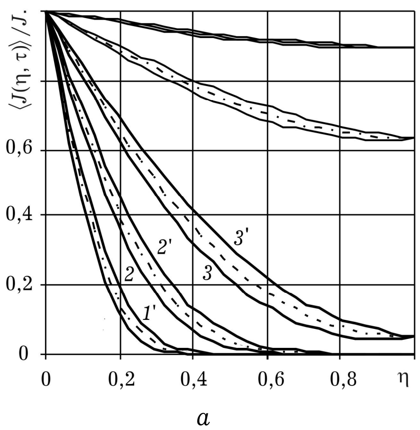
$$\bar{A}_{kn} = \frac{\cos\left[(y_k-\xi_n)h_1\right]}{h_1\left(y_k-\xi_n\right)^2}-\frac{\cos\left[(y_k+\xi_n)h_1\right]}{h_1\left(y_k+\xi_n\right)^2}-\frac{4y_k\xi_n}{h_1\left(y_k^2-\xi_n^2\right)^2}+(-1)^{k+n}\frac{2y_k}{y_k^2-\xi_n^2}\,.$$

Таким чином, одержано розрахункові формули для усередненого за ансамблем конфігурацій фаз потоку домішкової речовини у двофазній багатошаровій смузі за рівномірного розподілу прошарків в області тіла.

Зазначимо, що якщо у формулу (15) підставити значення $C_* = 0$ (у початковий момент часу відсутня домішкова речовина), то одержимо формулу (14).

Числовий аналіз усередненого дифузійного потоку. Числові розрахунки виконаємо у безрозмірних змінних за формулами (14) і (15).

Наведено розподіли потоків маси у смузі за нульової (рис. 3*а*) та ненульової сталої (рис. 3*б*) початкової умови на концентрацію, обчислені відповідно за формулами (14) та (15), в різні моменти безрозмірного часу $\tau = 0{,}01;\ 0{,}03;\ 0{,}1;\ 0{,}5;\ 1$ для $D_1 / D_0 = 0{,}01$ (криві *1*–*5*) та $D_1 / D_0 = 2$ (криві *1'*–*5'*); $v_1 = 0{,}2$; $h_1 = 0{,}01$; $C_* / J_* = 0{,}1$. Штрихова лінія описує відповідні потоки в однорідному шарі з характеристиками матриці.



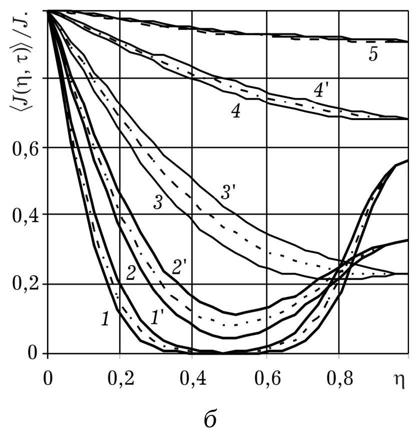


Рис. 3. Розподіли потоків маси у смузі в різні моменти часу за нульової (*а*) та ненульової (*б*) початкової концентрації.

Проілюстровано поведінку усередненого дифузійного потоку маси за нульової (рис. 4*а*) та ненульової (рис. 4*б*) початкової концентрації домішки для різних значень об'ємної частки включень $v_1 = 0{,}05;\ 0{,}1;\ 0{,}2$ для $D_1 / D_0 = 0{,}01$

(криві *1–3*) та для $D_1 / D_0 = 2$ (криві *1'–3'*) при $\tau = 0{,}1$. На рис. 5*а* зображено розподіли потоків маси усередненого дифузійного потоку за ненульової сталої початкової концентрації за різних значень відношення $D_1 / D_0 = 0{,}01$; 0,5; 2; 5; 10; 15 (криві *1–6*). Рис. 5*б* ілюструє залежності потоку маси за ненульової початкової концентрації і різних значень відношення $C_* / J_* = 0{,}01$; 0,1; 0,2; 0,3; 0,4. (криві *1–5*).

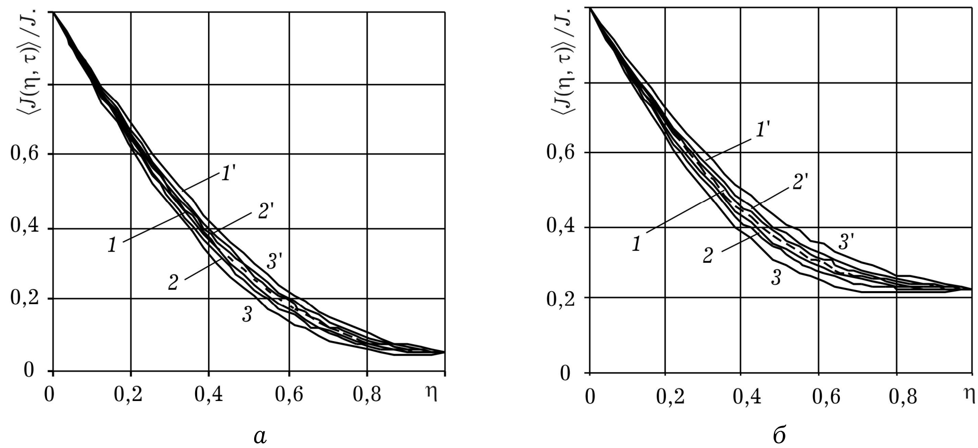


Рис. 4. Розподіли потоків маси у смузі за різних значень об'ємної частки за нульової (*а*) та ненульовії (*б*) сталої початкової концентрації.

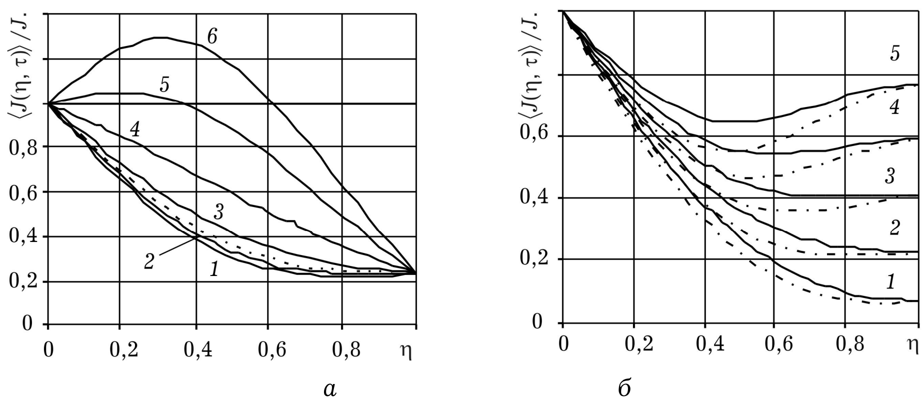


Рис. 5. Розподіли потоків маси у смузі за ненульової початкової концентрації для різних значень відношення коефіцієнтів дифузії фаз (*а*) та різних значень відношення концентрації до дифузійного потоку на поверхні $z = 0$ (*б*).

За нульової початкової концентрації частинок домішки в шарі розподіли потоків завжди монотонно спадні функції (рис. 3*а*), які з часом зростають в усій області тіла доки не вийдуть на усталений режим. За ненульового сталого початкового розподілу концентрації домішкової речовини (рис. 3*б*) поведінка усередненого дифузійного потоку для малих часів суттєво відрізняється від такої за нульової початкової концентрації. Від межі $z = 0$ дифузійний потік спадає, в середині шару є близьким до нуля, і стрімко зростає біля межі $z = z_0$ (криві *1* та *1'* на рис. 3*б*). Якщо коефіцієнт дифузії домішки у прошарку є меншим, ніж у матриці, то потік в неоднорідному тілі завжди менший, ніж в однорідному. В протилежному випадку він у багатошаровій смузі більший, ніж в однорідному шарі (рис. 3). Крім того, потоки в однорідній та неоднорідній смугах на межах шару збігаються.

Зауважимо, що зі збільшенням об'ємної частки включень для $D_1 < D_0$ зменшуються значення потоку маси, а для $D_1 > D_0$ − збільшуються як для нульової, так і ненульової початкової концентрації (рис. 5*а*).

Початкова концентрація суттєво впливає як на поведінку, так і на функцію потоку домішкової речовини. Для малих відношень C_* / J_* потік домішки як в однорідному шарі, так і у смузі з прошарком є монотонно спадною функцією (крива *1* на рис. 5*б*). Зі збільшенням початкової концентрації C_* потік біля поверхні шару $z = z_0$ зростає, що може призвести до появи локального мінімуму в середині шару (криві *4, 5* на рис. 5*б*).

Висновки. У дослідженнях потоків маси домішкової речовини в багатофазних тілах випадково неоднорідної структури під час виконання процедури усереднення за ансамблем конфігурацій фаз виникають значні труднощі. Тому на основі побудованого рівняння дифузії для функції потоку сформульовано крайові задачі дифузії частинок домішкової речовини у двофазному багатошаровому тілі безпосередньо для потоку маси та обґрунтовано крайові умови. Побудовано еквівалентне інтегро-диференціальне рівняння, розв'язок якого знайдено у вигляді інтегрального ряду Неймана. Усереднено одержаний розв'язок за ансамблем конфігурацій фаз з рівномірною функцією розподілу за нульової та ненульової сталої концентрації частинок домішки в початковий момент часу. Встановлено залежність поведінки та значення усередненого дифузійного потоку від характеристик середовища. Показано, що за більшого коефіцієнта дифузії домішки у прошарку, ніж у матриці, дифузійний потік у багатошаровій смузі майже завжди менший, ніж в однорідному тілі.

Зазначимо, оскільки під час отримання формули для усередненого за ансамблем реалізацій структури тіла дифузійного потоку не використовували конкретний вигляд крайових умов, то це співвідношення є застосовним і для інших типів початкових та граничних умов, при цьому зміняться функції Гріна та потоку в однорідному шарі і, відповідно, розрахункова формула набуде іншого вигляду. Крім цього, перспективними є дослідження дифузійного потоку частинок домішки на основі запропонованої математичної моделі для дво- та тривимірних випадків.

1. *Краснов М. Л.* Интегральные уравнения. − М.: Наука, 1975. − 303 с.
2. *Лыков А. В.* Теория теплопроводности. − М.: Высш. шк., 1978. − 480 с.
3. *Рытов С. М., Кравцов Ю. А., Татарский В. И.* Введение в статистическую радиофизику Ч. II: Случайные поля. − М.: Наука, 1978. − 436 с
4. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики. − М.: Наука, 1972. − 735 с.
5. *Чапля Є. Я., Чернуха О. Ю.* Математичне моделювання дифузійних процесів у випадкових і регулярних структурах. − К.: Наук. думка, 2009. − 302 с.
6. *Чапля Є., Чернуха О., Васьо Н.* Математичне моделювання потоків в шарі // Вісник Львів. ун-ту: Сер. прикл. математика та інформація. - 2010. − Вип. 15. − С. 103−115.
7. *Чернуха О., Давидок А.* Дифузійний потік домішкової речовини у смузі з випадково розташованим прошарком // Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології. − 2012. − Вип.15. − С. 116−126.
8. *Bergins C., Crone S., Strauss K.* Multiphase Flow in Porous Media with Phase Change. Part II: Analytical Solutions and Experimental Verification for Constant Pressure Stream Injection // Transport in Porous Media. − 2005. − Vol. 60. − P. 275−300.
9. *Keller J.B.* Flow in Random Porous Media // Ibid. − 2001. − Vol. 43. − P. 395−406.

10. *Pieper M.*, *Klein P.* Application of simple, periodic homogenization techniques to non-linear heat conduction problems in non-periodic, porous media // Heat Mass Transfer. − 2012. − Vol. 48, Issue 2. − P. 291−300.
11. *Shulenberg T., Muller U.* An improved model for two-phase flow through beds of coarse particles // Int. J. Multiphase Flow. − 1987. − Vol. 13(1). − P. 87−97.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИФФУЗИОННЫХ ПОТОКОВ В ДВУХФАЗНОЙ МНОГОСЛОЙНОЙ СЛУЧАЙНО НЕОДНОРОДНОЙ ПОЛОСЕ ПРИ РАВНОМЕРНОМ РАСПРЕДЕЛЕНИИ ФАЗ

Исследован случайный диффузионный поток примесного вещества в двухфазной многослойной полосе. Краевые задачи сформулированы для функции стохастического потока массы при нулевом начальном условии. Рассмотрены два случая: нулевое и постоянное ненулевое начальные распределения концентрации в теле. Построено эквивалентное интегро-дифференциальное уравнение, решение которого найдено в виде ряда Неймана. Получены расчетные формулы для усредненного по ансамблю конфигураций фаз диффузионного потока при нулевой и постоянной ненулевой начальной концентрации для равномерного распределения фаз. Установлена зависимость поведения усредненного диффузионного потока от различных характеристик среды.

MODELING DIFFUSION FLOWS IN A TWO-PHASE MULTILAYERED RAMDOMLY NONHOMOGENEOUS STRIP AT UNIFORM DISTRIBUTION OF PHASES

In the paper an admixture diffusion flow is investigated in a two-phase multilayered strip. Initial-boundary value problem is formulated for the function of stochastic mass flow at zero initial condition. Two cases of zero and constant nonzero initial distributions of the concentration in the body are investigated. An equivalent integro-differential equation is constructed. Its solution is found in terms of the Neumann series. Calculating formulae are obtained for averaged over the ensemble of phase configurations of diffusion flow under both zero and constant nonzero initial concentrations for the uniform distribution of phases. Dependence of behavior of averaged diffusion flow on different medium characteristics is established.

Центр математичного моделювання
Ін-ту прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
31.10.12