УДК 512. 552. 12

А. М. Білоус[1], А. І. Гаталевич[2]

2-ДОБРІ АБЕЛЕВІ І ДУО-КІЛЬЦЯ З УМОВАМИ СТАБІЛЬНОГО РАНГУ

Досліджено дуо-кільце майже одиничного стабільного рангу 1, як узагальнення поняття кільця одиничного стабільного рангу 1. Доведно, що дуо-кільце майже одиничного стабільного рангу 1 з відмінним від нуля радикалом Джекобсона є кільцями одиничного стабільного рангу 1 і 2-добрим кільцем. Введено поняття майже 2-доброго кільця. Виявлено, що адекватна справа дуо область є майже 2-добрим кільцем.

Поняття стабільного рангу прийшло в теорію кілець з K-теорії і виявилось корисним для розв'язання деяких відкритих задач. Це поняття вперше ввів Басс [1]. Стабільний ранг зараз дуже інтенсивно використовують у задачах діагональної редукції матриць [8, 11, 12]. Запропоновано низку узагальнень цього поняття, серед яких є поняття одиничного стабільного рангу [11]. Нами досліджено поняття майже одиничного стабільного рангу 1 і майже 2-доброго кільця для дуо-кільця. Доведено існування таких кілець і вказано їхній зв'язок з іншими класами кілець, зокрема, з адекватними справа, які узагальнюють комутативні адекватні області [5, 7].

Усюди під кільцем R розумітимемо асоціативне кільце з відмінною від нуля одиницею. Позначимо через $J(R)$ радикал Джекобсона, а через $U(R)$ – групу оборотних елементів кільця R.

Означення 1. Дуо-кільцем називають кільце R, в якому кожен правий, чи лівий ідеал кільця R є двобічним.

Означення 2. Елемент a кільця R називають адекватним справа, якщо для довільного елемента $b \in R$ існують такі елементи $r, s \in R$, що $a = r \cdot s$, $rR + bR = R$, і для такого довільного елемента $s' \in R$, що $sR \subset s'R \neq R$, виконується умова $s'R + bR \neq R$.

Означення 3. Кільце R називають правим (лівим) кільцем Безу, якщо кожний скінченно породжений правий (лівий) ідеал є головним. Праве та ліве кільця Безу називають кільцями Безу.

Означення 4. Кільце Безу, в якому довільний ненульовий елемент є адекватним справа, називають адекватним справа кільцем.

Означення 5. Кільце R називають чистим, якщо для довільного елемента $x \in R$ існують такі оборотний елемент $u \in R$ і ідемпотент $e \in R$, що $x = u + e$ [9].

Означення 6. Кільце R називають кільцем з властивістю заміни, якщо для довільного елемента $a \in R$ існує такий ідемпотент $e \in R$, що $e \in aR$ і $(1-e) \in (1-a)R$ [6].

Означення 7. Кільце R називають кільцем ідемпотентного стабільного рангу 1, якщо з умови $aR + bR = R$ для довільних елементів $a, b \in R$ отримаємо, що існує такий ідемпотент $e \in R$, що $(a + be) \in U(R)$ [9].

Означення 8. Кільце R називають абелевим, якщо для будь-якого ідемпотента $e = e^2 \in R$ виконується умова $ae = ea$ для довільного елемента $a \in R$. Тобто довільний ідемпотент $e = e^2$ кільця R є центральним [3].

Зазначимо, що клас абелевих кілець містить клас правих (лівих) дуо-кілець. Справді, нехай $e = e^2 \in R$ і $a \in R$. Тоді згідно з означенням дуо-кільця маємо рівність $ea = a'e$ для деякого елемента $a' \in R$. Звідси одержимо рівність $ea = (a'e)e = eae$. За симетрією $ae = eae$. Тоді $ea = ae$.

Теорема 1 [3]. Нехай R – абелеве кільце. Тоді такі твердження еквівалентні:

1. R є чистим кільцем;
2. R є кільцем з властивістю заміни;
3. R є кільцем ідемпотентного стабільного рангу 1.

Означення 9. Кільце R називають кільцем одиничного стабільного рангу 1, якщо з умови $aR+bR=R$ для довільних елементів $a,b\in R$ отримаємо, що існує такий оборотний елемент $u\in U(R)$, що $(a+bu)\in U(R)$ [4].

Означення 10. Кільце R називають 2-добрим, якщо довільний елемент в R є сумою двох оборотних елементів [10].

Твердження 1. Нехай R є дуо областю Безу, a – ненульовий необоротний елементом в R і b такий елемент в R, що $aR+bR=R$. Тоді образ елемента b за канонічного гомоморфізму $R\to R/aR$ є оборотним елементом.

Якщо $aR+bR\neq R$, то образ елемента b за канонічного гомоморфізму $R\to R/aR$ є дільником нуля.

Д о в е д е н н я. Оскільки $aR+bR=R$, то існують такі елементи $u,v\in R$, що $au+bv=1$. Звідси отримаємо, що $\overline{b}\overline{v}=\overline{1}$, де $\overline{b}$ і $\overline{v}$ – гомоморфні образи елементів b і v над канонічним відображенням $R\to R/aR$, де b – прообраз елемента $\overline{b}\in R/aR$ за канонічного гомоморфізму $R\to R/aR$.

Якщо $aR+bR=dR\neq R$, тоді існують такі елементи $u,v,a_0,b_0\in R$, що $au+bv=d$, $a=da_0$ і $b=db_0$. Отже, $\overline{b}\overline{a_0}=\overline{0}$, більше того, $\overline{a_0}\neq\overline{0}$. Твердження доведено.

Теорема 2. Нехай R – дуо область Безу і нехай елемент a є таким адекватним справа елементом області R, що $2R+aR=R$. Тоді фактор-кільце R/aR є 2- добрим кільцем.

Д о в е д е н н я. Спочатку доведемо, що R/aR є чистим кільцем. Для цього, згідно з теоремою 1, достатньо довести, що R/aR є кільцем ідемпотентного стабільного рангу 1. Позначимо $\overline{R}=R/aR$. Нехай $\overline{bR}+\overline{cR}=\overline{R}$. Тоді $aR+bR+cR=R$, де b і c – прообрази елементів $\overline{b},\overline{c}\in\overline{R}$ – за канонічного гомоморфізму $R\to R/aR$. Оскільки a є адекватним справа елементом області R, то для довільного елемента $b\in R$ існують такі елементи $r,s\in R$, що $a=r\cdot s$, $rR+bR=R$, і для довільного такого елемента $s'\in R$, що $sR\subset s'R\neq R$, виконується умова $s'R+bR\neq R$. Оскільки $rR+sR=R$, то існують такі елементи $u,v\in R$, що $ru+sv=1$.

Оскільки R є дуо-кільцем, тому $us=su'$ для деякого елемента $s'\in R$. В результаті отримаємо:

$$(ru)^2-ru=ru(ru-1)=ru(-sv)=-rusv=-rsu'v=a(-u'v)\in aR.$$

Отже, образ елемента ru за канонічного гомоморфізму $R\to R/aR$ є ідемпотентом.

Далі доведемо, що $aR+(b+cru)R=R$. Припустимо, що $aR+(b+cru)R==hR\neq R$. Оскільки $aR\subset hR$, тоді $hR+rR=tR\neq R$ або $hR+sR=\alpha R\neq R$. Вважатимемо, що $hR+rR=tR\neq R$. Оскільки $(b+cru)R\subset hR$, отримаємо, що $bR\subset hR$. Це неможливо, оскільки $rR+bR=R$. Якщо $hR+sR=\alpha R\neq R$, то згідно з означенням адекватного справа елемента a отримаємо, що $\alpha R+bR=kR\neq R$. Звідки випливає, що $cruR\subset hR$. Оскільки $ru+sv=1$ і $kR\subset sR$, то $cR\subset kR$, що неможливо, оскільки $aR+bR+cR=R$.

У результаті отримали, що $aR+(b+cru)R=R$. Тобто $\overline{R}$ є кільцем ідемпотентного стабільного рангу 1, а тому чистим кільцем. Оскільки $2R+aR=R$, то згідно з твердженням 1 можна дійти висновку, що $\overline{2}$ є оборотним елементом в $\overline{R}$. Згідно з [2] $\overline{R}$ є $\overline{2}$-добрим кільцем.

Означення 11. Елемент a кільця R називають елементом майже одиничного стабільного рангу 1, якщо фактор-кільце R/aR є кільцем одиничного стабільного рангу 1.

Твердження 2. Нехай a – елемент майже одиничного стабільного рангу 1. Якщо $aR+bR+cR=R$, то існує такий елемент $y\in R$, що $aR+(b+cy)R=R$ і $yR+aR=R$.

Д о в е д е н н я. Нехай $\overline{R}=R/aR$. Для довільного елемента $x\in R$ позначимо $\overline{x}=x+aR$. Оскільки $\overline{bR}+\overline{cR}=\overline{R}$, то існує такий елемент $y\in R$, що $\overline{(b+cy)R}=\overline{R}$ і $\overline{y}\in U(\overline{R})$. Оскільки $\overline{R}=R/aR$, то з умови $\overline{y}\in U(\overline{R})$, слідує $yR+aR=R$.

Покажемо, що $aR+(b+cy)R=R$. Припустимо, що це не так. Тоді існує максимальний ідеал M у кільці R, для якого $aR+(b+cy)R\subset M$, що неможливо, тому що M/aR є максимальним ідеалом в $\overline{R}$ і $\overline{(b+cy)R}=\overline{R}$. Отже, $aR+(b+cy)R=R$ і $yR+aR=R$. Твердження доведено.

Твердження 3. Нехай a – такий елемент дуо-кільця R, що для довільних таких елементів $b,c\in R$, що $aR+bR+cR=R$, існує елемент $y\in R$, для якого $aR+(b+cy)R=R$ і $yR+aR=R$. Тоді елемент a є елементом майже одиничного стабільного рану 1.

Д о в е д е н н я. Нехай $\overline{R}=R/aR$ і $\overline{bR}+\overline{cR}=\overline{R}$. Очевидно, що $aR+bR+cR=R$. Згідно зі встановленими обмеженнями на елемент a, існує такий елемент $y\in R$, що $\overline{(b+cy)R}=\overline{R}$ і $\overline{y}\in U(\overline{R})$. Тобто елемент a є майже одиничного стабільного рангу 1. Твердження доведено.

Означення 12. Кільце R називають кільцем майже одиничного стабільного рангу 1, якщо довільний ненульовий необоротний елемент кільця R є елементом майже одиничного стабільного рангу 1.

Твердження 4. Нехай R – дуо-кільце Безу одиничного стабільного рангу 1. Тоді R є кільцем майже одиничного стабільного рангу 1.

Д о в е д е н н я. Припустимо, що $a\in R, a\neq 0, a\notin U(R)$ і нехай $b,c\in R$ такі, що $aR+bR+cR=R$. Оскільки R є кільцем Безу, маємо, що $bR+cR=dR$ для деякого елемента $d\in R$. Тому $b=db_0$, $c=dc_0$ і $bu+cv=d$ для деяких елементів $u,v,c_0,b_0\in R$. Звідси випливає, що $b_0u+c_0v+\alpha=1$ для деякого такого елемента $\alpha\in R$, що $d\alpha=0$. Оскільки R є кільцем одиничного стабільного рангу 1, існує оборотний елемент $u\in U(R)$ і такі елементи $x,y\in R$, що $(b_0+\alpha x)+(c_0+\alpha y)u=w\in U(R)$. Нехай $b_1=b_0+\alpha x$, $c_1=c_0+\alpha y$. Оскільки $d\alpha=0$, маємо, що $db_1=b$ і $dc_1=c$. Отже, для елементів $b,c\in R$ визначені елементи $b_1,c_1\in R$ і оборотні такі елементи $u,w\in R$, що $cR+bR=R, b=db_1, c=dc_1, db_1w^{-1}+dc_1uw^{-1}=d$ і $b_1+c_1u=w$. Оскільки $aR+bR+cR=R$, то $dR+aR=R$. Крім того, $(b+cu)R+aR=R$, де $uR+aR=R$, тому що $u\in U(R)$. Таким чином, згідно з твердженням 2, довели, що елемент a є елементом майже стабільного рангу 1. Оскільки a є ненульовим необоротним елементом кільця R, то це означає, що кільце R є кільцем майже одиничного стабільного рангу 1. Твердження доведено.

Виявляється, що коли радикал Джекобсона $J(R)$ є ненульовим у кільці майже одиничного стабільного рангу 1, тоді це кільце є, фактично, кільцем одиничного стабільного рангу 1.

Теорема 3. Нехай R – дуо-кільце майже одиничного стабільного рангу 1 з ненульовим радикалом Джекобсона $J(R)$. Тоді R – кільце одиничного стабільного рангу 1.

Д о в е д е н н я. Покажемо, що R є кільцем одиничного стабільного рангу 1. Нехай $bR+cR=R$ і $a\in J(R)\setminus\{0\}$. Згідно з твердженням 3, існує такий елемент $u\in R$, що $aR+(b+cu)R=R$ і $uR+aR=R$. Оскільки $a\in J(R)\setminus\{0\}$ і $uR+aR=R$, то $u\in U(R)$. Оскільки $aR+(b+cu)R=R$ і $a\in J(R)\setminus\{0\}$, отримаємо $(b+cu)R=R$. З останньої рівності слідує, що R є кільцем одиничного стабільного рангу 1. Теорему доведено.

Зазначимо, що $u\in U(R)$ тоді і тільки тоді, якщо $\overline{u}\in U(R/J(R))$, де $\overline{u}=u+J(R)$.

Як наслідок теореми 3 одержано такий результат:

Теорема 4. Кільце R є кільцем майже одиничного стабільного рангу 1 тоді і тільки тоді, якщо $R/J(R)$ є кільцем майже одиничного стабільного рангу 1.

Виявляється, що кільце майже одиничного стабільного рангу 1 з ненульовим радикалом Джекобсона пов'язане з 2-добрим кільцем. Тому правильна така теорема.

Теорема 5. Нехай R є кільцем майже одиничного стабільного рану 1 з ненульовим радикалом Джекобсона. Тоді R є 2-добрим кільцем.

Д о в е д е н н я. За теоремою 3 R є кільцем одиничного стабільного рангу 1. Тоді для деякого елемента $a\in R$ розглянемо відношення $aR+(-1)R=R$. Оскільки R є кільцем одиничного стабільного рангу 1, то існує такий елемент $u\in U(R)$, що $a-u=w\in U(R)$. Звідси випливає, що $a=w+u$, що і треба довести.

Означення 13. Кільце R називають майже 2-добрим кільцем, якщо для деякого такого ненульового необоротного елемента $a\in R$, що $2R+aR=R$, кільце R/aR є 2-добрим кільцем.

Згідно з теоремою 2, адекватна справа область є прикладом майже 2-доброго кільця. Тому справедлива така теорема:

Теорема 6. Адекватна справа область є майже 2-добрим кільцем.

1. *Bass H.* K-theory and stable algebra // Publ. Math. – 1964. – 22. – P. 5–60.
2. *Camillo V., Yu C. P.* Exchange rings, units and idempotents // Commun. Algebra – 1994. 22, № 12. – P. 4737–4749.
3. *Chen H.* Rings with many idempotents // Int. J. Math. Math. Sci. – 1999. – 22, № 3. – P. 547–558.
4. *Goodearl K. R., Menal P.* Stable range one for rings with many units // Pure Appl. Algebra – 1988. – 54. – P. 261–287.
5. *Helmer O.* The elementary divisor for certain rings without chain conditions // Bull. Amer. Math. Soc. – 1943. – 49, № 2. – P. 225–236.
6. *Lam T. Y.* Serre`s Conjecture // Berlin: Springer, 1978.
7. *Larsen M., Lewis W., Shores T.* Elementary divisor rings and finitely presented modules // Trans. Amer. Math. Soc. – 1974. – 187. – P. 231–248.
8. *McGovern W. W.* Neat rings // J. Pure Appl. Algebra – 2006. – 205. – P. 243–265.

9. *Nicholson W. K.* Lifting idempotents and exchange rings // Trans. Amer. Math. Soc. – 1977. – 229. – P. 269–278.
10. *Vamos P.* 2-good rings // Quart. J. Math. – 2005. – 56. – P. 417–430.
11. *Zabavsky B. V.* Diagonalizability theorem for matrices over rings with finite stable range //Algebra Discrete Math. – 2005. – 1. – P. 134–148.
12. *Zabavsky B. V.* Diagonalization of matrices over ring with finite stable range // Visn. Lviv. Univ. Ser. Mech. Math. – 2003. – 61. – P. 206–211.

2-ХОРОШИЕ АБЕЛЕВЫЕ И ДУО-КОЛЬЦА С УСЛОВИЯМИ СТАБИЛЬНОГО РАНГА

Исследованы дуо-кольца почти единичного стабильного ранга, которые являются обобщением понятия кольца единичного стабильного ранга. Доказано, что дуо-кольцо почти единичного стабильного ранга с отличным от нуля радикалом Джекобсона является кольцом единичного стабильного ранга и 2-хорошим кольцом. Введено понятие почти 2-хорошего кольца. Показано, что правая адекватная дуо область является почти 2-хорошим кольцом.

2-GOOD ABELIAN AND DUO RINGS WITH CONDITIONS OF A STABLE RANGE

We investigate a duo ring of almost unit stable range 1 as a generalization of a ring of unit stable range 1. We prove that a duo ring of almost unit stable range 1 with nonzero Jacobson radical is a ring of unit stable range 1 and is a 2-good ring. We introduce the notice of almost 2-good ring and show that an adequate right duo domain is almost 2-good ring.

[1]Ін-т прикл. проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів
[2]Львів. нац. ун-т ім. Івана Франка, Львів

Одержано
10.10.17