

## Определение параметров модели предельного состояния конструкционных материалов при асимметричном многоцикловом нагружении

М. Н. Регульский, А. Д. Погребняк, В. Н. Пелых

Институт механики им. С. П. Тимошенко НАН Украины, Киев, Украина

*Рассмотрена методика определения параметров модели предельного состояния металлических конструкционных материалов заданной степенной трансцендентной функцией. Модель используется для построения диаграмм амплитуд предельных напряжений при асимметричном многоцикловом нагружении. Выполнена апробация методики путем сравнения значений параметров модели предельного состояния, полученных в результате базового эксперимента при отнулевом цикле нагружения, со значениями, рассчитанными по методу минимизации функционала суммы квадратов отклонений экспериментальных диаграмм от расчетных.*

**Ключевые слова:** сопротивление усталости, асимметричное многоцикловое нагружение, модель предельного состояния, параметры модели, конструкционные материалы.

**Введение.** Значительная часть ответственных элементов несущих конструкций в процессе эксплуатации подвергается совместному воздействию циклических и статических нагрузок в широком диапазоне значений асимметрии цикла нагружения. Несущую способность таких конструкций оценивают исходя из характеристик сопротивления усталости конструкционных материалов при асимметричном циклическом нагружении, обычно представляемых в виде диаграмм предельных амплитуд напряжений [1–6]. Построение последних экспериментальным путем требует больших затрат времени и средств для проведения испытаний на усталость нескольких партий образцов исследуемого материала с целью получения кривых усталости при разных значениях асимметрии цикла нагружения.

Альтернативу экспериментальному методу построения таких диаграмм составляют эмпирические зависимости, позволяющие проводить расчеты на основе экспериментальных данных по усталости при симметричном цикле нагружения и результатов кратковременных статических испытаний. Наибольшее распространение при этом получили линейные, параболические и эллиптические зависимости [2, 3, 5]. Анализ применимости эмпирических зависимостей к расчету диаграмм предельных амплитуд напряжений свидетельствует об удовлетворительном согласовании расчетных данных с экспериментальными при асимметричном цикле нагружения лишь в частных случаях – для конкретного материала в тех или иных условиях нагружения [5, 7, 8].

В работах [9, 10] предложен новый подход к расчету диаграмм предельных амплитуд напряжений, основанный на применении моделей предельного состояния, построенных на базе степенной трансцендентной функции, параметры которой необходимо определять посредством базового эксперимента ограниченного объема. Принципиальное отличие таких моделей от эмпири-

ческих зависимостей состоит в том, что их использование предусматривает не произвольный выбор параметров, а их определение из базовых опытов. В этом случае они могут рассматриваться как константы материала, которые подлежат нахождению из базового эксперимента. В связи с этим возникает задача разработки оптимальной методики определения параметров моделей с целью достаточно надежной оценки и прогнозирования предельного состояния конструкционных материалов при минимальном объеме базового эксперимента.

**Постановка задачи исследования.** Оптимальной методикой определения параметров моделей предельного состояния считаем такую, которая предусматривает максимальное использование стандартных справочных данных о материале при минимальном объеме базового эксперимента и обеспечивает адекватное описание экспериментальных результатов. В качестве справочных данных будем рассматривать следующие механические характеристики материала: предел прочности или предел текучести; предел длительной прочности; предел выносливости при симметричном цикле нагружения. В общем случае эти характеристики являются практически константами материала, определяемыми из базовых опытов. Для большинства конструкционных материалов они известны и систематизированы в соответствующей справочной литературе.

Анализ расчета диаграмм предельных амплитуд напряжений посредством эмпирических зависимостей показывает, что указанных справочных данных в большинстве случаев недостаточно для адекватного описания предельных диаграмм. Тем не менее в расчетной практике при оценке сопротивления усталости конструкционных материалов в условиях асимметричного цикла нагружения широко используются линейная и параболическая зависимости как альтернатива трудоемким и длительным экспериментальным исследованиям [2, 3, 6].

Для определения реакции материала на действие статической составляющей асимметричного цикла необходимо провести как минимум один базовый эксперимент при асимметричном многоцикловом нагружении, что позволит получить параметр зависимости, описывающей предельную диаграмму. Этот параметр определяет форму предельной диаграммы и может трактоваться как дополнительная константа материала, характеризующая темп изменения предела выносливости при асимметричном циклическом нагружении в зависимости от изменения величины статической составляющей цикла. Минимальный объем такого эксперимента состоит в нахождении параметра, по сути, определяющего чувствительность материала к асимметрии нагружения при одной из комбинаций величин амплитуды цикла и статической составляющей, т.е. при одном из значений коэффициента асимметрии цикла нагружения. К сожалению, однозначный выбор коэффициента асимметрии цикла, а именно: оптимальной комбинации статической и циклической составляющей, затруднен из-за отсутствия аргументированных рекомендаций.

Одним из приемлемых вариантов базового эксперимента при асимметричном циклическом нагружении являются испытания при отнулевом цикле, когда величина статической составляющей цикла равна амплитуде цикла. При исследованиях усталости материалов отнулевой цикл нагружения широко

используется для получения экспериментальных данных, характеризующих усталость материалов и элементов конструкций при асимметричном циклическом нагружении [4, 11]. Полученные таким образом результаты отражают реакцию исследуемых образцов на асимметрию цикла и используются для построения диаграмм предельных амплитуд напряжений. Однако такие диаграммы дают лишь приближенное представление о предельном состоянии конструкционного материала.

Анализ применимости различных функций к построению моделей предельного состояния и соответствующих предельных диаграмм [12, 13] свидетельствует о том, что наиболее гибкой структурой обладают уравнения моделей, построенные на основе степенной трансцендентной функции. Такой вывод базируется на использовании при оценке предельного состояния большого количества данных испытаний конструкционных материалов при асимметричном многоцикловом нагружении.

В работах [10, 13] показано вполне удовлетворительное согласование между результатами эксперимента и расчета для ряда металлических конструкционных материалов при построении диаграмм предельных амплитуд напряжений посредством модели предельного состояния следующего вида:

$$\frac{\sigma_a}{\sigma_n} = \left[ \cos \left( \frac{\pi}{2} \frac{\sigma_m}{\sigma_B} \right) \right]^\lambda \Rightarrow \frac{\sigma_a}{\sigma_n} - \left[ \cos \left( \frac{\pi}{2} \frac{\sigma_m}{\sigma_B} \right) \right]^\lambda = 0, \quad (1)$$

где  $\sigma_n$  – предел ограниченной выносливости при симметричном цикле;  $\sigma_B$  – предел прочности.

Параметром модели, получаемым из базового эксперимента при одной из возможных комбинаций величин амплитуды цикла и статической составляющей асимметричного циклического нагружения, является показатель степени  $\lambda$ , с помощью которого описывается форма диаграмм. Он может использоваться в качестве коэффициента формы диаграммы или коэффициента чувствительности материала к асимметрии цикла нагружения. Методика его определения и есть предмет настоящего исследования.

С помощью модели (1) в зависимости от величины параметра  $\lambda$  можно описать разнообразные формы диаграмм предельных амплитуд напряжений, включая выпуклые, близкие к прямолинейным, вогнутые, и в этом плане она является достаточно гибкой. На рис. 1,а в относительных координатах показаны возможные формы диаграмм предельных амплитуд напряжений, рассчитанных в соответствии с моделью (1), в зависимости от изменения параметра  $\lambda$ .

В качестве базовых опытов для определения коэффициента  $\lambda$  в работах [10, 13] предлагается проводить испытания при отнулевом цикле нагружения. В этом случае, преобразовав соотношение (1), параметр  $\lambda$  определяли по формуле

$$\lambda = \frac{\lg \sigma_a^0 - \lg \sigma_n^0}{\lg \left[ \cos \left( \frac{\pi}{2} \frac{\sigma_m^0}{\sigma_B} \right) \right]}, \quad (2)$$

где  $\sigma_a^0, \sigma_m^0$  – амплитуда и среднее напряжение отнулевого цикла в базовом единичном эксперименте;  $\sigma_n^0$  – предел ограниченной выносливости при симметричном цикле, соответствующий долговечности  $n_R^0$  под действием напряжений  $\sigma_m^0$  и  $\sigma_a^0$ .

Схема выбора значений амплитуд напряжений при симметричном и отнулевым циклах нагружения показана на рис. 1, б.

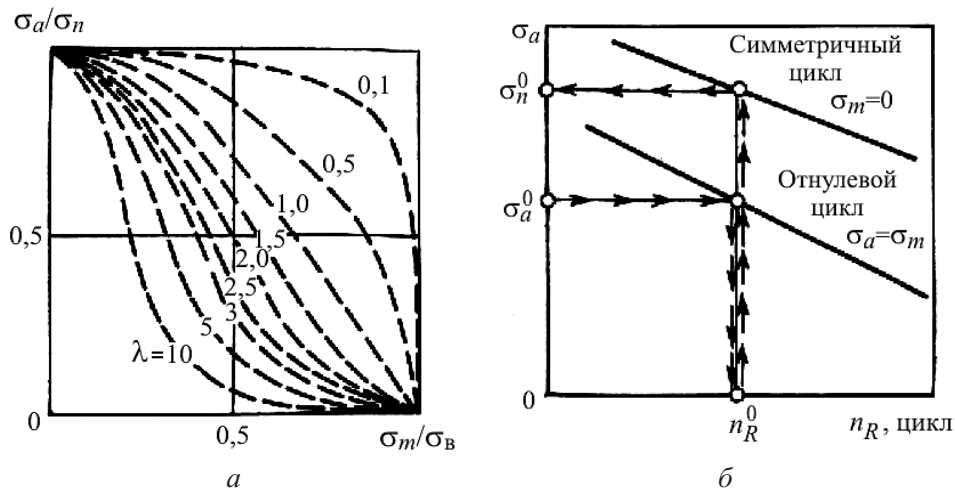


Рис. 1. Вид диаграмм предельных амплитуд напряжений в зависимости от коэффициента  $\lambda$  (а) и схема выбора амплитуд напряжений для его расчета (б).

Применение данного подхода обусловлено, с одной стороны, необходимостью оценки предельного состояния материалов при асимметричном цикле нагружения в условиях отсутствия, как правило, достаточной экспериментальной информации о поведении конструкционных материалов, с другой – большим опытом использования в расчетной практике результатов испытаний при отнулевым цикле для ориентировочных оценок сопротивления усталости при совместном воздействии статических и циклических нагрузок и построения схематизированных диаграмм предельных напряжений [4, 11].

Выбор комбинации напряжений  $\sigma_a$  и  $\sigma_m$ , соответствующих отнулевому циклу, в некоторой степени является условным. В случае если первичной информации о сопротивлении усталости в условиях асимметричного цикла нагружения достаточно, параметр  $\lambda$  можно определить с более высокой степенью точности. Для этого воспользуемся методом минимизации функционала суммы квадратов отклонений экспериментальных значений от расчетных [14] на линеаризированной диаграмме предельных амплитуд напряжений. Полученные результаты позволяют уточнить методику определения параметров модели предельного состояния (1) посредством сопоставления значений, определенных из базового эксперимента при отнулевым цикле нагружения по формуле (2), со значениями, рассчитанными методом минимизации функционала суммы квадратов отклонений.

**Определение параметров модели предельного состояния методом минимизации функционала суммы квадратов отклонений.** Как правило, для построения диаграмм предельных амплитуд напряжений результаты эксперимента представляют в виде пар значений  $\sigma_{mj}$ ,  $\sigma_{aj}$ , соответствующих одной и той же конкретной долговечности. Диаграмма строится в плоскости  $\sigma_m - \sigma_a$  по параметру числа циклов до разрушения, где эти пары значений являются координатами точек, представляющих данные эксперимента.

Более информативны предельные диаграммы, построенные в плоскости нормированных координат  $(\sigma_a/\sigma_n) - (\sigma_m/\sigma_B)$ . В этом случае экспериментальные данные могут быть приведены для нескольких материалов, что удобно при сравнении их чувствительности к асимметрии цикла нагружения. В качестве примера на рис. 2,а представлена такая диаграмма для хромоникелевой стали. Нормирование по амплитуде напряжений выполняется делением на значение предела ограниченной выносливости при симметричном цикле нагружения, соответствующее заданному числу циклов до разрушения, нормирование по статической составляющей цикла – делением на значение предела прочности материала при соответствующем конкретном виде нагружения.

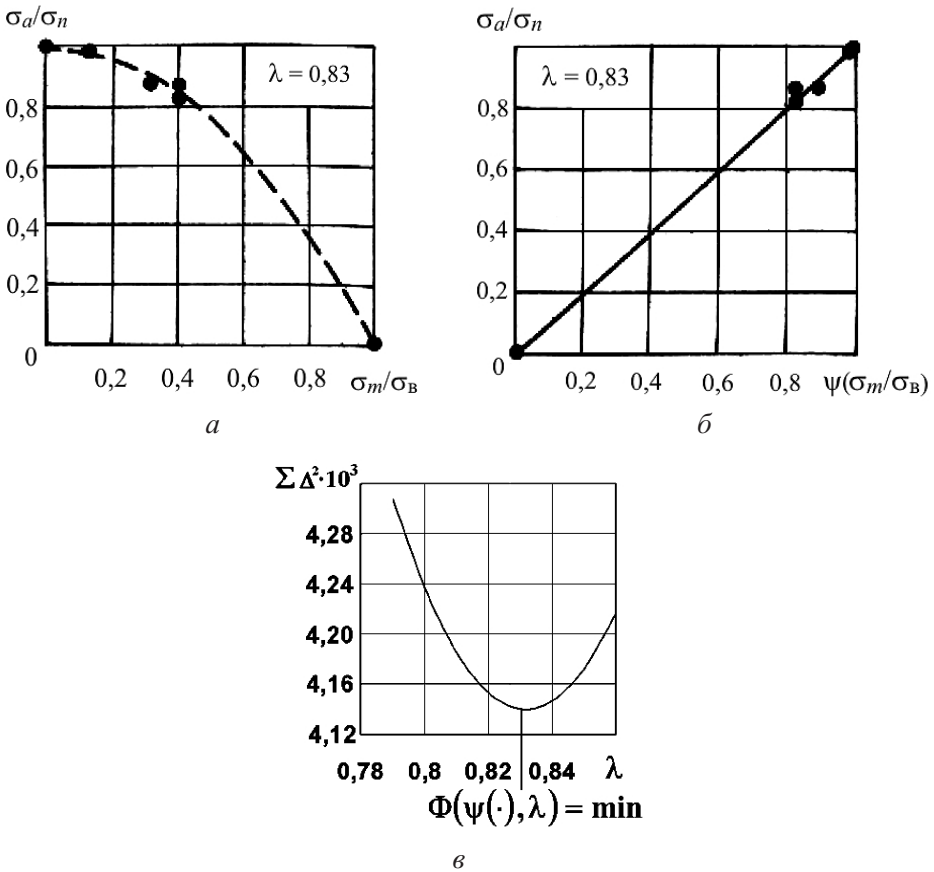


Рис. 2. Нормированная (а) и линеаризованная (б) диаграммы предельных амплитуд напряжений, а также график минимизации функционала суммы квадратов отклонения (в) для хромоникелевой стали.

Еще более полной информативностью обладают приведенные на рис. 2,б единые предельные линеаризованные диаграммы, где линией показана теоретическая зависимость между амплитудой и статической компонентами асимметричного циклического нагружения при выборе соответствующей функции  $\psi(\cdot)$ . Согласно гипотезе о существовании единой диаграммы предельных амплитуд напряжений (далее – единой предельной диаграммы), под единой линеаризованной предельной диаграммой понимают совокупность изохронных диаграмм предельных напряжений, которые задаются единым уравнением с не зависящими от долговечности параметрами (коэффициентами). Методика построения линеаризованных предельных диаграмм описана в работе [12]. Такие диаграммы, в отличие от нормированных предельных диаграмм, позволяют более точно и наглядно представить степень соответствия расчетных данных экспериментальным для любого вида функции  $\psi(\cdot)$ , присутствующей в зависимостях, описывающих предельное состояние.

На примере модели предельного состояния (1) рассмотрим определение параметра  $\lambda$  методом минимизации функционала суммы квадратов отклонений.

Располагая данными эксперимента в виде пар значений  $\sigma_{mj}$ ,  $\sigma_{aj}$ , общее выражение функционала для нахождения оптимального значения параметра модели предельного состояния можно записать следующим образом:

$$\Phi(\psi(\cdot), \lambda) = \sum_{j=1}^h \left[ \psi \left( \frac{\sigma_{mj}}{\sigma_B} \right) - \left( \frac{\sigma_{aj}}{\sigma_n} \right)_{exp} \right]^2 = \min, \quad (3)$$

где  $\psi(\cdot)$  – функция, по которой построена модель предельного состояния;  $\lambda$  – параметр модели, подлежащий оптимизации;  $(\sigma_{aj}/\sigma_n)_{exp}$  – нормированное экспериментальное значение амплитуды цикла, соответствующее нормированному значению статической составляющей, используемому в качестве аргумента функции  $\psi(\cdot)$ .

Для модели предельного состояния вида (1) конкретизация функции  $\psi(\cdot)$  в выражении (3) задается соотношением

$$\psi \left( \frac{\sigma_m}{\sigma_B} \right) = \left[ \cos \left( \frac{\sigma_m}{\sigma_B} \right) \right]^\lambda, \quad (4)$$

а параметром, подлежащим определению, является показатель степени  $\lambda$ .

При построении диаграммы предельных амплитуд напряжений в нормированных координатах экспериментальные данные нанесены в виде точек с абсциссами  $(\sigma_{mj}/\sigma_B)$  и ординатами  $(\sigma_{aj}/\sigma_n)_{exp}$  – рис. 2,а, при построении линеаризованных диаграмм предельных амплитуд напряжений – точками с абсциссами  $\psi(\sigma_{mj}/\sigma_B)$ , определяемыми согласно выражению (4), и ординатами  $(\sigma_{aj}/\sigma_n)_{exp}$  – рис. 2,б.

Рис. 2,в иллюстрирует определение оптимального значения параметра  $\lambda$  для модели предельного состояния (1) по результатам испытаний хромо-



никелевой стали при асимметричном циклическом нагружении при 20°С, где по оси ординат отложены суммы квадратов отклонений экспериментальных значений амплитуд напряжений от рассчитанных в соответствии с моделью (1) в зависимости от изменения  $\lambda$ .

Значение параметра  $\lambda$ , полученное методом минимизации функционала (3), позволяет построить диаграмму предельных амплитуд напряжений (на рис. 2,а штриховая линия) и нанести на поле линеаризованной диаграммы точки (рис. 2,б), соответствующие эксперименту, которые в этом случае располагаются практически на линии, отражающей теоретическую зависимость (1).

Благодаря опыту применения метода минимизации функционала суммы квадратов отклонений можно достаточно надежно определять значение параметра  $\lambda$ . Однако метод имеет особенности, обусловленные тем, что количество точек, соответствующих эксперименту на поле диаграмм предельных напряжений, в большинстве случаев невелико, что связано со значительной трудоемкостью получения экспериментальных данных. При выборе результатов экспериментов, подлежащих обработке, следует стремиться к тому, чтобы абсциссы точек, соответствующие различным задаваемым в экспериментах средним напряжениям циклов, были разнесены вдоль оси абсцисс, а не располагались близко одна к другой. Это обеспечит более достоверное определение параметра  $\lambda$  модели (1).

**Апробация методики.** Ранее показано [13], что модель предельного состояния вида (1) удовлетворительно согласуется с результатами экспериментальных исследований металлических конструкционных материалов. На примере данных испытаний ряда материалов выполним сопоставление параметра  $\lambda$  модели (1), рассчитанного по формуле (2) согласно эксперименту при отнулевом цикле нагружения, со значением, полученным методом минимизации функционала (3) с использованием более полного объема экспериментальных результатов. В качестве исходной информации используем достаточно представительные экспериментальные данные о поведении конструкционных материалов при асимметричном нагружении в широком диапазоне изменения статической составляющей цикла нагружения [3, 15–18].

Результаты расчета параметра  $\lambda$ , выполненного по двум вариантам, приведены в таблице. Как видно, для исследованных материалов максимальное расхождение между значениями  $\lambda$  составляет 20,4%. При этом предполагается, что значение  $\lambda$ , определяемое методом минимизации функционала, более точное, поскольку использовалась более представительная информация.

Величины относительной погрешности вычисления амплитуды асимметричного цикла (таблица) соответствуют формуле

$$\Delta\sigma_a = \frac{\sigma_a(2) - \sigma_a(3)}{\sigma_a(3)} \cdot 100\%,$$

где  $\sigma_a(2)$  – амплитуда, рассчитанная с использованием значения  $\lambda$ , определенного по формуле (2);  $\sigma_a(3)$  – то же методом минимизации функционала (3).

**Сравнение значений параметра  $\lambda$ , вычисленных методом минимизации функционала (3) и по формуле (2)**

Материал	Параметры отнулевого цикла или близкого к нему		Значения показателя степени $\lambda$			Относительная погрешность определения $\sigma_a$ , %
	$\sigma_a$ , МПа	$\sigma_m$ , МПа	Метод минимизации функционала	По отнулевому циклу	Расхождение, %	
Сталь Э10	152,0	142,0	1,27	1,53	20,4	-9,42
Сплав Д16Т	169,2	196,2	1,44	1,47	2,08	-1,03
Малоуглеродистая сталь	165,8	152,0	1,05	0,94	10,48	4,15
Сталь SAE 4130	273,0	298,0	0,87	0,94	7,45	-2,45
Сплав 52S-36	95,6	103,0	0,38	0,39	2,63	-0,40
Никель-хромомолибденовая сталь	242,3	239,4	0,83	0,73	12,0	3,46

На рис. 3 приведены диаграммы предельных амплитуд напряжений для стали Э10 и сплава Д16Т, рассчитанные с использованием значений  $\lambda$ , определенных вышеуказанными способами. Для стали Э10 получено наибольшее расхождение в результатах расчета амплитудных значений циклических напряжений, которое не превышает 10% в диапазоне статической компоненты, соответствующей эксплуатационным значениям.

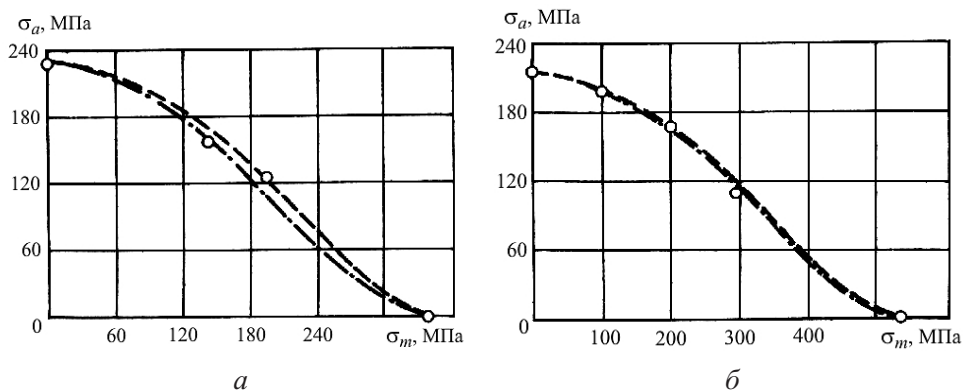


Рис. 3. Диаграммы предельных амплитуд напряжений при асимметричном растяжении-сжатии стали Э10 (а) и сплава Д16Т (б) (штриховые линии – расчет по формуле (2), штрихпунктирные – по методу минимизации функционала (3)).



Для сплава Д16Т различия в расчетных оценках амплитуды циклических напряжений с использованием показателя степени  $\lambda$ , определяемого двумя способами, практически незначимы. Для остальных материалов погрешность вычисления амплитуды асимметричного цикла нагружения не превышает 4,15%.

Величина погрешности по амплитуде асимметричного цикла в модели (1) зависит не только от диапазона значений аргумента, т.е. статической составляющей цикла, но и от диапазона, в котором находится показатель степени  $\lambda$ , поскольку трансцендентная степенная функция, положенная в основу построения модели, является существенно нелинейной.

**Обсуждение результатов.** Анализ известных достаточно простых зависимостей [1–6] показывает, что, обладая определенными ограничениями, они не могут использоваться для описания большого количества диаграмм предельных амплитуд напряжений и, следовательно, не являются универсальными. В то же время модель предельного состояния, основанная на степенной трансцендентной функции, позволяет описать сопротивление усталости в условиях асимметричного нагружения с достаточно высокой точностью при варьировании статической компоненты в широком диапазоне значений [13]. В этом случае точность оценок во многом зависит от корректного определения используемых материальных констант, в первую очередь коэффициента чувствительности материала к асимметрии нагружения. Варьирование параметром  $\lambda$  в модели (1) позволяет адекватно описывать результаты экспериментальных исследований в виде диаграмм предельных амплитуд напряжений любой формы. Для этого необходимо корректное определение параметра  $\lambda$ , задающего форму диаграммы предельного состояния. К сожалению, на практике исследователь, как правило, располагает ограниченной информацией о сопротивлении усталости конструкционных материалов при асимметричном нагружении, что часто исключает надежное определение  $\lambda$ .

Выполненные исследования показывают возможность упрощенной оценки  $\lambda$  с достаточно высокой точностью по результатам, полученным путем постановки и реализации базового усталостного эксперимента при отнулевом цикле асимметричного нагружения. Это подтверждается сопоставлением оценок определения параметра  $\lambda$  по результатам единичного базового эксперимента при отнулевом цикле и методом минимизации функционала суммы квадратов отклонений. В последнем случае использовалась экспериментальная информация, заимствованная из известных публикаций. Расхождение в оценках амплитудных значений цикла напряжений не превышает 10%, а при построении расчетных диаграмм предельных амплитуд напряжений не обнаружено принципиальных отклонений от данных эксперимента.

Отметим, однако, что результаты усталостных испытаний обычно характеризуются большим разбросом по долговечности (до одного порядка, а иногда и более) в зависимости от материала. В связи с этим существует определенная вероятность ошибки в определении параметра  $\lambda$  по результатам базового эксперимента при отнулевом цикле, что, в свою очередь, внесет погрешность в оценки предельного состояния конкретного материала. С целью исключения возможных ошибок желательно оценивать коэффициент  $\lambda$  по результатам базового эксперимента двух-трех однотипных образцов в одних и тех же условиях нагружения.

## Выводы

1. Выполненные исследования обосновывают методику определения основного параметра  $\lambda$  в модели предельного состояния (1) по данным базового эксперимента при отнулевом цикле нагружения.

2. При наличии исходных данных ( $\sigma_b, \sigma_n$ ) и параметра  $\lambda$  (при отнулевом цикле) можно построить диаграммы предельных амплитуд напряжений, которые дают вполне удовлетворительное представление о предельном состоянии конструкционных материалов при асимметричном многоцикловом нагружении. Применение методики определения параметра  $\lambda$  с помощью базового эксперимента при отнулевом цикле нагружения позволяет существенно сократить общий объем трудоемких экспериментальных исследований, необходимых для достаточно достоверного построения диаграмм предельных амплитуд напряжений конструкционных материалов.

## Резюме

Розглянуто методику визначення параметрів моделі граничного стану металевих конструкційних матеріалів заданою степеневою трансцендентною функцією. Модель використовується для побудови діаграм граничних амплітуд напружень за умови багатоциклового асиметричного навантаження. Виконано апробацію методики шляхом зіставлення значень параметрів моделі граничного стану, отриманих у результаті базового експерименту при віднульовому циклі навантаження, з розрахованими за методом мінімізації функціонала суми квадратів відхилень експериментальних діаграм від розрахункових.

1. Хэйвуд Р. Б. Проектирование с учетом усталости / Пер. с англ. под ред. И. Ф. Образцова. – М.: Машиностроение, 1969. – 504 с.
2. Гаф Г. Дж. Усталость металлов / Пер. с англ. – М.–Л.: Гл. ред. лит. по черной металлургии, 1935. – 304 с.
3. Форрест П. Усталость металлов / Пер. с англ. под ред. С. В. Серенсена. – М.: Машиностроение, 1968. – 352 с.
4. Серенсен С. В., Когаев В. П., Шнейдерович Р. М. Несущая способность и расчеты деталей машин на прочность. Руководство и справ. пособие. – М.: Машиностроение, 1975. – 488 с.
5. Троценко В. Т., Красовский А. Я., Покровский В. В. и др. Сопротивление материалов деформированию и разрушению. Справ. пособие. – Ч. 2. – Киев: Наук. думка, 1994. – 704 с.
6. Ужик Г. В. Методы испытаний металлов и деталей машин на выносливость. – М.–Л.: Изд-во АН СССР, 1948. – 264 с.
7. Воробьев А. З., Олькин Б. И., Стебенев В. Н., Родченко Т. С. Сопротивление усталости элементов конструкций. – М.: Машиностроение, 1990. – 240 с.
8. Гордеев Н. И. О предельной циклической прочности при асимметричных циклах // Прочность металлов при переменных нагрузках. – М.: Изд-во АН СССР, 1963. – С. 119 – 126.

9. Голуб В. П., Крижановский В. И. К оценке предельного состояния материалов при асимметричном многоцикловом нагружении // Пробл. прочности. – 1994. – № 4. – С. 3 – 15.
10. Golub V. P. Experimental analysis of high-temperature creep, fatigue and damage. 1. Analysis methods // Int. Appl. Mech. – 2001. – 37, No. 4. – P. 425 – 455.
11. Биргер И. А., Балашов Б. Ф., Дульнев Р. А. и др. Конструкционная прочность материалов и деталей газотурбинных двигателей / Под ред. И. А. Биргера, Б. Ф. Балашова. – М.: Машиностроение, 1981. – 222 с.
12. Голуб В. П., Крижановский В. И., Погребняк А. Д. Метод расчета усталостной прочности металлических и композитных материалов при асимметричном многоцикловом нагружении // Прикл. механика. – 2004. – 40, № 11. – С. 106 – 115.
13. Голуб В. П., Крижановский В. И., Погребняк А. Д., Кочеткова Е. С. Усталостная прочность металлических и композитных материалов при асимметричном растяжении–сжатии // Там же. – 2006. – 42, № 1. – С. 48 – 58.
14. Анго А. Математика для электро- и радиоинженеров. – М.: Наука, 1967. – 780 с.
15. Цимбалыстый Я. И. Исследование неупругости и усталости металлов при асимметричных циклах: Автореф. дис. ... канд. техн. наук. – Киев, 1975. – 20 с.
16. Сочава А. И. Исследование влияния постоянной составляющей цикла на выносливость сплава Д16Т при осевых нагружениях // Изв. вузов. – 1975. – № 12. – С. 39 – 42.
17. Chodorowski W. T. Fatigue strength in shear of a alloy steel with particular reference to the effect of mean stress and directional properties // Proc. Int. Conf. on Fatigue of Metals. – London, 1956. – P. 122 – 131.
18. Grover H. J., Bishop S. M., and Jackson L. R. Fatigue Strengths of Aircraft Materials – Axial-Load Fatigue Tests on Unnotched Sheet Specimens of 24S-T3 and 75S-T6 Aluminium Alloys and of SAE 4130 Steel // NACA TN 2324. – 1951. – 64 p.

Поступила 30. 04. 2010