УДК 539.3

Застосування одного з методів теорії потенціалу до дослідження статичного деформування складених конічних оболонок

С. А. Левчук

Запорізький національний університет, Запоріжжя, Україна

kpmm.mf@znu.edu.ua

Розглянуто задачу про статичне деформування складених конічних оболонок. Розв'язок побудовано з використанням методів теорії потенціалу. Досліджуване тіло розглядалося як складена конструкція, до якої входить декілька конічних оболонок. Сформульовано умови з'єднання оболонок у складеній конструкції. Побудовано матрицю типу Гріна для розглянутої задачі. Досліджено залежність основних характеристик напруженого стану складеної конічної оболонки від кутів конусності.

Ключові слова: складена конічна оболонка, теорія потенціалу, напружено-деформований стан, матриця типу Гріна.

Як елементи складених технічних конструкцій нерідко використовують конічні оболонки, жорстко з'єднані між собою або з елементами іншого типу. Прикладом подібної конструкції може бути сильфон, який являє собою циліндричну посудину з нанесеними по поверхні поперечними гофрами (рис. 1). Сильфон, виготовлений з пружного матеріалу, здатен під дією осьових сил помітно видовжуватися при порівняно малих згинальних напруженнях. Ця властивість сильфонів має досить велике значення при їх використанні у техніці. Сильфони застосовуються як пружні компенсатори монтажних і експлуатаційних зміщень у системі трубопроводів, як чутливі елементи датчиків тиску в приладобудуванні і т.п.

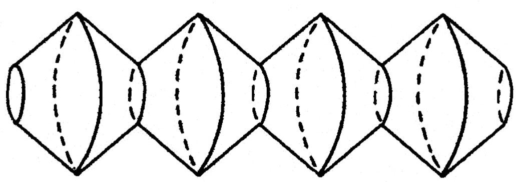

Рис. 1. Складене тіло з конічних оболонок.

Деякі способи розрахунку статичного деформування гофрованих мембран із різними формами гофрування і сильфонів описано в [1]. При цьому використовувався, зокрема, метод Андрєєвої, оснований на введенні коефіцієнтів анізотропії мембрани при розтязі і вигині в коловому і радіальному напрямках і розрахунку гофрованої мембрани як анізотропної пластини. Сильфон розглядався як система кільцевих пластин, зв'язаних попарно по зовнішньому і внутрішньому контурах поверхні.

У роботах [2, 3] висвітлювалися деякі питання розрахунку деформування складених конічних оболонок. Наприклад, у [2] розглядалися теорія і методи розв'язання задач статики тонких багатошарових оболонок обертання довільного обрису при нерівномірних силових і температурних впливах. Як приклад наведено результати розрахунку елементів таких об'єктів: пружна система, складена з конічної, тороїдальної і двох циліндричних оболонок; з'єднання конічних оболонок із розривом. За допомогою методу скінченних елементів у [3] було досліджено напружено-деформований стан складених конічних і циліндричних оболонок обертання під дією симетричних навантажень, при цьому для вісесиметричної конічної оболонки використано аналітичний розв'язок у функціях Бесселя. У роботі [4] для розрахунку концентрації пружних напружень у зоні сполучення конуса і циліндра застосовано комбінацію методу скінченних елементів і теорії оболонок. Для розрахунку оболонкових конструкцій складної геометрії у [5] запропоновано використовувати розвиток сплайнового варіанта методу скінченних елементів із залученням тривимірних викривлених елементів.

У даній роботі задачу розрахунку напружено-деформованого стану складених конічних тіл розглянуто з точки зору теорії тонких оболонок Власова [6]. Деякі окремі випадки цієї задачі розглядалися в [7].

Систему диференціальних рівнянь, що описує статичне деформування конічної оболонки в переміщеннях, згідно із загальною моментною теорією тонких оболонок Власова [6, 8] можна записати наступним чином (у вісесиметричному випадку):

$$\begin{aligned}&\nabla^2 U-\frac{\sin^2\gamma}{B^2}U+\frac{\sigma\cos\gamma}{B}\frac{dW}{dx}-\frac{\sin\gamma\cos\gamma}{B^2}W=\frac{\sigma^2-1}{Eh}q_x;\\&\frac{\sigma\cos\gamma}{B}\frac{dU}{dx}+\frac{\sin\gamma\cos\gamma}{B^2}U+\frac{\cos^2\gamma}{B^2}W+\frac{h^2}{12}\nabla^2\left[\nabla^2+\frac{\cos^2\gamma}{B^2}\right]W=\frac{1-\sigma^2}{Eh}q_z,\end{aligned}\tag{1}$$

де $W=W(x)$, $U=U(x)$ і $q_x=q_x(x)$, $q_z=q_z(x)$ – складові векторів переміщень та інтенсивності поверхневого навантаження відповідно; h – товщина оболонки; σ, E – коефіцієнт Пуассона і модуль Юнга; ∇^2 – оператор Лапласа, $\nabla^2=\frac{\sin\gamma}{B}\frac{d}{dx}+\frac{d^2}{dx^2}$; $B=R+x\sin\gamma$; γ – кут конусності; R – відстань від осі обертання до краю конічної оболонки (рис. 2).

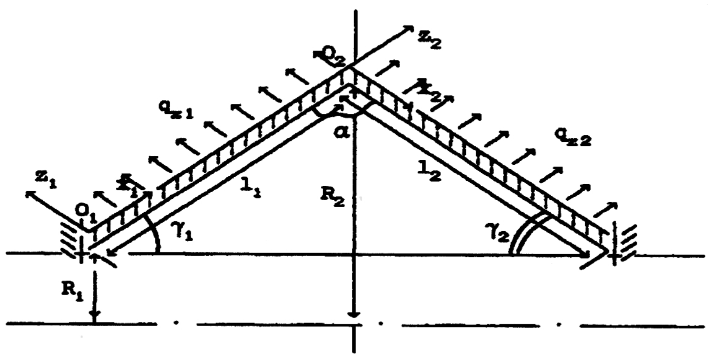

Рис. 2. Переріз двох з'єднаних конічних оболонок.

Вирази для внутрішніх зусиль і моментів мають такий вигляд [9]:

$$\begin{aligned}&N(x)=\frac{Eh}{1-\sigma^2}\left(\frac{dU}{dx}+\frac{\sigma\sin\gamma}{B}U+\frac{\sigma\cos\gamma}{B}W\right);\qquad M(x)=-D\left(\frac{d^2W}{dx^2}+\frac{\sigma\sin\gamma}{B}\frac{dW}{dx}\right);\\&Q(x)=-D\frac{d}{dx}\nabla^2 W=-D\left(-\frac{\sin^2\gamma}{B^2}\frac{dW}{dx}+\frac{\sin\gamma}{B}\frac{d^2W}{dx^2}+\frac{d^3W}{dx^3}\right),\end{aligned}\tag{2}$$

де N – нормальне зусилля; Q – поперечна сила; M – згинальний момент; D – циліндрична жорсткість, $12D(1-\sigma^2)=Eh^3$.

Якщо розглянути жорстке послідовне з'єднання n конічних оболонок під деяким кутом α при затисненні зовнішніх країв (рис. 2), то додаткові умови набудуть такого вигляду:

$$\begin{cases} U_1(0)=0; \quad \overline{U}_i(l_i)+\overline{W}_i(l_i)=\overline{U}_{i+1}(0)+\overline{W}_{i+1}(0); \\ W_1(0)=0; \quad \overline{N}_i(l_i)+\overline{Q}_i(l_i)=\overline{N}_{i+1}(0)+\overline{Q}_{i+1}(0); \\ \dfrac{dW_1}{dx_1}(0)=0; \quad \dfrac{dW_i}{dx_i}(l_i)=\dfrac{dW_{i+1}}{dx_{i+1}}(0); \quad U_n(l_n)=0; \\ M_i(l_i)=M_{i+1}(0); \quad W_n(l_n)=0; \quad \dfrac{dW_n}{dx_n}(l_n)=0, \end{cases} \tag{3}$$

де l_i, $i=1, 2, \ldots, n-1$ – довжини конічних оболонок, індексом позначено номер конічної секції, рискою зверху – відповідні вектори.

Запишемо векторні рівності з умов (3) у скалярному вигляді:

$$\begin{aligned} U_i(l_i) &= (-1)^{i+1}W_{i+1}(0)\sin\alpha - U_{i+1}(0)\cos\alpha; \\ W_i(l_i) &= (-1)^{i}U_{i+1}(0)\sin\alpha - W_{i+1}(0)\cos\alpha; \\ N_i(l_i) &= (-1)^{i}Q_{i+1}(0)\sin\alpha - N_{i+1}(0)\cos\alpha; \\ Q_i(l_i) &= (-1)^{i+1}N_{i+1}(0)\sin\alpha - Q_{i+1}(0)\cos\alpha. \end{aligned} \tag{4}$$

У результаті одержимо $6n$ додаткових умов для визначення такої ж кількості довільних сталих при інтегруванні системи (1), що записана для кожної з n конічних оболонок.

Подальший розв'язок системи (1) будемо здійснювати шляхом редукції до ряду задач Коші. При цьому спосіб розв'язання є наступний.

Запишемо систему диференціальних рівнянь (1) у нормальному вигляді:

$$\frac{d\overline{Y}}{dx}=\overline{F}, \tag{5}$$

де

$$\overline{Y}^T=(U, U1, W, W1, W2, W3); \qquad \overline{F}^T=(U1, f_1, W1, W2, W3, f_2);$$

$$f_1=\frac{\sigma^2-1}{Eh}q_x-\frac{\sin\gamma}{B}U1+\frac{\sin^2\gamma}{B^2}U-\frac{\sigma\cos\gamma}{B}W1+\frac{\sin\gamma\cos\gamma}{B^2}W;$$

$$f_2=\frac{12}{h^2}\left(\frac{1-\sigma^2}{Eh}q_z-\frac{\sigma\cos\gamma}{B}U1-\frac{\sin\gamma\cos\gamma}{B^2}U-\frac{\cos^2\gamma}{B^2}W\right)-$$

$$-\frac{2\sin\gamma}{B}W3+\frac{\sin^2\gamma}{B^2}W2+\frac{2\sin^4\gamma+\sin^3\gamma}{B^3}W1;$$

$U1$, $W1$, $W2$, $W3$ – допоміжні функції, а саме: просторові похідні по x від відповідних змінних; цифрою після літери позначено порядок похідної.

Варіанти початкових умов

№ варіанта	Функція					
	$U(0)$	$U1(0)$	$W(0)$	$W1(0)$	$W2(0)$	$W3(0)$
1	1	0	0	0	0	0
2	0	1	0	0	0	0
3	0	0	1	0	0	0
4	0	0	0	1	0	0
5	0	0	0	0	1	0
6	0	0	0	0	0	1

Далі розглянемо задачі Коші для нормальної системи диференціальних рівнянь для наступних варіантів початкових умов (таблиця).

При цьому необхідно покласти $q_x(x) = q_z(x) = 0$. Після розв'язання (5) одним із чисельних методів (наприклад, методом Рунге-Кутта) одержимо фундаментальні розв'язки для системи (1) у дискретному вигляді, які позначимо через $U^{(i)}(x)$, $W^{(i)}(x)$, $i = 1, 2, ..., 6$.

Тоді загальний розв'язок системи (1) запишемо так:

$$U(x) = \sum_{i=1}^{6} C_i(x) U^{(i)}(x); \qquad W(x) = \sum_{i=1}^{6} C_i(x) W^{(i)}(x). \tag{6}$$

Далі задачу будемо розв'язувати методом варіації довільних сталих, при цьому отримаємо залежності також у дискретному вигляді:

$$\begin{aligned} U(x) &= \sum_{i=1}^{6} \overline{C}_i(x) U^{(i)}(x) + \int_0^x \chi_{11}(x,\xi) q_x(\xi) d\xi + \int_0^x \chi_{12}(x,\xi) q_z(\xi) d\xi; \\ W(x) &= \sum_{i=1}^{6} \overline{C}_i(x) W^{(i)}(x) + \int_0^x \chi_{21}(x,\xi) q_x(\xi) d\xi + \int_0^x \chi_{22}(x,\xi) q_z(\xi) d\xi, \end{aligned} \tag{7}$$

де $\chi_{ij}(x, \xi)$, $i, j = 1, 2$ визначаються через детермінант і відповідні мінори системи лінійних алгебраїчних рівнянь відносно невідомих dC_i/dx, яка отримана при використанні методу варіації довільних сталих.

Описана розрахункова схема застосовується для кожної з n конічних оболонок, які входять у досліджуване складене тіло.

Константи $\overline{C}_i$, $i = 1, 2, \ldots, 6n$ визначаються з умов (3). Підставимо залежності (7), записані для кожної з n конічних оболонок, у (2), а отримані вирази – у (3) і матимемо систему лінійних алгебраїчних рівнянь для визначення констант $\overline{C}_i$. Розв'яжемо дану систему матричним методом і підставимо $\overline{C}_i$ у (7). У результаті отримаємо остаточний розв'язок задач (1), (3):

$$\overline{V}_k(x_k) = \sum_{\nu=1}^{n} \int_0^{l_\nu} G_\nu(x_k, \xi) \overline{F}_\nu(\xi) d\xi, \tag{8}$$

де

$$\overline{V}_k(x_k) = (U_k(x_k)W_k(x_k))^T; \qquad \overline{F}_\nu(\xi) = (q_{\nu x}(\xi)q_{\nu z}(\xi))^T;$$

$$G_\nu(x_k, \xi) = (G_\nu^{ij})_{ij=1,2}^2, \qquad k = 1, 2, \ldots, n;$$

$G_\nu(x_k, \xi)$ – побудовані матриці типу Гріна для даної задачі; у цьому випадку мова йде фактично про чисельну апроксимацію таких матриць, оскільки вони отримані у дискретному вигляді.

Викладений метод розрахунку нижче ілюструється деякими чисельними результатами, що описують напружений стан представленого вище об'єкта, складеного з двох послідовно з'єднаних секцій, в залежності від кутів конусності конічних оболонок (рис. 3). При розрахунках було прийнято: $q_{zi}/E_i = 0{,}5 \cdot 10^{-6}$; $\sigma_i = 0{,}25$; $h_i/l_i = 1/60$; $h_i/R_i = 1/30$ $(R_2 = R_1 + l_1 \sin\gamma_1)$, $i = 1, 2$.

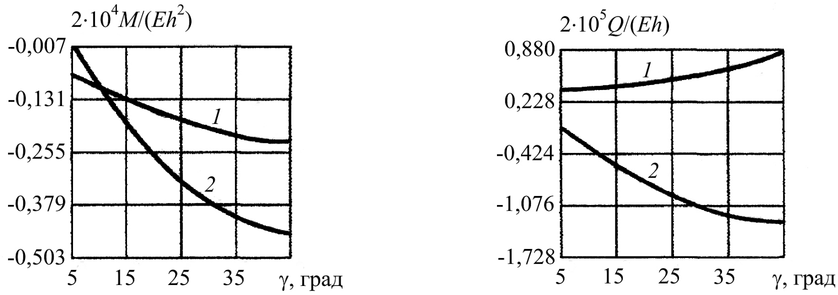

Рис. 3. Основні характеристики напруженого стану складеної конічної оболонки на кінцях конструкції (крива *1*) і в місці з'єднання секцій (крива *2*).

Аналіз основних характеристик напруженого стану, таких як згинальний момент $M(x)$ і поперечна сила $Q(x)$ (рис. 3), показує, що вони як на кінцях складеного тіла, так і в місці з'єднання оболонок зростають за модулем при збільшенні кутів конусності конічних секцій, що входять до складеної конструкції. Причому в місці з'єднання оболонок згинальний момент і поперечна сила зростають (за модулем) більш швидко, ніж на кінцях конструкції.

Резюме

Рассмотрена задача о статическом деформировании составных конических оболочек. Решение построено с использованием методов теории потенциала. Исследуемое тело рассматривалось как составная конструкция, включающая некоторое количество конических оболочек. Сформулированы условия соединения оболочек в составной конструкции. Построена матрица типа Грина для указанной задачи. Исследована зависимость основных характеристик напряженного состояния составной конической оболочки от углов конусности.

1. *Пономарев С. Д.*, *Бидерман В. Л.*, *Лихарев К. К.* Расчеты на прочность в машиностроении. – М., 1958. – Т. 2. – 975 с.
2. *Григоренко Я. М.* Изотропные и анизотропные слоистые оболочки вращения переменной жесткости. – Киев: Наук. думка, 1973. – 228 с.
3. *Barinka L. L. and Jennings R. L.* A numerical and substructuring analysis for discontinuous thin shells of revolution // Trans. of 4th Int. Conf. on Structural Mechanics in Reactor Technology (Aug. 15–19, San Francisco, California, 1977). – Amsterdam, 1977. – M 3/3.

4. *Skopinsky V. N.* Stress concentration in cone–cylinder intersection // Int. J. Press. Vess. Piping. – 2001. – **78**, No. 1. – P. 35 – 41.
5. *Якупов Н. М.*, *Хисамов Р. З.* Моделирование сложных оболочечных систем // Механика оболочек и пластин. – Н. Новгород: Изд-во ННГУ, 1999. – С. 203 – 205.
6. *Власов В. З.* Избранные труды. В 3 т. – М.: Изд-во АН СССР, 1962. – Т. 1. – 528 с.
7. *Левчук С. А.* Дослідження залежності основних характеристик напруженого стану складених конічних оболонок від кутів конусності за допомогою методів теорії потенціалу // Вісн. Запорізьк. держ. ун-ту. Фізико-математичні науки. – 2004. – № 2. – С. 56 – 60.
8. *Гавеля С. П.* Метод построения матриц типа Грина для составных оболочек // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1981. – № 9. – С. 12 – 17.
9. *Биргер И. А.*, *Пановко Я. Г.* Прочность, устойчивость, колебания. В 3 т. – М.: Машиностроение, 1968. – Т. 1. – 832 с.

Поступила 29. 03. 2013