УДК 519.217; 519.718

А. Дас, Т.О. Лукашив, И.В. Малык

СИНТЕЗ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ СТОХАСТИЧЕСКИМИ ДИНАМИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ СЛУЧАЙНОЙ СТРУКТУРЫ С МАРКОВСКИМИ ПЕРЕКЛЮЧЕНИЯМИ

Введение

Одним из важнейших свойств моделируемого процесса, безусловно, является его управляемость. Эта проблема возникает всякий раз, когда строится математическая модель какого-либо процесса, предусматривающая возможность воздействия на него с целью направить его в нужное русло в зависимости от конкретного случая. Уравнение движения (либо эволюция системы) может быть описано дифференциальными уравнениями разного типа, в часности стохастическими, которые возникают при учете разного рода случайностей.

Для детерминированных систем обыкновенных уравнений важные результаты теории управления получены в работах [1–3]. Возможность учета в системах дифференциальных уравнений импульсных возмущений систематически изложена в монографии А.М. Самойленко, Н.А. Перестюка [4], а в монографии Е.Ф. Царькова, М.Л. Свердана [5] эта ситуация описана не только для дифференциальных, но и для разностных уравнений. В монографии В.М. Кунцевича, Ю.Н. Чехового [6] разработаны методы описания и исследования нелинейных импульсных систем управления с частотной и частотно-широтной импульсной модуляцией.

Заслуживает внимания фундаментальная монография И.И. Гихмана и А.В. Скорохода [7], в которой впервые изложена общая теория управляемых процессов и теория управляемых стохастических дифференциальных уравнений. Они рассмотрели классические задачи об оптимальной остановке случайных процессов, провели строгое доказательство вывода уравнений Беллмана [8] и их применение для построения оптимальных управлений.

В монографии Е.А. Андреевой, В.Б. Колмановского, Л.Е. Шайхета [9] рассмотрены управляемые системы с конечным последействием детерминированного и стохастического типа. Работа [10] посвящена синтезу оптимального управления линейными стохастическими динамическими системами с конечным последействием и пуассоновскими возмущениями.

Влияние марковских возмущений на эволюцию системы изучали В.С. Королюк и В. Лимниос [11], А.В. Скороход [12], Р.З. Хасьминский [13], И.Я. Кац [14], Н.Е. Казаков и В.М. Артемьев [15, 16], Л.Е. Шайхет [17].

Работы [18, 19] посвящены изучению проблемы устойчивости стохастических динамических систем случайной структуры по И.Я. Кацу [14] с учетом импульсных марковских возмущений по Е.Ф. Царькову [5], а в работах [20, 21] решена проблема стабилизации для таких систем, т.е. решена задача синтеза оптимального управления, стабилизирующего систему к стохастически устойчивой. Однако наряду с проблемой стабилизации можно рассмотреть и проблему синтеза оптимального управления, которая минимизирует некоторый функционал качества, не ограничиваясь сравнительно более жесткими условиями стохастической устойчивости, т.е. задачу управления, которая несколько шире задачи оптимальной стабилизации. В [22] получены достаточные условия существования такого оптимального управления для стохастических динамических систем случайной структуры с марковскими переключениями, а в настоящей работе, как в продолжение исследований [22], решена проблема его синтеза.

Постановка задачи

Рассмотрим стохастическую систему случайной структуры, которая задана стохастическим дифференциальным уравнением Ито

$$dx(t) = a(t, \xi(t), x(t), u(t))dt + b(t, \xi(t), x(t), u(t))\, dw(t)\,,\ t \in \mathbf{R}_+ \setminus K\,, \tag{1}$$

с марковскими переключениями

$$\Delta x(t)\Big|_{t=t_k} = g(t_k-, \xi(t_k-), \eta_k, x(t_k-))\,, \tag{2}$$

$$t_k \in K = \{t_k \Uparrow\},\ k = 0, 1, 2, \ldots,\ \lim_{n\to\infty} t_n = +\infty,$$

и начальными условиями

$$x(t_0) = x_0 \in \mathbf{R}^m,\ \ \xi(t_0) = y \in \mathbf{Y}\,,\ \ \eta_0 = h \in \mathbf{H}\,. \tag{3}$$

Здесь $\xi(t)$ — марковский процесс со значениями в пространстве $(\mathbf{Y}, \mathcal{Y})$, $\mathbf{Y} := \{y_1, \ldots, y_N\}$, с генератором Q, $\{\eta_k, k \ge 0\}$ — цепь Маркова со значениями в измеримом пространстве $(\mathbf{H}, \mathcal{H})$ и переходной вероятностью на k-м шаге $\boldsymbol{P}_k(h, Z) = \boldsymbol{P}(\eta_k \in Z / \eta_{k-1} = h)$, $h \in \mathbf{H}$, $Z \subset \mathcal{H}$; $x : [0, +\infty) \times \Omega \to \mathbf{R}^m$; $w(t)$ — m-мерный стандартный винеров процесс [23]; процессы ξ, η и w независимы.

Траектории процесса $x(t)$, $t \ge 0$, принадлежат пространству Скорохода $\mathbf{D}$ [12], управление $u(t) := u(t, x(t)) : [0; T] \times \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^m$ — m-мерная функция с класса U допустимых управлений [9]; коэффициенты $a : \mathbf{R}_+ \times \mathbf{Y} \times \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^m$; $b : \mathbf{R}_+ \times \times \mathbf{Y} \times \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^m$ и функция $g : \mathbf{R}_+ \times \mathbf{Y} \times \mathbf{H} \times \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^m$ измеримые по совокупности переменных и по фазовой переменной удовлетворяют условию Липшица.

Рассмотрим последовательность функций $v_k(t, x) : [t_0, T] \times \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^1$, $k \ge 0$, обозначим $V := \{f(t, x) : f \in C^{1,2}(\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^m)\}$. На функциях $v_k(t, x) \in V$ определим слабый инфинитезимальный оператор (СИО) [24]

$$\mathcal{L} v_k(t, x) = \lim_{\Delta \to 0+} \frac{1}{\Delta} \{\mathbf{E}_{t,x} v_k(t + \Delta, x(t + \Delta, t_k, y, h, u)) - v_k(t, x)\}\,, \tag{4}$$

где $x(t, t_k, y, h, u)$ — сильное решение (1) на $t \in [t_k, t_{k+1})$ при управлении $u = u_k \in U$, которое построено на том же промежутке $[t_k, t_{k+1})$, $\mathbf{E}_{t,x}\{f\} = \mathbf{E}\{f / x(t) = x\}$.

Задача оптимального управления состоит в отыскании из множества допустимых управлений U управления u_k^0, $k \ge 0$, такого, которое минимизировало бы функционал качества [9]

$$I(u_k) := I^{u_k}(t, x) := \sum_{k=0}^{\overline{N}} \mathbf{E}_{t_k, x_k} \left\{ F(x(T)) + \int_t^{\mathrm{T}} G(s, x, u(s, x))ds \right\}, \tag{5}$$

где $F(x) \ge 0$; $G(t, x, u) \ge 0$.

В [22] сформулированы условия существования оптимального управления для задачи управления (1)–(3), (5) в виде теоремы.

Теорема 1 (достаточные условия оптимальности). Пусть: 1) существует единственное сильное решение задачи (1)–(3); 2) существуют последовательность функций $v_k \in V$, $k \geq 0$, и управление $u_k^0 \in U$, $k \geq 0$, удовлетворяющие при всех $t \in [t_k, T]$ и всех допустимых управлениях $u_k \in U$, $k \geq 0$, уравнению

$$\mathrm{L} v_k(t, x) + G(t, x, u_k^0(t, x)) = 0 \tag{6}$$

с граничным условием

$$v_k(T, x) = F(x(T)); \tag{7}$$

3) $\forall t \in [0, T]$, $\forall u_k \in U$, $k \geq 0$, справедливо неравенство

$$\mathrm{L} v_k(t, x) + G(t, x, u_k(t, x)) \geq 0,$$

где L — СИО (4) на решениях задачи (1)–(3). Тогда управление $u_k^0(t, x)$ оптимально в понимании критерия качества $I^{u_k^0}(0, x_0)$, т. е. $\forall t \in [t_0, T]$ имеем

$$I^{u_k^0}(t, x) = \inf_{u \in U} I^u(t, x) = v_k(t, x).$$

Последовательность функций $v_k(t, x)$ назовем ценой управления или функцией Беллмана, а уравнение (6) можно записать в виде уравнения Беллмана

$$\inf_{u \in U}[\mathrm{L}(t, x_k, u) v_k(t, x_k) + G(t, x_k, u)] = 0.$$

Далее возникает вопрос о нахождении явного вида для оптимального управления $u_k^0 \in U$, $k \geq 0$, и функций $v_k^0 \in V$, $k \geq 0$.

Общее решение задачи оптимальной стабилизации

Следуя [20, 21], СИО (4) в силу системы (1)–(3) имеет вид

$$\mathrm{L} v_k(t, x) = \frac{\partial v_k(t, x)}{\partial t} + (\nabla v_k(t, x),\ a(t, y, x, h)) + \frac{1}{2} Sp(b^{\mathrm{T}}(t, y, x, u) \cdot \nabla^2 v_k(t, x) \times$$

$$\times b(t, y, x, u)) + \sum_{j \neq i}^{N} \left[\int_{\mathbf{R}^m} v_j(t, x) p_{ij}(t, z / x) dz - v_i(t, x) \right] q_{ij}, \tag{8}$$

где $(\cdot,\cdot)$ — скалярное произведение, $(\nabla v_k) := \left(\frac{\partial v_k}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial v_k}{\partial x_m} \right)^{\mathrm{T}}$, $(\nabla^2 v_k) :=$ $:= [\partial^2 v_k \big/ \partial x_i \partial x_j]_{i,\, j=1}^{m}$, $k \geq 0$; T — знак транспонирования, Sp — след матрицы, $p_{ij}(t, z / x)$ — условная плотность,

$$\mathbf{P}\{x(\tau) \in [z,\ z + dz] / x(\tau - 0) = x\} = p_{ij}(\tau, z / x)\, dz + \mathrm{o}(dz)$$

в предположении, что в момент τ изменения параметра ξ системы (1) происходит случайное скачкообразное изменение фазового вектора $x(\tau - 0) = x$, $x(\tau) = z$ и $y_i \to y_j$.

Первое уравнение для $v_k^0(t,x)$, $k \ge 0$, можно получить, подставив (8) в (6). Тогда искомое уравнение в точках (t_k, y_i, x, h) примет вид

$$\frac{\partial v_k^0(t,x)}{\partial t} + \left(\frac{\partial v_k^0(t,x)}{\partial x}\right)^{\mathrm{T}} a(t, y_i, x, u) + \frac{1}{2} Sp\left(b^{\mathrm{T}}(t, y_i, x, u) \cdot \frac{\partial^2 v_k^0(t,x)}{\partial x^2} \cdot b(t, y_i, x, u)\right) +$$

$$+ \sum_{j \ne i}^{N} \left[\int_{\mathbf{R}^m} v_j^0(t,x) p_{ij}(t, z/x) dz - v_i^0(t,x) \right] q_{ij} + G(t, x, u) = 0 \qquad (9)$$

с граничным условием $v_k^0(T,x) = F(x(T))$.

Второе уравнение для оптимального управления $u_k^0(t,x)$ получим из формулы (9) дифференцированием по переменной u, поскольку $u = u_k^0$, $k \ge 0$, обеспечивает минимум левой части (9):

$$\left[\left(\frac{\partial v_k^0(t,x)}{\partial x}\right)^{\mathrm{T}} \cdot \left(\frac{\partial a(t, y_i, x, u)}{\partial u}\right) + \left(\frac{\partial G(t,x,u)}{\partial u}\right)^{\mathrm{T}} \right]\Bigg|_{u=u_k^0} = 0, \qquad (10)$$

где $\dfrac{\partial a}{\partial u}$ — $m \times m$-матрица Якоби, составлена из элементов $\{\partial a_n / \partial u_s,\ n = \overline{1, m},$ $s = \overline{1, m}\}$, $\left(\dfrac{\partial G}{\partial u}\right) \equiv \left(\dfrac{\partial G}{\partial u_1}, \dots, \dfrac{\partial G}{\partial u_r}\right)$, $k \ge 0$, а нижний индекс при a и u обозначает соответствующую координату элемента m-мерного пространства.

Замечание. Уравнение (10), из которого находят оптимальное управление $u_k^0(t,x) \in \mathbf{R}^m$, $\forall t \in [t_k, t_{k+1})$, $k \ge 0$, по форме совпадает с уравнением, возникающим в детерминированных задачах оптимальной стабилизации [25], и создается впечатление, что случайные изменения структуры системы не учтены. В действительности случайные факторы $\xi(t)$, $t \ge 0$, и η_k, $k \ge 0$, существенно влияют на уравнение (9) и, следовательно, на оптимальные управление $u_k^0(t,x)$, $k \ge 0$, и функции $v_k^0(t,x)$, $k \ge 0$.

Решение системы (9), (10) даже при наличии компьютерной техники и технологий является очень сложным. Поэтому целесообразно рассмотреть упрощенный вид задачи (1)–(3), (4), например линейную систему с квадратичным функционалом качества, чему и посвящены следующие разделы.

Оптимальное управление линейными стохастическими динамическими системами случайной структуры с марковскими переключениями

Рассмотрим задачу оптимального управления линейной стохастической динамической системой случайной структуры, заданной стохастическим дифференциальным уравнением

$$dx(t) = [A(t, \xi(t))x(t) + B(t, \xi(t))u(t)]dt + C(t, \xi(t))x(t)dw(t), \quad t \in \mathbf{R}_+ \setminus K, \qquad (11)$$

с марковскими переключениями

$$\Delta x(t)\big|_{t=t_k} = g(t_k-,\ \xi(t_k-),\ \eta_k,\ x(t_k-)), \qquad (12)$$

и начальными условиями

$$x(0) = x_0 \in \mathbf{R}^m, \ \xi(0) = y \in \mathbf{Y}, \ \eta_0 = h \in \mathbf{H}. \qquad (13)$$

Здесь A, B, C — кусочно-непрерывные и интегрируемые матричные функции.

Задача оптимального управления системой (11)–(13) состоит в отыскании из множества допустимых уравнений U управления u_{ik}^0, $i \in \{1, ... N\}$, $k \ge 0$, такого, которое минимизировало бы функционал

$$I(u_{ik}) := I^{u_{ik}}(t, x) := \sum_{k=0}^{\overline{N}} \mathbf{E}_{t_k, x_k} \{x^{\mathrm{T}}(T) M_0(\xi(t), \eta_k) x(T) +$$

$$+ \int_t^T [u^{\mathrm{T}}(s) M_1(s, \xi(s), \eta_k) u(s) + x^{\mathrm{T}}(s) M_2(s, \xi(s), \eta_k) x(s)] ds\}, \tag{14}$$

где $m \times m$-матрица $M_1(t, \xi(t), \eta_k)$ равномерно положительно определена по $t \in [0, T]$, $m \times m$-матрицы $M_0(\xi(t), \eta_k)$, $M_2(t, \xi(t), \eta_k)$ неотрицательно определены.

Для упрощения записей введем обозначения

$$A_i(t) := A(t, y_i), \ B_i(t) := B(t, y_i), \ C_i(t) := C(t, y_i),$$

$$M_{0ik} := M_0(y_i, \eta_k), \ M_{1ik}(t) := M_1(t, y_i, \eta_k), \ M_{2ik}(t) := M_2(t, y_i, \eta_k).$$

Теорема 2. Оптимальное уравнение для задачи (11)–(14) находится по формуле

$$u_{ik}^0(t, x) = -M_{1ik}^{-1}(t) B_i^{\mathrm{T}}(t) P_{ik}(t) x(t), \tag{15}$$

где неотрицательно определенная $m \times m$-матрица $P_{ik}(t) := P(t, \xi(t), \eta_k)$ входит в функционал Беллмана

$$v_{ik}^0(t, x) = x^{\mathrm{T}}(t) P_{ik}(t) x(t),$$

$$v_{ik}^0(T, x) = x^{\mathrm{T}}(t_k) M_{0ik} x(t_k). \tag{16}$$

Доказательство. Согласно [22] уравнение Беллмана в случае (11)–(13) имеет вид

$$\inf_{u \in U} [\mathrm{L} v_{ik}^0(t, x) + u_{ik}^{\mathrm{T}}(t, x) M_{1ik}(t) u_{ik}(t, x) + x^{\mathrm{T}}(t) M_{2ik}(t) x(t)] = 0, \tag{17}$$

где

$$\mathrm{L} v_{ik}^0(t, x) = \frac{\partial v_{ik}^0(t, x)}{\partial t} + [A_i(t) x(t) + B_i(t) u_{ik}(t, x)]^{\mathrm{T}} \nabla v_{ik}^0(t, x) +$$

$$+ \frac{1}{2} Sp(C_i^{\mathrm{T}}(t) \nabla^2 v_{ik}^0(t, x) C_i(t)) + \sum_{j \ne i}^{N} [v_{jk}^0(t, x) - v_{ik}^0(t, x)] q_{ij} +$$

$$+ \int_{\mathbf{H}} v_{ik}^0(t, x + g(t_k -, \xi(t_k -), \eta_k, x(t_k -))) \mathbf{P}_k(h, Z) - v_{ik}^0(t, x). \tag{18}$$

Подставим (18) в (17):

$$\frac{\partial v_{ik}^0(t, x)}{\partial t} + [A_i(t) x(t) + B_i(t) u_{ik}(t, x)]^{\mathrm{T}} \nabla v_{ik}^0(t, x) +$$

$$+ \frac{1}{2} Sp(C_i^{\mathrm{T}}(t) \nabla^2 v_{ik}^0(t, x) C_i(t)) + \sum_{j \ne i}^{N} [v_{jk}^0(t, x) - v_{ik}^0(t, x)] q_{ij} +$$

$$+ \int_{\mathbf{H}} v_{ik}^0(t, x + g(t_k -, \xi(t_k -), \eta_k, x(t_k -))) \mathbf{P}_k(h, Z) - v_{ik}^0(t, x) +$$

$$+ u_{ik}^{\mathrm{T}}(t, x) M_{1ik}(t) u_{ik}(t, x) + x^{\mathrm{T}}(t) M_{2ik}(t) x(t) = 0. \tag{19}$$

Выражение для оптимального управления найдем путем дифференцирования (19), поскольку $u_{ik}(t, x) = u^0_{ik}(t, x)$ обеспечивает минимум левой части (19):

$$u^0_{ik}(t, x) = -\frac{1}{2} M^{-1}_{1ik}(t)\, B^{\mathrm{T}}_i(t) \nabla v^0_{ik}(t, x)\,,$$

где $\nabla v^0_{ik}(t, x) = 2P_{ik}(t)\,x(t)$. Таким образом, $u^0_{ik}(t, x) = -M^{-1}_{1ik}(t) B^{\mathrm{T}}_i(t) P_{ik}(t)\, x(t)$, что и требовалось доказать.

Построение уравнения Беллмана

Подставив (15) и (16) в (17), получим следующие уравнения для $\forall t \in [t_k, t_{k+1})$:

$$x^{\mathrm{T}}(t) \frac{dP_{ik}(t)}{dt} x(t) + 2[A_i(t)x(t) - B_i(t)M^{-1}_{1ik}(t)B^{\mathrm{T}}_i(t)x(t)]\, P_{ik}(t)x(t) +$$

$$+ Sp(C^{\mathrm{T}}_i(t)P_{ik}(t)\, C_i(t)) + \sum_{j \neq i}^{N} (x^{\mathrm{T}}(t)P_{jk}(t)x(t) - x^{\mathrm{T}}(t)P_{ik}(t)x(t))q_{ij} +$$

$$+ [M^{-1}_{1ik}(t)B^{\mathrm{T}}_i(t)P_{ik}(t)x(t)]^{\mathrm{T}} M_{1ik}(t)M^{-1}_{1ik}(t)B^{\mathrm{T}}_i(t)P_{ik}(t)x(t) + x^{\mathrm{T}}(t)M_{2ik}(t)x(t) = 0\,.$$

Приравняв к нулю квадратичную форму относительно x и выражения, не зависящие от x, учитывая матричное равенство $2x^{\mathrm{T}}P_{ik}A_i x = x^{\mathrm{T}}(P_{ik}A_i + A^{\mathrm{T}}_i P_{ik})x$, получим систему дифференциальных уравнений для нахождения матриц $P_{ik}(t)$, $t \in [t_k, t_{k+1})$, $i \in \{1, \dots N\}$, $k \geq 0$:

$$\frac{dP_{ik}(t)}{dt} + A^{\mathrm{T}}_i(t)P_{ik}(t) + P_{ik}(t)A_i(t) - B_i(t)M^{-1}_{1ik}(t)B^{\mathrm{T}}_i(t)P_{ik}(t) +$$

$$+ \sum_{j \neq i}^{N} (P_{jk}(t) - P_{ik}(t))q_{ij} + [M^{-1}_{1ik}(t)B^{\mathrm{T}}_i(t)P_{ik}(t)]^{\mathrm{T}}\, B^{\mathrm{T}}_i(t)P_{ik}(t) + M_{2ik}(t) = 0\,, \qquad (20)$$

$$Sp(C^{\mathrm{T}}_i(t)P_{ik}(t)C_i(t)) = 0\,, \qquad (21)$$

с граничными условиями

$$P_{ik}(T) = M_{0ik}\,. \qquad (22)$$

Таким образом, имеет место следующая теорема.

Теорема 3. Если цену управления находим в виде (14) для системы (11)–(13), то система дифференциальных уравнений для нахождения матриц $P_{ik}(t)$, $t \in [t_k, t_{k+1})$, $i \in \{1, \dots N\}$, $k \geq 0$, имеет вид (20)–(22).

Далее следует решить вопрос существования решения краевой задачи (20)–(22). Воспользуемся методом итераций Беллмана [8]. Для упрощения рассмотрим интервал $[t_k, t_{k+1})$, на котором $\xi(t) = y_i$, а индексы типа «ik» опустим, введя при u, v и P индекс, обозначающий порядок приближения.

Сначала зададим нулевое приближение

$$u_0(t, x) = -M^{-1}_1(t)B^{\mathrm{T}}(t)P_0(t)x(t)\,, \qquad (23)$$

где матрица $P_0(t) \geq 0$ ограничена и кусочно-непрерывна. Подставим (23) в (10) и для полученного уравнения вычислим значение $v_1(t, x)$, что соответствует управлению (23).

Далее, подставив $v_1(t, x)$ в уравнение Беллмана (17), найдем управление $u_1(t, x)$, при котором в (17) достигается минимум. Продолжая этот процесс, можно построить последовательность управлений $u_n(t, x)$ и функционалов $v_n(t, x)$ вида

$$u_n(t, x) = -M_1^{-1}(t) B^{\mathrm{T}}(t) P_n(t) x(t),$$

$$v_n(t, x) = x^{\mathrm{T}}(t) P_n(t) x(t),$$

$$v_n(T, x) = x^{\mathrm{T}}(t_k) M_0 x(t_k), \tag{24}$$

где $P_n(t),\ t \in [t_k, t_{k+1})$, — решение краевой задачи (20)–(22) при $T := t_{k+1}$.

Для $\forall n \geq 1$ справедлива очевидная оценка

$$v_{n-1}(t, x) \geq v_n(t, x) \geq 0,\ \forall t \in [t_k, t_{k+1}). \tag{25}$$

С помощью (25) можно доказать сходимость функционалов $v_n(t, x)$ к $v^0(t, x)$, сходимость управлений $u_n(t, x)$ к $u^0(t, x)$, сходимость последовательности матриц $P_n(t)$ к $P(t)$ [9]. При этом имеет место оценка

$$\max_{t \in [t_k, t_{k+1})} \| P(t) - P_n(t) \| \leq \frac{C}{n!},\ C < \infty,\ k \geq 1. \tag{26}$$

Можно сформулировать следующее утверждение.

Теорема 4. Приближенное решение задачи синтеза оптимального управления для задачи (11)–(14) осуществляется с помощью метода последовательных приближений Беллмана, при котором n-е приближения управления и функционала Беллмана для каждого интервала $[t_k, t_{k+1})$, $k \geq 0$, находят по формулам (24), причем погрешность оценивается неравенством (26).

Модельный пример

Ограничиваясь для простоты изложения скалярным случаем и двумя состояниями для цепей Маркова ξ и η: $\xi = [1, 2]$, $\eta = [\eta_1, \eta_2]$, зададим для системы (11) следующие исходные данные:

1) $\xi = 1$, $A_1(t) = -3$, $B_1(t) = 1$, $C_1(t) = 0{,}3$;

2) $\xi = 2$, $A_2(t) = -4$, $B_2(t) = 1$, $C_2(t) = 0{,}6$.

Обозначим $Q = \begin{pmatrix} -0{,}5 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & -0{,}5 \end{pmatrix}$ генератор для ξ, $\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}7 \\ 0{,}8 & 0{,}2 \end{pmatrix}$ — матрицу переходных вероятностей для η.

Переключения происходят в моменты времени $t_k = 1, 2, \ldots$ и $g(t_k-, \xi(t_k-), \eta_k, x(t_k-)) = 1,\ k \geq 1$.

Далее M_0, M_1 и M_2, входящие в функционал качества (14), зададим в виде

$$M_{011} = M_{021} = M_{012} = M_{022} = 8,$$

$$M_{111}=0{,}7\,,\ M_{112}=0{,}8\,,\ M_{121}=0{,}9\,,\ M_{122}=0{,}4\,,$$

$$M_{211}=0{,}5\,,\ M_{212}=0{,}4\,,\ M_{221}=1\,,\ M_{222}=0{,}9\,.$$

Функционал Беллмана рассмотрим в виде $v_{ik}^0(t,x)=P_{ik}x^2(t)$, $i,k\in\{1,2\}$.
Система (20) для нахождения P_{ik}, $i,k\in\{1,2\}$, приобретет вид

$$2A_iP_{ik}-B_i^2M_{1ik}^{-1}P_{ik}+\sum_{j\neq i}^{2}(P_{jk}-P_{ik})q_{ij}+M_{1ik}^{-1}B_i^2P_{ik}^2+M_{2ik}=0,\ \ i,k\in\{1,2\}\,.$$

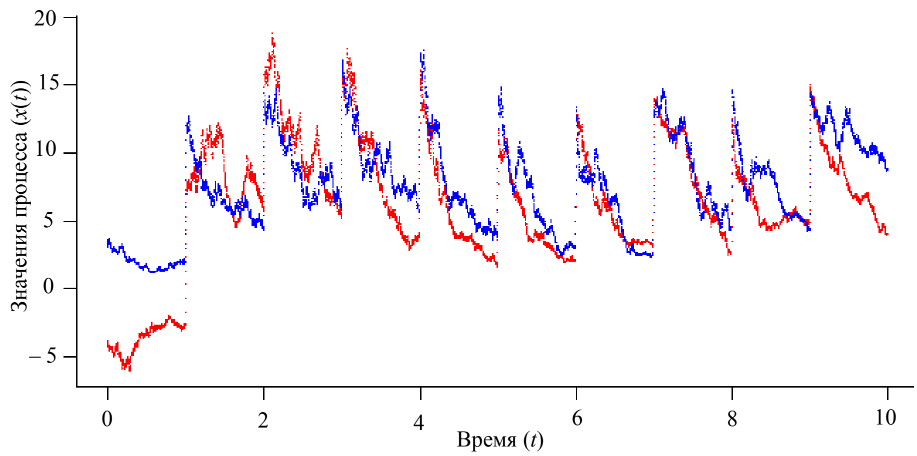
Подставляя конкретные значения A, B, M_0, M_1, M_2, получаем

$$P_{11}=5{,}46\,,\ P_{12}=0{,}32\,,\ P_{21}=0{,}41\,,\ P_{22}=3{,}92\,.$$

Следовательно, оптимальное управление в данном случае имеет вид (см. (15))

$$u^0(t,x)=\begin{cases}-3{,}822x(t), & \xi=1,\ \eta=\eta_1,\\ -0{,}256x(t), & \xi=1,\ \eta=\eta_2,\\ -0{,}369x(t), & \xi=2,\ \eta=\eta_1,\\ -1{,}568x(t), & \xi=2,\ \eta=\eta_2.\end{cases}$$

На рисунке изображены реализации траекторий решений системы (11)–(14), находящиеся под влиянием найденного управления, которые стартуют из точек $x_0^{(1)}=-4$ и $x_0^{(2)}=3$.



Заключение

В данной работе решена проблема синтеза оптимального управления стохастических динамических систем случайной структуры, пребывающих под влиянием импульсных переключений типа цепи Маркова. В линейном случае получен алгоритм нахождения оптимального управления и обоснована его сходимость.

 ISSN 0572-2691

А. Дас, Т.О. Лукашів, І.В. Малик

СИНТЕЗ ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ СТОХАСТИЧНИМИ ДИНАМІЧНИМИ СИСТЕМАМИ ВИПАДКОВОЇ СТРУКТУРИ З МАРКОВСЬКИМИ ПЕРЕМИКАННЯМИ

Вирішено проблему синтезу оптимального керування для стохастичної динамічної системи випадкової структури з марковськими перемиканнями. Для визначення відповідних функцій для побудови функціонала Беллмана й оптимального керування виписано систему диференціальних рівнянь, для якої обгрунтовано існування єдиного розв’язку.

A. Das, T.O. Lukashiv, I.V. Malyk

SYNTHESIS OF OPTIMAL CONTROL OF STOCHASTIC DYNAMICAL SYSTEMS OF RANDOM STRUCTURE WITH MARKOV SWITCHINGS

The problem of synthesis of optimal control for stochastic dynamical system of random structure with Markov switching is solved. For defining the corresponding functions for Bellman’s functional construction and optimal control the system of differential equations is given. The existing and uniqueness of this system solution is proved.

1. *Красовский Н.Н., Летов А.М.* К теории аналитического конструирования регуляторов // Автоматика и телемеханика. — 1962. — № 6. — С. 11–18.
2. *Красовский Н.Н., Лидский Э.А.* Аналитическое конструирование регуляторов в системах со случайными свойствами // Там же. — 1961. — **22**, № 9. — С. 1145–1150; № 10. — С. 1273–1278; № 11. — С. 1425–1431.
3. *Колмановский В.Б., Носов В.Р.* Устойчивость и периодические режимы регулируемых систем с последействием. — М. : Наука, 1981. — 448 с.
4. *Самойленко А.М., Перестюк Н.А.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. — Киев : Вища школа, 1987. — 287 с.
5. *Свердан М.Л., Царьков Е.Ф.* Устойчивость стохастических импульсных систем. — Рига : Рижский технический университет, 1994. — 300 с.
6. *Кунцевич В.М., Чеховой Ю.Н.* Нелинейные системы управления с частотно- и широтноимпульсной модуляцией. — Киев: Техніка, 1970. — 340 с.
7. *Гихман И.И., Скороход А.В.* Управляемые случайные процессы. — Киев : Наук. думка, 1977. — 252 с.
8. *Беллман Р.* Динамическое программирование. — М.: Изд-во иностр. лит., 1960. — 324 с.
9. *Андреева Е.А., Колмановский В.Б., Шайхет Л.Е.* Управление системами с последействием. — М. : Наука, 1992. — 336 с.
10. *Lukashiv T.O., Yasinskaya L.I., Yasinskiy V.K.* Synthesis of the optimal control for linear stochastic dynamical systems with finite aftereffect and Poisson disturbances // Journal of Automation and Information Sciences. — 2008. — **40**, N 10. — P. 22–37.
11. *Korolyuk V.S., Limnios W.* Stochastic systems in merging phase space. — London: World Scientific, 2006. — 331 p.
12. *Скороход А.В.* Асимптотические методы в теории стохастических дифференциальных уравнений. — Киев : Наук. думка, 1987. — 328 с.

13. *Хасьминский Р.З.* Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров. — М.: Наука, 1969. — 369 с.
14. *Кац И.Я.* Метод функций Ляпунова в задачах устойчивости и стабилизации систем случайной структуры. — Екатеринбург : Изд-во Уральской госакадемии путей сообщения, 1998. — 222 с.
15. *Казаков Н.Е., Артемьев В.М.* Оптимизация динамических систем случайной структуры. — М.: Наука, 1980. — 382 с.
16. *Артемьев В.М.* Теория динамических систем со случайными изменениями структуры. — Минск: Вышэйшая школа, 1979. — 246 с.
17. *Shaikhet L.* Lyapunov functionals and stability of stochastic difference equations. — New York : Springer, 2011. — 384 p.
18. *Lukashiv T.O., Yurchenko I.V., Yasinskii V.K.* Lyapunov function method for investigation of stability of stochastic Ito random-structure systems with impulse Markov switchings. I. General theorems on the stability of stochastic impulse systems // Cybernetics and Systems Analysis. — 2009. — **45**, N 2. — P. 281–290.
19. *Lukashiv T.O., Yurchenko I.V., Yasinskii V.K.* Lyapunov function method for investigation of stability of stochastic Ito random-structure systems with impulse Markov switchings. II. First-approximation stability of stochastic impulse systems with Markov parameters // Ibid. — 2009. — **45**, N 3. — P. 464–476.
20. *Lukashiv T.O., Yasinskiy V.K., Yasinskiy E.V.* Stabilization of stochastic diffusive dynamical systems with impulse Markov switchings and parameters. Part I. Stability of impulse stochastic systems with Markov parameters // Journal of Automation and Information Sciences. — 2009. — **41**, N 2. — P. 1–24.
21. *Lukashiv T.O., Yasinskaya L.I., Yasinskiy V.K.* Stabilization of stochastic diffusive dynamical systems with impulse Markov switchings and parameters. Part II. Stabilization of dynamical systems of random structure with external Markov switchings // Ibid. — 2009. — **41**, N 4. — P. 26–42.
22. *Lukashiv T.O., Malyk I.V.* Sufficient optimality conditions of stochastic dynamical systems of random structure with Markov switchings // Ibid. — 2016. — **48**, N 6. — P. 60–67.
23. *Дуб Дж.* Вероятностные процессы. — М.: Физматгиз, 1963. — 605 с.
24. *Дынкин Е.Б.* Марковские процессы. — М.: Физматгиз, 1969. — 859 с.
25. *Красовский Н.Н.* Проблемы стабилизации управляемых движений. Дополнение к книге Малкина Н.Г. Теория устойчивости движения. — М.: Наука, 1966. — 530 с.

Получено 09.12.2016

Статья представлена к публикации членом редколлегии чл.-корр. НАН Украины А.А. Чикрием.