

УДК 681.5.013

Е.Е. Александров, Т.Е. Александрова

**МЕТОД ГЛАВНОЙ КООРДИНАТЫ
В ТЕОРИИ ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО СИНТЕЗА
ЛИНЕЙНЫХ СТАБИЛИЗИРУЕМЫХ СИСТЕМ**

Введение

Понятие «главная координата» по отношению к стабилизируемому объекту введено в работе [1], оно подразумевает одну из обобщенных координат математической модели объекта стабилизации, которая в наибольшей степени характеризует поведение стабилизируемого объекта в его возмущенном движении. Изменение главной координаты в стабилизируемом процессе главным образом определяет комплекс требований к стабилизируемому процессу. Для большинства стабилизируемых объектов, в частности военного назначения (танковых и корабельных орудий, самолетов, ракет различного класса), главной координатой обычно является угол отклонения одной из собственных осей стабилизируемого объекта от заданного направления, а точность стабилизации объекта количественно оценивается интегральным квадратичным функционалом, подынтегральная функция которого представляет собой квадратичную форму главной обобщенной координаты и соответствующей ей обобщенной скорости. При этом значение функционала качества равно значению функции Ляпунова замкнутой системы стабилизации в начальный момент $t = 0$ стабилизируемого процесса $X(t)$, и это значение зависит как от компонент вектора варьируемых параметров стабилизатора $\alpha \in G_\alpha$, так и от значений компонент вектора состояния $X(t)$ в момент $t = 0$ [2, 3]. При решении задачи параметрического синтеза естественно «для получения того или иного гарантированного результата приписать природе ... стремления максимизировать тот критерий, который конструктор системы управления стремится минимизировать. Необходимо признать, что при таком подходе к проектированию системы управления ее создатель ориентируется на самый неблагоприятный случай» [4]. Именно поэтому предложенный в работах [2, 3] метод решения задачи параметрического синтеза стабилизаторов динамических объектов сводится к поиску минимакса функции Ляпунова замкнутой системы стабилизации, а точнее, к поиску минимума функции по компонентам вектора варьируемых параметров стабилизатора $\alpha \in G_\alpha$ и максимума по компонентам вектора состояния объекта стабилизации $X(0) \in G_X$ в момент времени $t = 0$. В качестве множества допустимых значений G_α вектора α естественно принять область устойчивости замкнутой системы стабилизации в k -мерном пространстве компонент вектора

$$\alpha = [\alpha_1 \ \alpha_2 \ \dots \ \alpha_k]^T.$$

Что касается множества допустимых значений G_X вектора

$$X(0) = [x_1(0) \ x_2(0) \ \dots \ x_n(0)]^T,$$

то формирование этого множества сопряжено с определенными трудностями. Действительно, текущие значения компонент вектора состояния стабилизируемого объекта связаны уравнениями математической модели возмущенного движения замкнутой системы стабилизации, а минимум функции Ляпунова замкнутой системы по $X(0) \in G_X$ обычно не является единственным и глобальным. Поиск минимакса функции Ляпунова в этих условиях является весьма непростой задачей. Цель настоящей статьи — использование понятия главной координаты стабилизируемого объекта для упрощения решения задачи параметрического синтеза стабилизатора.

Параметрический синтез линейного стабилизатора

Предположим, что возмущенное движение замкнутой системы стабилизации описывается линейным векторно-матричным уравнением

$$\dot{X}(t) = A(\alpha)X(t), \quad \alpha \in G_\alpha, \quad (1)$$

где $X(t)$ — n -мерный вектор состояния; α — k -мерный вектор варьируемых параметров стабилизатора. Тогда задача параметрического синтеза стабилизатора состоит в отыскании вектора $\alpha \in G_\alpha$, доставляющего на решениях системы (1) минимум интегральному квадратичному функционалу

$$J(\alpha) = \int_0^{\tau} \langle X(t, \alpha), QX(t, \alpha) \rangle dt, \quad (2)$$

где Q — симметрическая сильвестрова матрица.

В работе [1] показано, что сформулированная задача параметрического синтеза имеет единственное решение на множестве G_α , представляющем собой область устойчивости системы (1) в k -мерном пространстве варьируемых параметров стабилизатора, иными словами, функционал (2), вычисленный на решениях системы (1), на множестве G_α имеет единственный минимум.

В [2, 3] значение функционала (2) составляет

$$J[X(0), \alpha] = \langle X(0), K(\alpha)X(0) \rangle, \quad (3)$$

где квадратная симметрическая матрица $K(\alpha)$ при больших значениях верхнего предела интегрирования функционала (2) является решением линейного матричного алгебраического уравнения

$$K(\alpha)A(\alpha) + A^T(\alpha)K(\alpha) + Q = 0. \quad (4)$$

Решение сформулированной выше задачи параметрического синтеза стабилизатора сводится к поиску минимакса квадратичной формы (3)

$$J[X^*(0), \alpha^*] = \min_{\alpha \in G_\alpha} \max_{X(0) \in G_X} \langle X(0), K(\alpha)X(0) \rangle. \quad (5)$$

Без ограничения общности предположим, что главной координатой, характеризующей поведение замкнутой системы стабилизации (1), является координата $x_1(t)$. Обычно при исследовании стабилизируемых процессов задают следующие начальные условия системы (1): $x_1(0) = x_{10}$; $x_2(0) = x_3(0) = \dots = x_n(0) = 0$, т.е. нулевое

начальное условие имеет место только по главной координате. Тогда квадратичная форма (3) принимает следующий вид:

$$J[x_1(0), \alpha] = k_{11}(\alpha)x_{10}^2. \quad (6)$$

В связи с тем, что оптимальное значение аргумента, доставляющее минимум некоторой функции, не зависит от постоянного множителя в соотношении, описывающем функцию, соотношение (6) может быть представлено в виде

$$J(\alpha) = k_{11}(\alpha), \quad (7)$$

где $k_{11}(\alpha)$ — первый главный диагональный элемент матрицы $K(\alpha)$, а задача поиска минимакса квадратичной формы (3) в рассматриваемом случае заменяется задачей поиска минимума функции (7)

$$J(\alpha^*) = \min_{\alpha \in G_\alpha} k_{11}(\alpha), \quad (8)$$

что значительно упрощает решение задачи параметрического синтеза.

В качестве примера рассмотрим замкнутую систему наведения и стабилизации танковой пушки, возмущенное движение которой описывается системой линейных дифференциальных уравнений [5]:

$$\ddot{\phi}(t) = -\frac{k_m k_d}{J_g} \beta(t), \quad (9)$$

$$\ddot{\beta}(t) = -\frac{1}{T_1^2} \beta(t) - \frac{T_2}{T_1^2} \dot{\beta}(t) + \frac{k_e k_y}{c T_1^2} k_\phi \varphi(t) + \frac{k_e k_y}{c T_1^2} k_c k_\phi \dot{\phi}(t). \quad (10)$$

Здесь $\varphi(t)$ — угол поворота оси канала ствола танковой пушки относительно линии прицеливания; $\beta(t)$ — угол поворота коромысла электрогидравлического усилителя, являющегося исполнительным органом стабилизатора в канале вертикального наведения танковой пушки, относительно нейтрального положения; T_1, T_2 — постоянные времена электрогидравлического усилителя; J_g — момент инерции танковой пушки относительно оси цапф; c — коэффициент жесткости фиксирующей пружины коромысла; k_m, k_d, k_e, k_y, k_c — коэффициенты пропорциональности; $k_\phi, k_\dot{\phi}$ — варьируемые параметры стабилизатора, подлежащие выбору.

Производя замену переменных $x_1(t) = \varphi(t)$; $x_2(t) = \dot{\phi}(t)$; $x_3(t) = \beta(t)$; $x_4(t) = \dot{\beta}(t)$, систему (9), (10) и функционал (2) запишем так:

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t);$$

$$\dot{x}_2(t) = -\frac{k_m k_d}{J_g} x_3(t);$$

$$\dot{x}_3(t) = x_4(t); \quad (11)$$

$$\dot{x}_4(t) = \frac{k_e k_y}{c T_1^2} k_\phi x_1(t) + \frac{k_e k_y}{c T_1^2} k_c k_\phi x_2(t) - \frac{1}{T_1^2} x_3(t) - \frac{T_2}{T_1^2} x_4(t);$$

$$J(k_\phi, k_\dot{\phi}) = \int_0^\tau x_1^2(t) dt. \quad (12)$$

Собственная матрица системы (11) равна:

$$A(k_\varphi, k_{\dot{\varphi}}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{k_m k_d}{I_g} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k_e k_y}{c T_1^2} k_\varphi & \frac{k_e k_y}{c T_1^2} k_c k_{\dot{\varphi}} & -\frac{1}{T_1^2} & -\frac{T_2}{T_1^2} \end{bmatrix}, \quad (13)$$

а матрица квадратичной формы подынтегральной функции функционала (12)

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (14)$$

Рассмотрим характеристическое уравнение замкнутой системы (11)

$$\det[A(k_\varphi, k_{\dot{\varphi}}) - Es] = \det \begin{bmatrix} -s & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -s & -\frac{k_m k_d}{I_g} & 0 \\ 0 & 0 & -s & 1 \\ \frac{k_e k_y}{c T_1^2} k_\varphi & \frac{k_e k_y}{c T_1^2} k_c k_{\dot{\varphi}} & -\frac{1}{T_1^2} & -\frac{T_2}{T_1^2} - s \end{bmatrix} = 0$$

или

$$\det(A - Es) = s^4 + \frac{T_2}{T_1^2} s^3 + \frac{1}{T_1^2} s^2 + \frac{k_m k_d k_e k_y}{c I_g T_1^2} k_c k_{\dot{\varphi}} s + \frac{k_m k_d k_e k_y}{c I_g T_1^2} k_\varphi = 0. \quad (15)$$

Значения параметров танковой пушки с электрогидравлическим исполнительным органом составляют $I_g = 736,9 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^2$; $T_1 = 10^{-2} \text{ с}$; $T_2 = 0,0005 \text{ с}$; $c = 100 \text{ Нм}$; $k_c = 0,2 \text{ с}^2$; $k_m = 0,0006 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{Па}^{-1}$; $k_d = 1,228 \cdot 10^7 \text{ Па}$; $k_e = 10^3 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{А}^{-1}$; $k_y = 0,01 \text{ Ом}^{-1}$.

Тогда характеристическое уравнение (15) запишем:

$$s^4 + 5s^3 + 10^4 s^2 + 0,2 \cdot 10^4 k_{\dot{\varphi}} s + 10^4 k_\varphi = 0. \quad (16)$$

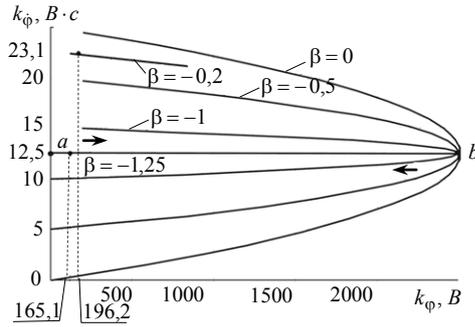
В плоскости варьируемых параметров стабилизатора ($k_\varphi, k_{\dot{\varphi}}$) построим линии равной степени устойчивости [6], для этого в (16) произведем замену $s = \beta + j\omega$, выделим в полученном уравнении действительную и мнимую части, приравняем их к нулю и из полученных уравнений выделим коэффициенты k_φ и $k_{\dot{\varphi}}$:

$$\begin{aligned} k_\varphi &= 3 \cdot 10^{-4} \beta^4 + 2 \cdot 10^{-4} \beta^2 \omega^2 - 10^{-4} \omega^4 + 10^{-3} \beta^3 + 10^{-3} \beta \omega^2 + \omega^2 + \beta^2; \\ k_{\dot{\varphi}} &= -2 \cdot 10^{-3} \beta^3 + 2 \cdot 10^{-3} \beta \omega^2 - 7,5 \cdot 10^{-3} \beta^2 + 2,5 \cdot 10^{-3} \omega^2 - 10\beta. \end{aligned} \quad (17)$$

В плоскости варьируемых параметров ($k_\varphi, k_{\dot{\varphi}}$) с помощью соотношений (17) построим кривые при изменении ω от нуля до бесконечности для различных отрицательных значений β . При $\beta = 0$ построенная кривая представляет собой область устойчивости замкнутой системы стабилизации, а при $\beta_k < 0$ ($k = 1, 2, \dots$) —

линию равной степени устойчивости. При нахождении точки $(k_\varphi, k_\dot{\varphi})$ на этой кривой запас устойчивости системы составляет $\beta = \beta_k$ (рис. 1).

При $\beta_s = -1,25$ кривые равной степени устойчивости стягиваются в отрезок прямой, параллельной оси абсцисс, ограниченный точками $a = 1,5613$ и $b = 2496,87$. Если значения варьируемых параметров k_φ и $k_\dot{\varphi}$ выбраны на отрезке (a, b) , то замкнутая система стабилизации имеет постоянный максимальный запас устойчивости. Всюду на отрезке (a, b) значение параметра $k_\dot{\varphi}$



постоянно и равно $k_\dot{\varphi}^* = 12,5 B \cdot c$.

Рис. 1

В системе (11) главной координатой является переменная $x_1(t)$, поэтому в качестве начальных условий выберем $x_1(0) = x_{10}$; $x_2(0) = x_3(0) = x_4(0) = 0$. Действительно, в момент $t = 0$ танковая пушка отклонена от направления на цель на угол x_{10} , а стабилизатор отключен, следовательно, $x_2(0) = x_3(0) = x_4(0) = 0$. После выбора цели в момент $t = 0$ стабилизатор включается и происходит наводка оси канала ствола на цель. При выбранных начальных условиях значение функционала (12) определяется формулой (8), где вектор варьируемых параметров α равен

$$\alpha = [k_\varphi \quad k_\dot{\varphi}]^T.$$

Квадратную симметричную матрицу $K(k_\varphi, k_\dot{\varphi})$ отыщем в виде

$$K(k_\varphi, k_\dot{\varphi}) = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{12} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ k_{13} & k_{23} & k_{33} & k_{34} \\ k_{14} & k_{24} & k_{34} & k_{44} \end{bmatrix}. \quad (18)$$

Подставим матрицы (13), (14) и (18) в матричное уравнение (4), которое эквивалентно системе алгебраических уравнений относительно неизвестных элементов матрицы (18):

$$\begin{aligned} 2 \cdot 10^3 k_\varphi k_{14} + 1 &= 0; \\ k_{11} + 0,2 \cdot 10^3 k_\dot{\varphi} k_{14} + 10^3 k_\varphi k_{24} &= 0; \\ -10k_{12} - 10^4 k_{14} + 10^3 k_\varphi k_{34} &= 0; \\ k_{13} - 5k_{14} + 10^3 k_\varphi k_{44} &= 0; \\ k_{12} + 0,2 \cdot 10^3 k_\dot{\varphi} k_{24} &= 0; \\ -10k_{22} - 10^4 k_{24} + k_{13} + 0,2 \cdot 10^3 k_\dot{\varphi} k_{34} &= 0; \\ k_{23} - 5k_{24} + k_{14} + 0,2 \cdot 10^3 k_\dot{\varphi} k_{44} &= 0; \\ -10k_{23} - 10^4 k_{34} &= 0; \\ k_{33} - 5k_{34} - 10k_{24} - 10^4 k_{44} &= 0; \\ k_{34} - 5k_{44} &= 0. \end{aligned} \quad (19)$$

Из системы (19) получим

$$k_{11}(k_\varphi, k_{\dot{\varphi}}) = 0,1 \frac{k_{\dot{\varphi}}}{k_\varphi} + \frac{0,25k_\varphi + 0,1 \cdot 10^3 k_{\dot{\varphi}} - 25 \cdot 10^3}{2,5k_\varphi + 40k_{\dot{\varphi}}^2 - 10^3 k_{\dot{\varphi}}}. \quad (20)$$

При $k_\varphi = 0$ функция (20) обращается в бесконечность за счет первого слагаемого. Второе слагаемое функции (20) устремляется в бесконечность при обращении в нуль его знаменателя, т.е. при выполнении условия

$$2,5k_\varphi + 40k_{\dot{\varphi}}^2 - 10^3 k_{\dot{\varphi}} = 0. \quad (21)$$

Отыщем решение квадратного уравнения (21)

$$k_{\dot{\varphi}} = 12,5 \pm \sqrt{12,5^2 - 0,0625k_\varphi}. \quad (22)$$

Легко заметить, что функция (22) описывает часть границы области устойчивости при $k_\varphi > 0$. При возрастании k_φ от нуля до 2500 в (22) имеет место минус, а при уменьшении k_φ от 2500 до нуля в (22) — плюс. Таким образом, всюду на границе области устойчивости, представленной на рис. 1, функция (20) обращается в бесконечность.

В работе [1] показано, что квадратичная форма (3), матрица которой удовлетворяет уравнению (4), имеет в области G_α системы (1) единственный минимум, являющийся глобальным. Тогда вполне естественно утверждение, что функция (20) имеет вогнутую чашеобразную форму с единственной экстремальной точкой, расположенной внутри области устойчивости, и краями, уходящими в бесконечность на границе области устойчивости.

Рассмотрим характеристическое уравнение системы (1)

$$\det(A(\alpha) - Es) = 0. \quad (23)$$

Выберем из корней характеристического уравнения (23) корень с максимальной вещественной частью

$$\max_j \operatorname{Re} s_j = \beta(\alpha) < 0; \quad (j = \overline{1, n}).$$

Тогда норма вектора состояния системы (1) удовлетворяет оценке [7, 8]

$$\|X(t, \alpha)\| \leq X(0)e^{\beta(\alpha)t}. \quad (24)$$

Пусть $X(0) = [x_{10} \ 0 \ \dots \ 0]^T$. Тогда соотношение (24) принимает вид $\|X(t, \alpha)\| \leq |x_{10}|e^{\beta(\alpha)t}$.

Вектор варьируемых параметров $\alpha \in G_\alpha$ представим в блочном виде

$$\alpha = [\alpha_1; \alpha_2]^T; \quad \alpha_1 \in G_\alpha; \quad \alpha_2 \in G_\alpha,$$

где α_1 — m -мерный вектор варьируемых параметров, определяющих запас устойчивости системы (1); α_2 — $(k-m)$ -мерный вектор варьируемых параметров, не оказывающих влияния на величину запаса устойчивости системы (1).

Путем выбора компонент m -мерного вектора $\alpha_1 = \alpha_1^* \in G_\alpha$ на множестве G_α построим подмножество $\bar{G}_\alpha \in G_\alpha$, на котором обеспечивается максимальный запас устойчивости системы (1). В рассматриваемом примере таким подмножеством является отрезок (a, b) в области устойчивости системы (11). Выбор рабочей точки системы на подмножестве \bar{G}_α обеспечивает максимальный запас устойчивости системы (1), равный β^* .

Норма вектора состояния при этом убывает в соответствии с законом

$$\|X(t, \alpha)\| \leq |x_{10}| e^{\beta^* t}. \quad (25)$$

Из соотношения (25) можно заключить, что максимальный запас устойчивости β^* системы (1) обеспечивает и ее максимальное быстродействие, под которым понимают время τ затухания процесса (25), т.е. условие

$$\|X(t, \alpha)\| \leq \varepsilon \text{ при } t \geq \tau,$$

где ε — требуемая точность стабилизируемого процесса.

На подмножестве $\bar{G}_\alpha \in G_\alpha$ варьируемые компоненты вектора $\alpha_2 \in \bar{G}_\alpha$ выбираются из условия минимума функции $k_{11}(\alpha_1^*, \alpha_2)$.

Выше было показано, что при $k_\phi^* = 12,5 \text{ В} \cdot \text{с}$ замкнутая система (11) имеет постоянный максимальный запас устойчивости $\beta^* = -1,25$ и максимальное быстродействие.

Положим в соотношении (20) $k_\phi = k_\phi^* = 12,5 \text{ В} \cdot \text{с}$. В результате получим

$$k_{11}(k_\phi) = \frac{12,5}{k_\phi} + \frac{0,25k_\phi - 12,5 \cdot 10^3}{2,5k_\phi - 6,25 \cdot 10^3}. \quad (26)$$

Из условия минимума функции (26) $\frac{\partial k_{11}(k_\phi)}{\partial k_\phi} = 0$ находим оптимальное значение

варируемого параметра $k_\phi^* = 165,085 \text{ В}$, обеспечивающего наивысшую точность стабилизации системы (11) при ее максимальном запасе устойчивости и быстродействии. Значение функции (20) при $k_\phi = k_\phi^* = 165,085 \text{ В}$ и $k_\phi = k_\phi^* = 12,5 \text{ В} \cdot \text{с}$ составляет $k_{11}(k_\phi^*, k_\phi^*) = 0,21464$.

Отбросим требования запаса устойчивости и быстродействия, предъявляемые к замкнутой системе (11) и оставим лишь требование точности стабилизируемого процесса, состоящее в отыскании значений варьируемых параметров k_ϕ и k_ϕ , доставляющих минимальное значение функции (20) в области устойчивости замкнутой системы. Используя процедуру Optimization Toolbox программного продукта MathLAB, отыщем точку минимума функции (20) в указанной области (рис. 2). Из рисунка определяем координаты точки минимума функции (20): $k_\phi^{**} = 196,2 \text{ В}$; $k_\phi^{**} = 23,1 \text{ В} \cdot \text{с}$. Значение функции (20) в точке минимума составляет $k_{11}(k_\phi^{**}, k_\phi^{**}) = 0,12181$.

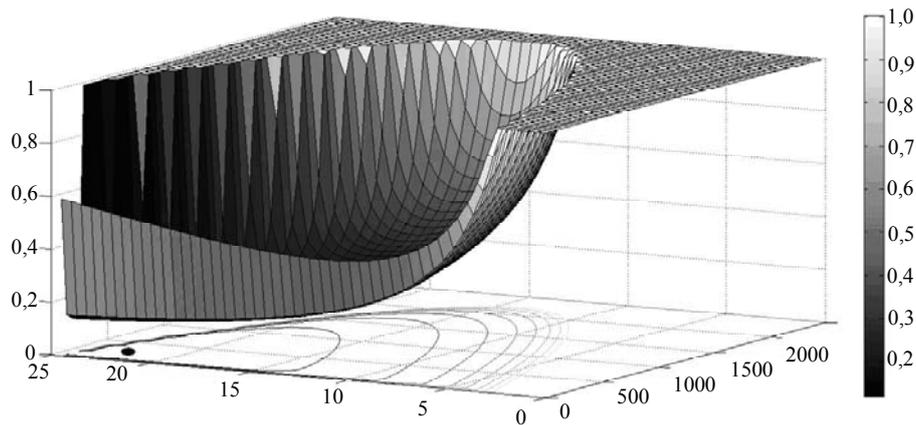


Рис. 2

Из сравнения значений функции (20) в точках $(k_{\varphi}^*, k_{\dot{\varphi}}^*)$ и $(k_{\varphi}^{**}, k_{\dot{\varphi}}^{**})$ приходим к выводу, что точность стабилизации в точке $(k_{\varphi}^{**}, k_{\dot{\varphi}}^{**})$ значительно выше, чем в точке $(k_{\varphi}^*, k_{\dot{\varphi}}^*)$. Вместе с тем близость этой точки к границе области устойчивости делает выбор ее совершенно неприемлемым для отыскания варьируемых параметров стабилизатора вследствие низких значений показателей запаса устойчивости и быстродействия соответствующего стабилизируемого процесса.

Из рис. 1 следует, что через точку $(k_{\varphi}^{**}, k_{\dot{\varphi}}^{**})$ проходит линия равной степени устойчивости, соответствующая запасу устойчивости $\beta^{**} = -0,2$, в то время как в точке $(k_{\varphi}^*, k_{\dot{\varphi}}^*)$ запас устойчивости составляет $\beta^* = -1,25$, т.е. более, чем в шесть раз выше по сравнению с точкой минимума функции (20). Таким образом, между требованиями максимальных значений запаса устойчивости и быстродействия замкнутой системы стабилизации, с одной стороны, и требованием максимальной точности, с другой, существует противоречие, которое предлагается разрешить выбором значений варьируемых параметров стабилизатора, обеспечивающих максимальную точность замкнутой системы стабилизации при максимальных показателях запаса устойчивости и быстродействия.

Параметрический синтез линейного стохастического стабилизатора

Обычно любой технический объект находится под воздействием внешних возмущений и возмущенное движение замкнутой системы стабилизации записывается в виде

$$\dot{X}(t) = A(\alpha)X(t) + F(t).$$

В дальнейшем будем предполагать, что каждая из компонент вектора внешних возмущений

$$F(t) = [f_1(t) \ f_2(t) \ \dots \ f_n(t)]^T$$

представляет собой белый шум. Если это не так и каждая из компонент $f_i(t)$, $i = \overline{1, n}$, — произвольный гауссов случайный процесс (цветной шум), то задача параметрического синтеза стабилизатора в этом случае сводится к задаче синтеза при воздействии на систему векторного белого шума путем расширения пространства состояний замкнутой системы за счет введения дополнительных формирующих динамических звеньев, преобразующих векторный белый шум в векторный цветной шум [3].

В работе [2] показано, что решение задачи параметрического синтеза линейного непрерывного стохастического стабилизатора сводится к поиску минимума функции

$$J(\alpha) = \langle X(0), K(\alpha)X(0) \rangle + \tau Sp\{Q_f K(\alpha)\}, \quad (27)$$

где Q_f — матрица интенсивности векторного белого шума $F(t)$; $K(\alpha)$ — квадратная симметрическая матрица, удовлетворяющая уравнению (4).

Рассмотрение математических моделей возмущенного движения замкнутых систем стабилизации различных технических объектов [9–11] показывает, что в каждом из каналов стабилизации математическая модель представляет собой систему дифференциальных уравнений, первое из которых, как правило, составлено относительно главной обобщенной координаты, имеет второй порядок и представляет собой условие динамического равновесия стабилизируемого объекта, на который воздействуют управляющие и возмущающие обобщенные силы и моменты. Преобразование математической модели к нормальной форме Коши определяет место внешнего возмущения в правой части второго уравнения преобразованной модели. Если первые два уравнения первого порядка определяют изменение главной обобщенной координаты и ее скорости, то остальные уравнения преобразованной модели обычно описывают динамику элементов стабилизатора. Так, математическая модель замкнутой системы наведения и стабилизации танковой пушки, свободное движение которой описывается дифференциальными уравнениями (11), при наличии внешнего возмущающего момента принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) &= -\frac{k_m k_d}{J_g} x_3(t) + \frac{1}{J_g} M_b(t), \\ \dot{x}_3(t) &= x_4(t), \\ \dot{x}_4(t) &= \frac{k_e k_y}{c T_1^2} k_\phi x_1(t) + \frac{k_e k_y}{c T_1^2} k_c k_\phi x_2(t) - \frac{1}{T_1^2} x_3(t) - \frac{T_2}{T_1^2} x_4(t). \end{aligned} \quad (28)$$

Тогда вектор $F(t)$ и матрица Q_f записываются

$$F(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{J_g} M_b(t) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad Q_f = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q_f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

В соответствии с методом главной координаты функционал (27) принимает следующий вид:

$$J(k_\phi, k_\dot{\phi}) = k_{11}(k_\phi, k_\dot{\phi}) x_1^2(0) + \tau q_f k_{22}(k_\phi, k_\dot{\phi}). \quad (29)$$

Для сравнительной оценки функционалов (7) и (29) представим соотношение (29) в виде

$$J(k_\phi, k_\dot{\phi}) = k_{11}(k_\phi, k_\dot{\phi}) + \frac{\tau q_f}{x_1^2(0)} k_{22}(k_\phi, k_\dot{\phi}). \quad (30)$$

Не нарушая общности, положим $\tau = 1$ с; $x_1(0) = 0,5$ рад. Внешнее возмущающее воздействие, определяемое первым тоном упругих колебаний ствола, в соответствии с [5] примем равным $q_f = 250$ Н·м.

В уравнениях (19) положим значение коэффициента $k_{\phi} = k_{\phi}^* = 12,5$ В·с, при котором замкнутая система достигает максимального запаса устойчивости и быстродействия. Первый диагональный элемент матрицы (18) определяется зависимостью (26), а второй равен

$$k_{22}(k_{\phi}) = \frac{0,374k_{\phi} - 12,5 \cdot 10^3}{k_{\phi}(2,5k_{\phi} - 6,25 \cdot 10^3)}. \quad (31)$$

Подставим соотношения (20) и (31) в формулу (30):

$$J(k_{\phi}) = k_{11}(k_{\phi}, k_{\phi}^*) + 10^3 k_{22}(k_{\phi}, k_{\phi}^*) = \frac{0,25k_{\phi}^2 - 0,873 \cdot 10^3 k_{\phi} - 1,2578 \cdot 10^6}{k_{\phi}(2,5k_{\phi} - 6,25 \cdot 10^3)}. \quad (32)$$

Дифференцируя правую часть (32) по k_{ϕ} и приравнявая результат дифференцирования к нулю, получаем квадратное уравнение

$$k_{\phi} + 10,13 \cdot 10^6 k_{\phi} - 12,68 \cdot 10^9 = 0,$$

решение которого определяет значение параметра $k_{\phi} = k_{\phi}^*$, доставляющее минимум функционалу (32) и равное $k_{\phi}^* = 834,6$ В. Значение функции (32) в точке минимума составляет $J(k_{\phi}^*) = 0,52154$.

Заключение

С использованием понятия главной координаты стабилизируемого процесса разработана методика решения задачи параметрического синтеза стабилизатора линейного динамического объекта, позволяющая свести поиск минимакса функции Ляпунова замкнутой системы к поиску минимума простейшей квадратичной формы, содержащей один или два элемента матрицы, являющейся решением линейного алгебраического уравнения Ляпунова. Такой подход позволил значительно упростить процедуру решения задачи параметрического синтеза стабилизатора, отказавшись в ряде случаев от использования дорогостоящих сертифицированных программных продуктов и мощных современных средств вычислительной техники. Вместе с тем следует признать, что область использования изложенной методики ограничена линейными стабилизируемыми объектами и линейными стабилизирующими устройствами, поэтому такая методика может служить лишь для оценки первого приближения решения задачи параметрического синтеза.

Є.Є. Александров, Т.Є. Александрова

МЕТОД ГОЛОВНОЇ КООРДИНАТИ В ТЕОРІЇ ПАРАМЕТРИЧНОГО СИНТЕЗУ ЛІНІЙНИХ СИСТЕМ, ЩО СТАБІЛІЗУЮТЬСЯ

З використанням поняття головної координати процесу, що стабілізується, розроблено методику розв'язку задачі параметричного синтезу стабілізатора лінійного динамічного об'єкта. Це дозволяє звести пошук мінімаксу функції Ляпунова замкнутої системи до пошуку мінімуму простої квадратичної форми, що містить один або два елементи матриці, що є розв'язком лінійного алгебраїчного рівняння Ляпунова.

**A METHOD OF MAIN COORDINATE IN THE
THEORY OF PARAMETRIC SYNTHESIS
OF THE LINEAR STABILIZED SYSTEMS.**

The method of solving the problem of parametric synthesis of linear dynamical object stabilizer is developed using the concept of main coordinate of the stabilized process. This allows one to reduce the search of minimax of Lyapunov function of closed system to the search of a minimum of the simplest quadratic form, containing one or two elements of matrix being the decision of linear algebraic Lyapunov equation.

1. *Александрова Т.Е.* О единственности решения задачи параметрического синтеза линейной динамической системы с интегральным квадратичным критерием оптимальности // Системы обробки інформації. — 2013. — Вип. 7 (114). — С. 116–120.
2. *Александров Е.Е., Бех М.В.* Автоматизированное проектирование динамических систем с помощью функций Ляпунова. — Харьков : Основа, 1993. — 113 с.
3. *Александров Е.Е.* Параметрическая оптимизация регулируемых динамических систем с помощью функций Ляпунова // Техническая кибернетика. — 1990. — № 3. — С. 44–49.
4. *Кунцевич В.М.* Управление в условиях неопределенности: гарантированные результаты в задачах управления и идентификации. — Киев : Наук. думка, 2006. — 264 с.
5. *Александров Е.Е., Александрова Т.Е.* Параметрический синтез цифровой системы стабилизации танковой пушки // Международный научно-технический журнал «Проблемы управления и информатики». — 2015. — № 6. — С. 5–20.
6. *Огурк И.А.* Новые методы синтеза линейных и некоторых нелинейных динамических систем. — М.;Л. : Наука, 1965. — 207 с.
7. *Демидович Б.П.* Лекции по математической теории устойчивости.. — М.: Наука, 1967. — 472 с.
8. *Зубов В.И.* Лекции по теории управления. — М.: Наука, 1975. — 496 с.
9. *Аблесімов О.К., Александров Є.Є., Александрова І.Є.* Автоматичне керування рухомими об'єктами і технологічними процесами. Автоматичне керування озброєнням танків. — Харків : НТУ «ХПІ», 2008. Т. 3 — 444 с.
10. *Айзенберг Я.Е., Сухоребрий В.Г.* Проектирование систем стабилизации носителей космических аппаратов. — М. : Машиностроение, 1986. — 224 с.
11. *Игдалов И.М., Кучма Л.Д., Поляков Н.В., Шептун Ю.Д.* Ракета как объект управления. — Днепропетровск: АРТ-ПРЕСС, 2004. — 524 с.

Получено 15.11.2016