УДК 004.852

Б.Д. Либероль, О.Г. Руденко, А.А. Бессонов

ИССЛЕДОВАНИЕ СХОДИМОСТИ ОДНОШАГОВЫХ АДАПТИВНЫХ АЛГОРИТМОВ ИДЕНТИФИКАЦИИ

Введение

Задача идентификации объекта, описываемого уравнением

$$y_n = c^{*\mathrm{T}} x_n + \xi_n, \tag{1}$$

где y_n — наблюдаемый выходной сигнал; $x_n = (x_{1n}, \ldots, x_{Nn})^{\mathrm{T}}$ — вектор входных сигналов $N \times 1$; $c^* = (c_1^*, \ldots, c_N^*)^{\mathrm{T}}$ — вектор искомых параметров $N \times 1$; ξ_n — помеха, сводится к минимизации некоторого наперед выбранного функционала качества (критерия идентификации), Т — символ транспонирования. Наиболее широко используемый на практике квадратичный функционал приводит к различным алгоритмам идентификации, позволяющим получить оценки искомого вектора c^* при нормальных распределениях помехи ξ_n. Исследования алгоритмов стохастической аппроксимации [1, 2] свидетельствуют о том, что они обеспечивают получение требуемого качества оценок при наличии помех. При этом, однако, возникает вопрос повышения скорости сходимости алгоритма идентификации.

Среди самых простых в вычислительном отношении одношаговых алгоритмов идентификации наиболее эффективными являются алгоритмы Качмажа и Нагумо–Ноды.

Алгоритм Качмажа

Алгоритм, имеющий вид

$$c_n = c_{n-1} + \frac{y_n - c_{n-1}^{\mathrm{T}} x_n}{\| x_n \|^2} x_n \tag{2}$$

и предложенный в работе [3] для решения систем линейных алгебраических уравнений, впоследствии, начиная с [4], успешно стал применяться для решения задачи идентификации при построении модели типа (1). Оценки скорости сходимости данного алгоритма впервые получены в [4–7].

Следует, однако, отметить, что данный алгоритм применяется не только в системах идентификации [4–10], но и при решении задач фильтрации [11–16]. В иностранной литературе он более известен как нормализованный алгоритм наименьших квадратов (normalized least-mean-square — NLMS).

Для повышения вычислительной устойчивости (2) В.М. Чадеев [4, 5] предложил его модификацию — регуляризованный алгоритм

$$c_n = c_{n-1} + \frac{y_n - c_{n-1}^{\mathrm{T}} x_n}{\| x_n \|^2 + \delta} x_n, \tag{3}$$

где $\delta > 0$ — параметр регуляризации.

Поскольку в литературе вопрос о влиянии введения параметра δ на скорость сходимости не исследовался, остановимся на этом подробнее. Введем ошибку идентификации $\theta_i = c_i^* - c_i$ и запишем (3) относительно ошибок идентификации:

$$\theta_n = \left(I - \frac{x_n x_n^{\mathrm{T}}}{| x_n |^2 + \delta} \right) \theta_{n-1} + \frac{\xi_n^y x_n}{| x_n |^2 + \delta}. \tag{4}$$

Для исследования вопросов сходимости рассмотрим следующую лемму.

Лемма 1. Имеет место формула

$$M \left\{ \frac{1}{| x_n |^2 + \delta} \right\} = \frac{1}{(N-2)\sigma_x^2 + \delta} \left(1 - \frac{2\delta\sigma_x^2}{((N-2)\sigma_x^2 + \delta)^2} \right). \tag{5}$$

Доказательство. Рассмотрим величину

$$M_1 = M \left\{ \frac{1}{| x |^2 + \delta} \right\} = \left(\sqrt{\frac{\omega}{\pi}} \right)^N 2^N \int_0^\infty \ldots \int_0^\infty e^{-t(|x|^2+\delta)} e^{-\omega |x|^2} dx_1 \ldots dx_N dt. \tag{6}$$

Здесь $\omega = (2\delta_x^2)^{-1}$. Но так как [17] $\int_{-\infty}^{\infty} e^{hz - az^2} dz = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{h^2}{4a}}$, то выражение (6) записывается следующим образом:

$$M_1 = \left(\sqrt{\frac{\omega}{\pi}} \right)^N \int_0^\infty \left(\sqrt{\frac{\pi}{\omega + t}} \right)^N e^{-\delta t} dt = \int_0^\infty \left(\sqrt{\frac{\omega}{\omega + t}} \right)^N e^{-\delta t} dt.$$

Обозначим

$$-\ell n \sqrt{\frac{\omega}{\omega + \mathrm{t}}} = \ell n \sqrt{1 + \frac{t}{\omega}} = z. \tag{7}$$

Тогда $1 + \frac{t}{\omega} = e^{2z}$, $dt = 2\omega e^{2z} dz$ и выражение (6) принимает вид $M_1 = \int_0^\infty 2\omega e^{-(N-2)z} e^{-\delta t} dz$, где $t(z)$, как следует из (7), определяется выражением $t(z) = \omega 2e^{2z} - \omega$.

Воспользовавшись разложением e^{2z} и ограничиваясь членами второго порядка, получаем

$$t(z) = \omega \left(1 + 2z + \frac{4z^2}{2} \right) - \omega = 2z\omega + 2\omega z^2 + \ldots .$$

С учетом этого можно записать

$$M_1 \approx 2\omega \int_0^\infty e^{-(N-2)z} e^{-\delta(2\omega z + 2\omega z^2)} dz \approx 2\omega \int_0^\infty e^{-z(N-2+2\omega\delta)} e^{-\delta(2\omega z^2)} dz.$$

Разложив $e^{-2\omega z^2}$ в ряд $e^{-2\omega z^2} \approx 1 - 2\omega z^2 + \ldots$ и проинтегрировав, получим

$$M_1 \approx 2\omega \left\{ \frac{1}{N - 2 + 2\delta\omega} - \frac{4\omega\delta}{(N - 2 + 2\delta\omega)^3} \right\}.$$

Подстановка в данное выражение значения $\omega = (2\delta_x^2)^{-4}$ дает

$$M_1 = \frac{1}{\sigma_x^2(N-2+\delta\sigma_x^2)}\left(1-\frac{2\delta\sigma_x^{-2}}{(N-2+\delta\sigma_x^{-2})^2}\right),$$

отсюда после несложных преобразований получаем (6).

Утверждение 1. Если выполняются условия

$$M_\xi\{x_{i,n}\}=0,\ M_\xi\{x_{i,k}x_{j,m}\}=\sigma_x^2\delta_{ij}\delta_{km},\ M_\xi\{\xi_i\}=0,\ M_\xi\{\xi_i\xi_j\}=\sigma_\xi^2\delta_{ij} \quad (8)$$

и помехи не коррелированы с полезными сигналами, то для алгоритма (3) справедливы оценки

$$M\{\theta_n\} = \left(1-\frac{1}{N}\left(1-\frac{\delta N}{(N-2)\sigma_x^2+\delta}\left(1-\frac{2\delta\sigma_x^2}{((N-2)\sigma_x^2+\delta)^2}\right)\right)\right)M\{\theta_{n-1}\}, \quad (9)$$

$$\alpha_n = \left(1-\frac{1}{N}\left(1-\frac{\delta}{((N-2)\sigma_x^2+\delta)^2}\right)\right)\alpha_{n-1}+\frac{(N-2)\sigma_\xi^2\sigma_x^2}{((N-2)\sigma_x^2+\delta)^2}, \quad (10)$$

где $\alpha_i = M\{\theta_i{}^2\}$.

Доказательство. Учитывая (8), имеем

$$M\left\{\frac{x_n x_n^{\mathrm{T}}}{x_n^2+\delta}\right\} = \frac{1}{N}I - M\left\{\frac{\delta}{x_n^2+\delta}\right\}I.$$

Вычисление математического ожидания от обеих частей (4) и подстановка в него полученного выражения с учетом (5) дают (9).

Определим дисперсию оценки $M\{\theta_n{}^2\}$. После умножения (4) слева на θ_n^{T} и усреднения по ξ_n получаем

$$M_\xi\{\theta_n^2\} = \theta_{n-1}^2 - 2\frac{(\theta_{n-1}^{\mathrm{T}}x_n)^2}{x_n^2+\delta}+\frac{(\theta_{n-1}^{\mathrm{T}}x_n)^2x_n^2}{(x_n^2+\delta)^2}+\frac{x_n^2}{(x_n^2+\delta)^2}\sigma_\xi^2. \quad (11)$$

Усредняя выражение (11) по x_n, имеем

$$\alpha_n = \alpha_n\left(1-\frac{2}{N}M\left\{\frac{\|x_n\|^2}{\|x_n\|^2+\delta}\right\}+\frac{1}{N}M\left\{\frac{\|x_n\|^4}{(\|x_n\|^2+\delta)^2}\right\}\right)+\sigma_\xi^2 M\left\{\frac{\|x_n\|^2}{(\|x_n\|^2+\delta)^2}\right\}. \quad (12)$$

Выражение, стоящее в круглых скобках правой части (12), можно упростить. Так как $M\left\{\frac{\|x_n\|^2}{\|x_n\|^2+\delta}\right\}=1-\delta M\left\{\frac{1}{\|x_n\|^2+\delta}\right\}$, а $M\left\{\frac{\|x_n\|^4}{(\|x_n\|^2+\delta)^2}\right\}=$ $=1-2\delta M\left\{\frac{1}{\|x_n\|^2+\delta}\right\}-M\left\{\frac{\delta^2}{(\|x_n\|^2+\delta)^2}\right\}$, то

$$2M\left\{\frac{\|x_n\|^2}{\|x_n\|^2+\delta}\right\}-M\left\{\frac{\|x_n\|^4}{(\|x_n\|^2+\delta)^2}\right\}=1-M\left\{\frac{\delta^2}{(\|x_n\|^2+\delta)^2}\right\}, \quad (13)$$

и формула (12) приобретает вид

$$\alpha_n = \alpha_{n-1}\left(1-\frac{1}{N}\left(1-\delta^2 M\left\{\frac{1}{\|x_n\|^2+\delta}\right\}\right)\right)-M\left\{\frac{\|x_n\|^2}{(\|x_n\|^2+\delta)^2}\right\}\sigma_\xi^2.$$

Учитывая, что $M\left\{\dfrac{1}{(\|x_n\|^2+\delta)^2}\right\}=-\dfrac{\partial}{\partial\delta}M\left\{\dfrac{1}{\|x_n\|^2+\delta}\right\}$, после дифференцирования выражения (5) по δ получаем

$$M\left\{\frac{1}{(\|x_n\|^2+\delta)^2}\right\}\approx\frac{1}{((N-2)\sigma_\chi^2+\delta)^2}. \tag{14}$$

В окончательном виде формулу (13) запишем так:

$$1-M\left\{\frac{\delta^2}{(\|x_n\|^2+\delta)^2}\right\}=1-\frac{\delta^2}{((N-2)\sigma_\chi^2+\delta)^2}. \tag{15}$$

Рассмотрим последнее слагаемое в (12), вызванное наличием помехи

$$\sigma_\xi^2 M\left\{\frac{\|x_n\|^2}{(\|x_n\|^2+\delta)^2}\right\}=\sigma_\xi^2\left[M\left\{\frac{1}{\|x_n\|^2+\delta}\right\}-\delta M\left\{\frac{1}{(\|x_n\|^2+\delta)^2}\right\}\right].$$

Использование формул (5), (14) дает

$$\sigma_\xi^2 M\left\{\frac{\|x_n\|^2}{\|x_n\|^2+\delta}\right\}=\sigma_\xi^2\frac{(N-2)\sigma_\chi^2}{((N-2)\sigma_\chi^2+\delta)^2}. \tag{16}$$

Подставляя выражения (15), (16) в (12), получаем (10).

При отсутствии помех, как следует из (10), $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=0,$ а скорость сходимости определяется выражением

$$\alpha_n=\alpha_{n-1}\left(1-\frac{1}{N}\left\{1-\frac{\delta^2}{((N-2)\sigma_x^2+\delta)^2}\right\}\right). \tag{17}$$

Из (9) видно, что алгоритм (3) обеспечивает получение асимптотических несмещенных оценок, т.е.

$$\lim_{n\to\infty}M\{\theta_n\}=0$$

и

$$\lim_{n\to\infty}M\{\theta_n^2\}=\frac{N\sigma^2}{(N-2)\sigma_x^2+2\delta}. \tag{18}$$

Анализируя полученные выражения, приходим к выводу, что введение параметра δ, улучшая устойчивость алгоритма, уменьшает скорость его сходимости (в случае $\delta=0$, т.е. для алгоритма Качмажа получаем максимальную скорость сходимости, равную $1-\dfrac{1}{N}$).

При $\delta\to\infty$, как отмечалось выше, $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=0,$ т.е. алгоритм сходится в точку. Наличие помех приводит к тому, что алгоритм сходится в область, определяемую статистическими свойствами полезных сигналов и помех.

Из (18) при $\delta=0$ получаем известную оценку для алгоритма Качмажа:

$$\lim_{n\to\infty}\alpha_n=\frac{N}{N-2}\frac{\sigma_\xi^2}{\sigma_\chi^2}.$$

Модификация алгоритма (3) путем введения параметра $\gamma,$ т.е. переход к алгоритму

$$c_n=c_{n-1}+\gamma\frac{y_n-c_{n-1}^{\mathrm{T}}x_n}{\|x_n\|^2+\delta}x_n,$$

приводит к более громоздким формулам. В этом случае выражение (12) принимает вид

$$\alpha_n = \alpha_{n-1}\left(1-\frac{\gamma}{N}\left\{(2-\gamma)-\frac{2(\gamma-1)[\delta((N-2)\sigma_x^2\delta)^2+2\delta^2\sigma_x^2]}{((N-2)\sigma_x^2-\delta)^3}-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{\gamma\delta^2}{((N-2)\sigma_x^2+\delta)^2}\right\}\right)+\frac{\gamma^2(N-2)\sigma_x^2\sigma_\xi^2}{((N-2)\sigma_x^2+\delta)^2}. \qquad (19)$$

При $\gamma = 1$ из (19) получаем (10).

Хотя вычислительная простота данного алгоритма и хорошие динамические свойства и обеспечили его популярность, неоднократно предпринимались попытки улучшить его свойства. Так в [18] рассматривался рандомизированный алгоритм Качмажа, в [19] предлагалось использование в алгоритме переменного шага, а в [15] изучалась возможность выбора в (3) оптимального значения параметра регуляризации.

Следует отметить, что оптимальные выражения для γ^{opt} и δ^{opt} могут быть получены из соотношения (21).

Алгоритм Нагумо–Ноды

В работе [6] предложен алгоритм

$$c_n = c_{n-1} + \frac{y_n - c_{n-1}^{\mathrm{T}} x_n}{x_n^{\mathrm{T}} \operatorname{sign} x_n} \operatorname{sign} x_n, \qquad (20)$$

с $\gamma = 1$.

Как показано в [7], алгоритм (20) можно получить минимизацией евклидовой нормы расстояния между оценками c_n и c_{n-1}, а алгоритм (20) — минимизацией кубической нормы.

При анализе свойств алгоритма предполагаются выполненными отмеченные выше свойства полезных сигналов и помех, а также, что $x_n^{\mathrm{T}} \operatorname{sign} x_n \neq 0$.

Лемма 2. Имеет место формула

$$M\left\{\frac{\| x_n \|^2}{\| x_n \|^2}\right\} = \frac{\pi}{2N}\left(1+O\left(\frac{1}{N^2}\right)\right). \qquad (21)$$

Доказательство. Так как

$$f(x) = \left(\sqrt{\frac{\omega}{\pi}}\right)^{\mathrm{N}} e^{-\omega\|x\|^2}, \ \ \omega = \frac{1}{2}\sigma_x^2,$$

то (здесь и далее индекс n при переменных x опущен)

$$J_0 = M\left\{\frac{\| x_n \|^2}{|x_n|^2}\right\} = \left(\sqrt{\frac{\omega}{\pi}}\right)^N \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\ldots\int_{-\infty}^{\infty}}_{N} e^{-\omega\|x\|^2}\frac{\|x\|^2}{|x|^2}\,dx_1\ldots dx_N$$

или же

$$J_0 = \left(\sqrt{\frac{\omega}{\pi}}\right)^N 2^N \underbrace{\int_0^{\infty}\ldots\int_0^{\infty}}_{N} e^{-\omega\|x\|^2}\frac{\|x\|^2}{|x|^2}\,dx_1\ldots dx_N.$$

Обозначим

$$J_1 = \underbrace{\int_0^{\infty}\ldots\int_0^{\infty}}_{N} e^{-\omega\|x\|^2}\frac{1}{|x|^2}\,dx_1\ldots dx_N.$$

Тогда $J_0 = \left(\sqrt{\frac{\omega}{\pi}}\right)^N 2^N \left(-\frac{\partial J_1}{\partial y_1 \omega}\right)$. Для вычисления J_1 введем обозначение $\sqrt{\omega}\, x_i = = y_i$, т.е. $x_i = \frac{y_i}{\sqrt{\omega}}$.

В этом случае

$$J_1 = \underbrace{\int_0^\infty \ldots \int_0^\infty}_{N} e^{-\|y\|^2} \frac{1}{\left(\sqrt{\frac{1}{\omega}}\right)^2 (y_1 + \ldots y_N)^2} dy_1 \cdots dy_N \left(\frac{1}{\sqrt{\omega}}\right)^N =$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{\omega}}\right)^{N-2} \underbrace{\int_0^\infty \ldots \int_0^\infty}_{N} e^{-\|y\|^2} \frac{dy_1 \cdots dy_N}{(dy_1 \cdots dy_N)^2} = \omega^{-\frac{1}{2}+1} J_2,$$

где

$$J_2 = \underbrace{\int_0^\infty \ldots \int_0^\infty}_{N} e^{-\|y\|^2} \frac{dy_1 \cdots dy_N}{(dy_1 \cdots dy_N)^2}.$$

Таким образом,

$$J_0 = \left(\sqrt{\frac{\omega}{\pi}}\right)^N 2^N \left(\frac{N}{2} - 1\right) \omega^{-\frac{N}{2}} \mathrm{J}_2 = \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)^N \left(\frac{N}{2} - 1\right) J_2. \quad (22)$$

Выражение для J_2 можно представить следующим образом:

$$J_2 = \underbrace{\int_0^\infty \ldots \int_0^\infty}_{N-1} e^{-(y_2^2 + \cdots + y_N^2)} \int_0^\infty e^{-y_1^2} \left(-\frac{\partial}{\partial y_1} \frac{1}{(y_1 + \ldots y_N)}\right) dy_1 \cdots dy_N.$$

Проинтегрируем J_2 по y_1:

$$-\int_0^\infty e^{-y_1^2} \left(-\frac{\partial}{\partial y_1} \frac{1}{(y_1 + \cdots y_n)}\right) dy_1 =$$

$$e^{-y_1^2} \frac{1}{y_1 + \ldots y_N} \Bigg|_0^\infty - \int_0^\infty \left(-\frac{1}{y_1 + \ldots y_N}\right) (2y_1 e^{-y_1^2}) dy_1 = \frac{1}{y_1 + \ldots y_N} - 2\int_0^\infty \frac{y_1 e^{-y_1^2}}{y_1 + \ldots y_N} dy_1.$$

Подставляя в выражение для J_2 данный результат, получаем

$$J_2 = \underbrace{\int_0^\infty \ldots \int_0^\infty}_{N-1} e^{-(y_2^2 + \cdots + y_N^2)} \frac{1}{y_1 + \ldots y_N} dy_2 \cdots dy_N -$$

$$-2 \underbrace{\int_0^\infty \ldots \int_0^\infty}_{N} e^{-(y_1^2 + \cdots + y_N^2)} \frac{y_1}{y_1 + \ldots y_N} dy_1 \cdots dy_N.$$

Обозначим J_3 второе слагаемое в правой части выражения для J_2. Но так как

$$J_3(y_{1,\ldots,} y_N) = J_3(y_{2,\ldots,} y_N) = \cdots = \frac{1}{N}(J_3(y_{1,\ldots}) + J_3(y_{2,\ldots}) + \ldots) =$$

 ISSN 0572-2691

$$=\frac{1}{N}\underbrace{\int_0^\infty\ldots\int_0^\infty}_{N} e^{-(y_1^2+\cdots+y_N^2)}dy_1\cdots dy_N=\frac{1}{N}\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)^N,$$

то

$$J_2=\underbrace{\int_0^\infty\ldots\int_0^\infty}_{N-1} e^{-(y_2^2+\cdots+y_N^2)}\frac{dy_2\ldots dy_N}{y_2+\ldots y_N}=\frac{2}{N}\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)^N.$$

Вычислим

$$J_4=\underbrace{\int_0^\infty\ldots\int_0^\infty}_{N-1} e^{-(y_2^2+\ldots+y_N^2)}\frac{dy^2\ldots dy_N}{y_2+\ldots+y_N}=$$

$$=\underbrace{\int_0^\infty\ldots\int_0^\infty}_{N-1} e^{-(y_2^2+\ldots+y_N^2)}\int_0^\infty e^{-t(y_2+\ldots+y_N)}dt\,dy_2\ldots dy_N=$$

$$=\int_0^\infty\left\{\underbrace{\int_0^\infty\ldots\int_0^\infty}_{N-1} e^{-(y_2^2+ty_2)}e^{-(y_3^2+ty_3)}\ldots e^{-(y_N^2+ty_N)}dy_2\ldots dy_N\right\}dt.$$

Обозначим $\varphi(t)=\int_0^\infty e^{-(u^2+tu)}du.$ Тогда $\mathcal{T}_4=\int_0^\infty \varphi^{N-1}(t)\,dt.$

Рассмотрим $\varphi(t)$:

$$\varphi(0)=\int_0^\infty e^{-u^2}du=\frac{\pi}{2};\;\; \varphi'(0)=\int_0^\infty -ue^{-u^2}du=-\frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-z}dz=\frac{1}{2},$$

т.е. $\varphi(t)$ в точке $t=0$ убывает:

$$\varphi''(0)=\int_0^\infty u^2e^{-u^2}du=\frac{1}{2}\int_0^\infty ud\left(-e^{-u^2}\right)=\frac{1}{2}u\left(-e^{-u^2}\right)\Bigg|_0^\infty-\frac{1}{2}\int_0^\infty\left(-e^{-u^2}\right)du=\frac{1}{2}\frac{\sqrt{\pi}}{2}=\frac{\sqrt{\pi}}{4}.$$

Теперь $\varphi(t)$ можно представить рядом

$$\varphi(t)\approx\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}t-\frac{\pi}{4}t^2+\ldots=\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{1}{\pi}t+\frac{1}{4}t^2+\ldots\right)=\frac{\pi}{2}\Psi(t). \qquad (23)$$

Введем в рассмотрение функцию

$$z(t)=-\ln\varphi(t)=\ln\frac{2}{\pi}-\ln\left(1-\frac{1}{\pi}t+\frac{1}{4}t^2+\ldots\right). \qquad (24)$$

Тогда $J_4=\int_{z_0}^\infty e^{-(N-1)z}\frac{dt}{dz}dz.$ Заменим $z-z_0$ на S, т.е. $S=z-z_0$ и $z=z_0+S$:

$$J_4=\int_{z_0}^\infty e^{-(N-1)(z_0+S)}\frac{dt}{ds}ds.$$

Разложив $t(z)$ в ряд по $z-z_0$, найдем первые два коэффициента этого разложения:

$$\frac{dt}{ds}=a_1+a_2s+\ldots. \qquad (25)$$

С учетом (23) выражение (24) можно записать следующим образом:

$$z(t) = -\ln \varphi(t) = \ln \frac{2}{\sqrt{\pi}} - \ln\left(1 - \frac{1}{\sqrt{\pi}} t + \frac{1}{4} t^2 + \ldots\right). \tag{26}$$

Принимая во внимание, что $\ln(1+x) \approx x - \frac{x^2}{2} + \ldots$ (в нашем случае $x = -\frac{1}{\sqrt{\pi}} t + \frac{1}{4} t^2 + \ldots$), (26) можно представить в виде

$$z(t) = z_0 - \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} t + \frac{1}{4} t^2 - \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{\pi}} t + \frac{1}{4} t^2\right)^2 + \ldots\right)$$

или

$$z(t) \approx z_0 + \frac{1}{\sqrt{\pi}} t - \left(2 - \frac{1}{\pi}\right)\frac{t^2}{4} + \ldots.$$

Отсюда

$$S = \frac{1}{\sqrt{\pi}} t - \frac{1}{4}\left(2 - \frac{1}{\pi}\right) t^2 + \ldots. \tag{27}$$

Из (25) имеем

$$t = a_1 S + a_2 S^2. \tag{28}$$

Подставив (28) в (27), получим

$$S = \frac{1}{\sqrt{\pi}} (a_1 S + a_2 S^2) - \frac{1}{4}\left(2 - \frac{1}{\pi}\right)(a_1^2 S^2 + \ldots). \tag{29}$$

Приравнивая коэффициенты при соответствующих степенях S слева и справа (29), имеем

$$\begin{cases} \dfrac{a_1}{\sqrt{\pi}} = 1, \\ \dfrac{a_2}{\sqrt{\pi}} - \dfrac{1}{4}\left(2 - \dfrac{1}{\pi}\right) a_1^2 = 0, \end{cases}$$

отсюда $a_1 = \sqrt{\pi}$, $a_2 = \frac{\pi - 2}{4}\sqrt{\pi}$. Таким образом, $t = \sqrt{\pi} S + \sqrt{\pi}\frac{\pi - 2}{4} S^2 + \ldots$, а $\frac{dt}{ds} = \sqrt{\pi} + \sqrt{\pi}\frac{\pi - 2}{2} S + \ldots$.

В результате выражение для J_4 примет вид

$$J_4 = e^{-(N-1)\ln\frac{2}{\sqrt{\pi}}} \int_0^\infty e^{-(N-1)S}\left(\sqrt{\pi} + \frac{\sqrt{\pi}(\pi - 2)}{2} S\right) dS =$$

$$= \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)^{-(N-1)} \left[\sqrt{\pi}\frac{1}{N-1} + \frac{\sqrt{\pi}(\pi - 2)}{2}\frac{1}{(N-1)^2} + \ldots\right].$$

Так как

$$J_2 = J_4 - \frac{2}{N}\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)^N = \mathcal{T}_4 - \frac{\sqrt{\pi}}{N}\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)^{N-1},$$

а

$$J_4 = \left(\frac{\sqrt{\pi}}{N}\right)^{N-1}\left[\frac{\sqrt{\pi}}{N-1} + \frac{\sqrt{\pi}(\pi - 2)}{2(N-1)^2} + \ldots\right],$$

 ISSN 0572-2691

то, подставляя значение J_2 в (22), окончательно J_0 можно записать

$$J_0=\left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)^N\left(\frac{N}{2}-1\right)\left[\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)^{N-1}\sqrt{\pi}\left(\frac{1}{N-1}+\frac{(\pi-2)}{2(N-1)^2}+\ldots\right)\right]=$$

$$=(N-2)\left[\frac{1}{N(N-1)}+\frac{\pi-2}{2(N-1)^2}+O\left(\frac{1}{N^2}\right)\right],$$

т.е.

$$J_0=(N-2)\left[\frac{1}{N(N-1)}+\frac{\pi-2}{2(N-1)^2}+O\left(\frac{1}{N^2}\right)\right],$$

отсюда следует (21).

Утверждение 2. Для алгоритма (20) справедливы оценки

$$M\{\theta_n\}=\left(1-\gamma\frac{1}{N}\right)M\{\theta_{n-1}\}, \tag{30}$$

$$\alpha_n=\left(1-\frac{\gamma}{N}\left(2-\gamma\frac{\pi}{2}\right)\right)a_{n-1}+\gamma^2\frac{\pi\delta_\xi^2}{2N\delta_x^2}+O\left(\frac{1}{N^2}\right). \tag{31}$$

Доказательство. Запишем (20) относительно θ:

$$\theta_n=\left(I-\gamma\frac{\operatorname{sign}x_n x_n^{\mathrm{T}}}{x_n^{\mathrm{T}}\operatorname{sign}x_n}\right)\theta_{n-1}+\gamma\frac{\xi_n\operatorname{sign}x_n}{x_n^{\mathrm{T}}\operatorname{sign}x_n}\,. \tag{32}$$

Усредняя обе части (32), с учетом того, что при симметричном относительно нуля распределении x

$$M\left\{\frac{\operatorname{sign}x_n x_n^{\mathrm{T}}}{|x_n|}\theta_{n-1}\right\}=\frac{1}{N}M\{\theta_{n-1}\}$$

и $M\{\xi_n\}=0,$ получаем (30).

Умножим (32) слева на θ_n^{T}:

$$\theta_n^2=\theta_{n-1}^2-2\gamma\frac{(\theta_{n-1}^{\mathrm{T}}x_n)(\theta_{n-1}^{\mathrm{T}}\operatorname{sign}x_n)}{|x_n|}+\gamma^2\frac{((\theta_{n-1}^{\mathrm{T}}x_n)^2+\xi^2)\operatorname{sign}x_n^2}{|x_n|^2}. \tag{33}$$

Усредняя обе части (33), учитывая симметричность распределения x и тот факт, что $\operatorname{sign}x_n^2=N,$ получаем

$$M\{\theta_{\mathrm{n}}^2\}=M\{\theta_{n-1}^2\}-2\gamma M\left\{\theta_{n-1}^{\mathrm{T}}\frac{x_n\operatorname{sign}x_n^{\mathrm{T}}}{|x_n|}\theta_{n-1}\right\}+$$

$$+\gamma^2NM\left\{\theta_{n-1}^{\mathrm{T}}\frac{x_nx_n^{\mathrm{T}}}{|x_n|^2}\theta_{n-1}\right\}+\gamma^2NM\left\{\frac{1}{|x_n|^2}\right\}\sigma_\xi^2$$

или

$$\alpha_n=\alpha_{n-1}-\frac{2}{N}\gamma\alpha_{n-1}+\gamma^2M\left\{\frac{x_n^2}{|x_n|^2}\right\}\alpha_{n-1}+\gamma^2N\sigma_\xi^2M\left\{\frac{1}{|x_n|^2}\right\}. \tag{34}$$

Наличие помех приводит к тому, что в правой части (34) появляется дополнительный член: $\gamma^2N\sigma_\xi^2M\left\{\dfrac{1}{|x_n|^2}\right\}$.

Так как

$$M\left\{\frac{1}{|x_n|^2}\right\}=\left(\sqrt{\frac{\omega}{\pi}}\right)^N 2^N\int\limits_0^\infty\ldots\int\limits_0^\infty e^{-\omega x_n{}^2}\,\frac{1}{(x_1+x_2+\ldots+x_N)^2}dx_1\ldots dx_N\ ,$$

то, поступая по аналогии с предыдущим (заменяя $\sqrt{\omega}x$ на y и т.д.), получаем

$$M\left\{\frac{1}{|x_n|^2}\right\}=\left(\sqrt{\frac{\omega}{\pi}}\right)^N 2^N\left(\frac{1}{\sqrt{\omega}}\right)^{N-2}\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)^N\left[\frac{\pi}{N^2}+O\left(\frac{1}{N^2}\right)\right].$$

Учитывая, что $\omega=\dfrac{1}{2\sigma_x^2}$, окончательно имеем

$$M\left\{\frac{1}{|x_n|^2}\right\}=\frac{\pi}{2N^2\sigma_x^2}+O\left(\frac{1}{N^2}\right).$$

Вставляя полученное выражение и формулу (21) в (25), окончательно получаем (34).

Как следует из (30), для сходимости (20) в среднем параметр γ должен выбираться из условия $0<\gamma<2N$.

Формулу (31) можно представить в виде

$$\alpha_n=(1-\varepsilon)\alpha_{n-1}+\gamma^2\frac{\pi\sigma_\xi^2}{2N\sigma_x^2}+O\left(\frac{1}{N^2}\right),$$

где $\varepsilon=\dfrac{2}{N}\gamma-\dfrac{\pi}{2N}\gamma^2=\dfrac{\gamma}{N}\left(2-\gamma\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Для сходимости алгоритма необходимо, чтобы $0<\varepsilon<I$. Это обеспечивается выбором

$$0<\gamma<\frac{4}{\pi}.$$

Оптимальное значение параметра γ, обеспечивающие максимальную скорость сходимости алгоритма, определится следующим образом: $\dfrac{\partial\varepsilon}{\partial\gamma}=4-2\gamma\pi=0$, отсюда

$$\gamma^{\mathrm{opt}}=\frac{2}{\pi}. \tag{35}$$

Этому значению соответствует $\varepsilon_{\max}=2\pi^{-1}$. Таким образом, при выборе значения γ^{opt} для алгоритма (20) справедлива оценка (при $\xi=0$) $\alpha_n=\left(1-\dfrac{2}{\pi N}\right)\alpha_{n-1}$.

Итерируя (31), нетрудно получить выражение для остаточной ошибки идентификации α_∞.

Оптимальное значение γ^{opt}, обеспечивающие максимальное убывание ошибки идентификации, определяются из условия максимизации $\Psi_n=\alpha_{n-1}-\alpha_n$.

В данном случае γ^{opt} определяется из уравнения $2N^{-1}\alpha_n-\gamma\pi N^{-1}\alpha_n-$ $-\gamma\pi N^{-1}\dfrac{\sigma_x^2}{\sigma_\xi^2}=0$ и равно

$$\gamma^{\mathrm{opt}}=\frac{2\alpha_n\sigma_x^2}{\pi(\alpha_n\sigma_x^2+\sigma_\xi^2)}. \tag{36}$$

Этому значению соответствует

$$\Psi_n^{\max}=\frac{2\alpha_N^2\sigma_x^2}{\pi N(\alpha_n\sigma_x^2+\sigma_\xi^2)}.$$

 ISSN 0572-2691

Влияние регуляризатора δ на свойства нелинейного проекционного метода рассмотрим на примере модифицированного алгоритма Нагумо–Ноды:

$$c_n = c_{n-1} + \frac{y_n - c_{n-1}^{\mathrm{T}} x_n}{|x_n| + \delta} \operatorname{sign} x_n. \tag{37}$$

При анализе сходимости (37) понадобятся некоторые вспомогательные результаты.

Лемма 3. Имеет место оценка

$$M\left\{\frac{1}{|x_n| + \delta}\right\} \approx \frac{\sqrt{\pi\omega}}{N + \delta\sqrt{\pi\omega}}, \tag{38}$$

где $\omega = (2\delta_x^2)^{-1}$.

Доказательство. Величина $M\{(|x_n| + \delta)^{-1}\}$ вычисляется следующим образом:

$$M\left\{\frac{1}{|x| + \delta}\right\} = \left(\sqrt{\frac{\omega}{\pi}}\right)^N \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty}}_{N} e^{-\omega\|x\|^2} \frac{dx}{|x| + \delta}. \tag{39}$$

Здесь и далее индекс n при x опущен.

Как и при выводе (21), введем переменную $\sqrt{\omega}\ \ x_i = y_i$. Тогда

$$M\left\{\frac{1}{|x_n| + \delta}\right\} = \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)^N \underbrace{\int_0^{\infty} \dots \int_0^{\infty}}_{N} e^{-\omega\|y\|^2} \frac{dy}{\dfrac{|y|}{\sqrt{\omega}} + \delta} \left(\frac{1}{\sqrt{\omega}}\right)^N = \left(\frac{1}{\sqrt{\omega}}\right)^{N-1} \times$$

$$\times \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)^N \underbrace{\int_0^{\infty} \dots \int_0^{\infty}}_{N} \int_0^{\infty} e^{-\omega(\|y\|^2 + yt)} e^{-\delta\sqrt{\varpi}t} dy\, dt = \left(\frac{1}{\sqrt{\omega}}\right)^{N-1} \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)^N \int_0^{\infty} e^{-(u^2 + tu)} du.$$

Воспользовавшись представлением $\varphi(t)$ вида (23) $\varphi(t) \approx \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}\left(1 - \dfrac{1}{\sqrt{\pi}} t + \dfrac{1}{4} t^2\right) \approx$ $\approx \dfrac{\sqrt{\pi}}{2} \Psi(t)$ и введя в рассмотрение функцию $z(t) = e^{-\Psi(t)}$, после преобразований, аналогичных проведенным ранее, имеем

$$\int_0^{\infty} \varphi^N(t) e^{-\delta\sqrt{\varpi}t} dt = \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)^N \int_0^{\infty} e^{-NZ} \frac{dt}{dz} e^{-\delta\sqrt{\varpi}t} dz =$$

$$= \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)^N \int_0^{\infty} e^{-NZ} \sqrt{\pi} e^{-\delta\sqrt{\omega}\sqrt{\pi}z} dz = \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)^N \sqrt{\pi} \frac{1}{N + \delta\sqrt{\pi\omega}}.$$

Подставляя данное выражение в (39), получаем (38).

Лемма 4. Имеет место оценка

$$M\left\{\frac{x^2}{(|x| + \delta)^2}\right\} = \frac{\pi N}{2(N + \delta\sqrt{\pi\omega})^2} + O\left(\frac{1}{N^2}\right). \tag{40}$$

Доказательство. Рассмотрим величину

$$M\left\{\frac{x^2}{(|x| + \delta)^2}\right\} = \left(\sqrt{\frac{\omega}{\pi}}\right)^N \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty}}_{N} x^2 e^{-\omega x^2} \frac{dx}{(|x| + \delta)^2}. \tag{41}$$

Обозначим

$$J_1 = \int x^2 e^{-\omega x^2} \frac{1}{(|x|+\delta)^2} dx,$$

а так как

$$J_1 = -\frac{\partial}{\partial\omega}\left(\sqrt{\frac{\omega}{\pi}}\right)^N \underbrace{\int\limits_{-\infty}^{\infty} \dots \int\limits_{-\infty}^{\infty}}_{N} e^{-\omega x^2} \frac{1}{(|x|+\delta)^2} dx = -\frac{\partial}{\partial\omega}\left(\left(\sqrt{\frac{\omega}{\pi}}\right)^N M\left\{\frac{1}{(|x|+\delta)^2}\right\}\right), \quad (42)$$

а $M\{(|x|+\delta)^{-2}\}$ с учетом (38) вычисляется следующим образом:

$$M\left\{\frac{1}{(|x|+\delta)^2}\right\} = -\frac{\partial}{\partial\delta} M\left\{\frac{1}{|x|+\delta}\right\} = \frac{\pi\omega}{(N+\delta\sqrt{\pi\omega})^2}, \quad (43)$$

то, подставляя (42) (с учетом (43)) в формулу (41), после несложных преобразований получаем (39).

Утверждение 3. При выполнении условий (8) для алгоритма (37) справедливы оценки

$$M\{\theta_n\} = \left(1 - \frac{1}{N}\left(1 - \frac{\delta\sqrt{\pi\omega}N}{N+\delta\sqrt{\pi\omega}}\right)\right) M\{\theta_{n-1}\} + O\left(\frac{1}{N^2}\right); \quad (44)$$

$$\alpha_n = \left(1 - \frac{1}{N+\delta\sqrt{\pi\omega}}\left(2 - \frac{\pi N}{2(N+\delta\sqrt{\pi\omega})}\right)\right)\alpha_{n-1} + \frac{\pi N \omega \delta_\xi^2}{(N+\delta\sqrt{\pi\omega})^2} + O\left(\frac{1}{N^2}\right). \quad (45)$$

Доказательство. Записанный относительно θ алгоритм (37) имеет вид

$$\theta_n = \left(I - \frac{\operatorname{sign} x_n x_n^{\mathrm{T}}}{|x_n|+\delta}\right)\theta_{n-1} + \frac{\xi_n \operatorname{sign} x_n}{|x_n|+\delta}. \quad (46)$$

А поскольку при принятых предположениях о свойствах x имеет место соотношение

$$M\left\{\frac{\operatorname{sign} x_n x_n^{\mathrm{T}}}{|x_n|+\delta}\right\} = \frac{1}{N} I - \delta M\left\{\frac{1}{|x_n|+\delta}\right\} I, \quad (47)$$

то использование леммы 4 дает (44).

Умножив (46) слева на θ_n^{T} и усреднив обе его части, получим

$$\alpha_n = \left(1 - \frac{2}{N} M\left\{\frac{|x_n|}{|x_n|+\delta}\right\}\right)\alpha_{n-1} + M\left\{\frac{x_n}{(|x_n|+\delta)^2}\right\}\alpha_{n-1} + {}^2_\xi\, NM\left\{\frac{1}{(|x_n|+\delta)^2}\right\}. \quad (48)$$

Подстановка выражений (38), (41), (43), (47) в (48) дает (45).

Введение параметра релаксации γ в (37), т.е. переход к алгоритму

$$c_n = c_{n-1} + \gamma \frac{y_n - c_{n-1}^{\mathrm{T}} x_n}{|x_n|+\delta} \operatorname{sign} x_n, \quad (49)$$

приводит также к получению несмещенной оценки с

$$\alpha_n = \left(1 - \frac{\gamma}{N+\delta\sqrt{\pi\omega}}\left(2 - \gamma\frac{\pi N}{2(N+\delta\sqrt{\pi\omega})}\right)\right)\alpha_{n-1} + \gamma^2 \frac{\pi N \omega \delta_\xi^2}{(N+\delta\sqrt{\pi\omega})^2}. \quad (50)$$

Сравнивая выражение (48) и (31), нетрудно заметить, что введение параметра δ, улучшая устойчивость алгоритма, приводит к некоторому замедлению скорости его сходимости.

Область сходимости алгоритма (49) (с учетом того, что $\omega = (2\delta_x^2)^{-1}$) определяется следующим выражением:

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \frac{\gamma\pi N}{(4(N+\delta\sqrt{\pi\omega}) - \gamma\pi N)} \frac{\delta_\xi^2}{\delta_x^2}. \quad (51)$$

В случае $\delta = 0$ из (49) и (50) получаем скорость и область сходимости алгоритма Нагумо–Ноды (20). Из анализа этих формул видно, что если скорость сходимости алгоритма Нагумо–Ноды превышает скорость сходимости регуляризированного алгоритма (37), то область сходимости последнего при одних и тех же значениях параметра γ меньше, чем у алгоритма (20). Из (51) следует, что с ростом δ дисперсия оценки $\alpha_n \to 0$.

Нетрудно определить и оптимальное значение параметра γ, обеспечивающее максимальную скорость его сходимости. После несложных преобразований получаем

$$\gamma_n^{\text{opt}} = \frac{2\left(N + \delta\sqrt{\dfrac{\pi}{2\delta_x^2}}\right)\alpha_n\sigma_x^4}{\pi N(\alpha_n\sigma_x^4 + \sigma_\xi^2)}.$$

Практическое применение найденного значения γ^{opt} затруднительно, так как оно зависит от неизвестных величин α_n и статических свойств полезных сигналов и помех. Поэтому можно воспользоваться аппроксимацией γ_n^{opt}, использующей оценки неизвестных параметров.

В случае $\delta = 0$ и $\sigma_\xi^2 \neq 0$ выражение для γ_n^{opt} упрощается и γ_n^{opt} определяется формулой (36), а при $\delta = 0$ и $\sigma_\xi^2 = 0$ — формулой (35).

Заключение

Как показали результаты исследований, использование регуляризирующей добавки в алгоритмах идентификации, улучшая устойчивость алгоритмов, приводит к некоторому замедлению процесса построения модели.

Полученные оценки позволяют определить значения параметров алгоритмов, обеспечивающих их максимальную скорость сходимости.

Следует, однако, отметить, что для ускорения процесса идентификации нужно перейти от одношаговых к многошаговым, в частности, к проекционным алгоритмам [20–23]. Наиболее целесообразен такой подход при идентификации нестационарных объектов.

Б.Д. Ліберолъ, О.Г. Руденко, О.О. Безсонов

ДОСЛІДЖЕННЯ ЗБІЖНОСТІ ОДНОКРОКОВИХ АДАПТИВНИХ АЛГОРИТМІВ ІДЕНТИФІКАЦІЇ

Досліджено питання збіжності регуляризованих однокрокових адаптивних алгоритмів Качмажа і Нагумо–Ноди, які використовуються для розв’язання задачі ідентифікації. Отримано оцінки швидкості збіжності алгоритмів і показано, що введення параметра регуляризації, покращуючи обчислювальну стійкість алгоритмів, дещо уповільнює процес ідентифікації. Наявність інформації про статистичні властивості корисних сигналів і завад дозволяє обрати параметри алгоритмів, що забезпечують їх максимальну швидкість збіжності.

B.D. Liberol, O.G. Rudenko, A.A. Bezsonov

INVESTIGATION OF SINGLE-STEP ADAPTIVE IDENTIFICATION ALGORITHMS CONVERGENCE

The questions of convergence of regularized one-step adaptive Kacmazh and Nagumo–Noda algorithms that are used for solving the identification problem, are investigated. Estimates of the rate of algorithms convergence are obtained and it is shown that introducing a regularization parameter, that improves the computational stability of algorithms, leads to a certain slowing down of the identification process. The availability of information regarding the statistical properties of useful signals and interference allows us to choose the parameters of the algorithms that ensure their maximum rate of convergence.

1. *Вазан М.* Стохастическая аппроксимация. — М. : Мир, 1972. — 289 с.
2. *Невельсон М.Б., Хасьминский Р.З.* Стохастическая аппроксимация и рекуррентное оценивание. — М. : Наука, 1972. — 304 с.
3. *Kaczmarz S.* Angenäherle auflösung von systemen linearer gleichungen // Bull. Int. Acad. Polon. Sci. Lett., C 1, Sci. Math. Nat., Ser. A, 1937. — P. 355–357.
4. English translation: Kaczmarz S. Approximate solution of systems of linear equations // Int. J. of Control, 1993. — **57**. — P. 1269–1271.
5. *Чадеев В.М.* Определение динамических характеристик объектов в процессе их нормальной эксплуатации для целей самонастройки // Автоматика и телемеханика. — 1964. — **25**, № 9. — С. 1302–1306.
6. *Райбман Н.С., Чадеев В.М.* Адаптивные модели в системах управления. — М. : Сов. радио, 1966. — 156 с.
7. *Nagumo I., Noda A.* A learning method for system identification // IEEE Trans. Autom. Control, 1967. — **AC-12**. — N 3. — P. 282–287.
8. *Aved'jan E.D.* Bestimmung der parameter linearer modelle stationärer und instationärer strecken // Messen, Steuern, Regeln. — 1971. — N 9. — P. 348–350.
9. *Ljung L., Söderström T.* Theory and practice of recursive identification // Cambridge, MA: MIT Press, 1983. — 529 p.
10. *Льюнг Г.* Идентификация систем. Теория для пользователя. — М. : Наука, 1991. — 432 с.
11. *Руденко О.Г.* Оценка скорости сходимости одношаговых устойчивых алгоритмов идентификации // Докл. АН УССР. — Сер. А. Физ-мат и техн. науки. — 1982. — № 1. — С. 64–66.
12. *Widrow B., Stearns S.D.* Adaptive signal processing. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New York, 1985.
13. *Sayed Ali H.* Fundamentals of adaptive filtering. — New York : Wiley, 2003. — 1112 p.
14. *Diniz P.S.R.* Adaptive filtering: algorithms and practical implementation, 3rd ed., published by Springer Publishers, 2008. — 627 p.
15. *Benesty J., Paleologu C., Ciochină S.* On regularization in adaptive filtering // IEEE Trans. Audio, Speech, Language Process. — 2011. — **19**. — P. 1734–1742.
16. *Paleologu C., Ciochina S., Benesty J., Grant S.L.* An overview on optimized NLMS algorithms for acoustic echo cancellation // EURASIP J. Adv. Sig. Proc. — 2015. — **97**. — 19 p.
17. *Ciochina S., Paleologu C., Benesty J.* An optimized NLMS algorithm for system identification // Signal Processing. — 2016. — **118**. — P. 115–121.
18. *Пугачев В.С.* Теория случайных функций и ее применение к задачам автоматического управления. — М. : Физматгиз, 1962. — 884 с.
19. *Strohmer T., Vershynin R.* Comments on the randomized Kaczmarz method // Journal of Fourier Analysis and Applications. — 2009. — **15**(4). — P. 437–440.
20. *Lee J., Chen J., Huang H.* Performance comparison of variable step-size NLMS algorithms // Proc. of the World Congress on Eng. and Computer Science. WCECS 2009, October 20-22. — 2009, San Francisco, USA. — **I**. — 4 p.
21. *Ищенко Л.А., Либероль Б.Д., Руденко О.Г.* Проекционные алгоритмы идентификации линейных объектов // Докл. АН УССР. Сер. А. — 1985. — № 7. — С. 62–64.
22. *Ищенко Л.А., Либероль Б.Д., Руденко О.Г.* Адаптивное оценивание параметров нестационарных объектов // Там же. — 1985. — № 12. — С. 70–72.
23. *Ищенко Л.А., Руденко О.Г.* О свойствах одного класса многошаговых адаптивных алгоритмов идентификации // Кибернетика. — 1986. — № 1. — С. 92–96.
24. *Либероль Б.Д., Руденко О.Г.* О свойствах проекционных алгоритмов оценивания параметров нестационарных объектов // Докл. АН УССР. Сер. А. — 1990. — № 4. — С. 71–74.

Получено 28.11.2017