УДК 519.1

Г.А. Донец, А.Л. Гурин

ЗАДАЧА О МАТЕМАТИЧЕСКОМ СЕЙФЕ ИЗ ЗАМКОВ С ДВУМЯ СОСТОЯНИМИ

Первое упоминание о специфическом сейфе было в работе [1]. В силу очевидных причин назовем такой сейф математическим и дадим ему следующее определение.

Математическим сейфом называется система $Z=(z_1, z_2, ..., z_N)$ взаимосвязанных замков такая, что когда производится поворот ключом в одном замке, то такой же поворот производится и в замках, связанных с данным.

Математический сейф лучше всего задавать с помощью ориентированного графа, у которого замки являются вершинами, а дуги указывают на их взаимосвязанность. Так дуга $(z_i,\ z_j)$ указывает, что замок z_j связан с замком z_i, и с любым поворотом ключа в замке z_i одновременно осуществляется поворот и в замке z_j. Замок z_i называется входящим по отношению к замку z_j. Любой замок может находиться в одном из двух положений: открытый или закрытый. Существуют замки, для открытия которых требуется несколько поворотов ключа (0, 1, 2, …, K – 1), количество которых равно K, что определяет общее число состояний замка. Замок открыт, когда он в состоянии 0. В другом состоянии замок закрыт.

Необходимо решить следующую задачу. Исходя из начального состояния сейфа $b = (b_1, b_2, ..., b_N)$, где $b_i \in$ (0, 1, 2, …, K – 1), найти такую последовательность замков и число поворотов ключа в них, чтобы сейф перешел в положение открытого, т.е. состояние всех замков стало равным 0.

Приведем математическую постановку такой задачи. Пусть x_j, $j = 1, 2, ..., N$, — необходимое количество поворотов ключа при решении задачи в замке z_j. Для каждого замка z_j должно выполняться основное уравнение. Пусть $z_1,\ z_2, ...,\ z_k$ — входящие замки для замка z_j. Основное уравнение равносильно утверждению: сумма чисел поворотов входящих замков для замка z_j плюс его число поворотов x_j, плюс его начальное состояние b_j должны быть равны 0 (mod K). Это утверждение запишем

$$\sum_{i=1}^{k} x_i + x_j + b_j = 0(\mathrm{mod}\ 3), \quad j = 1, 2, ..., N, \tag{1}$$

Покажем на примерах, как решать такие задачи.

Пример 1. Рассмотрим простейший случай, когда $K = 2$. Пусть несколько вершин графа образуют цепь, в которой все ребра ориентированы в одном направлении, т.е. цепь образует путь (рис. 1).

Пронумеруем его вершины от 1 до N, начиная с вершины, не имеющей входящей дуги. Номера вершин указаны в кружочках, а под ними указаны состояния замков (вершин).

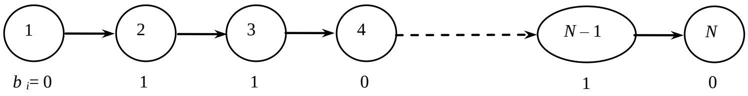

Рис. 1

Положим $i=1$. Если $b_i = 0$, то переходим к вершине $i+1$. Если $b_i = 1$, то делаем поворот в замке z_i, переводя его состояние в 0, а b_{i+1} переходит в состояние $(b_{i+1}+1)(\operatorname{mod} 2)$. Теперь переходим к вершине $i+1$. В конце концов приходим к вершине N, состояние которой переводим в $b_N = 0$. В итоге для всего графа получим состояния $b_i = 0 (1 \le i \le N)$.

Для решения этой задачи можно воспользоваться системой (1), которая для данного примера после перенесения b_j вправо имеет вид

$$\left.\begin{array}{lllllll}
x_1 & \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot & \equiv -b_1 \\
x_1 + & x_2 & \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot & \equiv -b_2 \\
 & x_2 + & x_3 & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot & \equiv -b_3 \\
 & & x_3 + & x_4\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot & \equiv -b_4 \\
 & & & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot & \cdot \\
 & & & & x_{N-1} + x_N & \equiv -b_N
\end{array}\right\} \operatorname{mod} 2. \qquad (2)$$

Решение этой системы легко находится путем последовательной подстановки значений x_i, $i = 1, 2, ..., N-1$, в очередное уравнение.

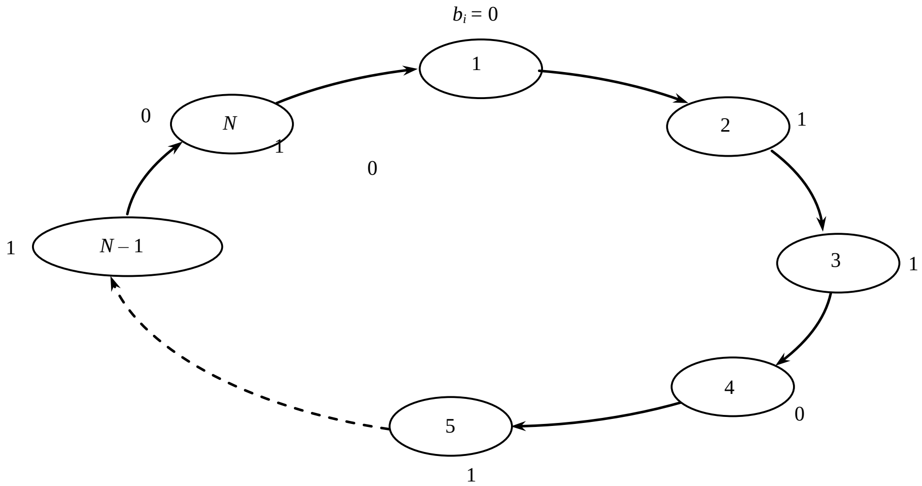

Рис. 2

Пример 2. Рассмотрим граф на рис. 2, представляющий собой контур, на котором задан сейф с замками для $K = 2$. Для этого сейфа система (1) примет вид

$$\left.\begin{array}{llllllll} x_1+ & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & +x_N \equiv b_1 \\ x_1+ & x_2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \equiv b_2 \\ & x_2+ & x_3 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \equiv b_3 \\ & & x_3+ & x_4 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \equiv b_4 \\ & & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \quad \cdot \\ & & & & & & x_{N-1} & +x_N \equiv b_N \end{array}\right\} \bmod 2. \tag{3}$$

Если сложить все равенства системы (3), то в левой части получим $0(\bmod 2)$, а в правой — $\sum_{i-1}^{N} b_i \equiv 0(\bmod 2)$, т.е. результаты сложения в левой и правой частях совпадают. Это необходимое условие разрешимости системы (3). Докажем ее достаточность. Для этого в системе (3) зададим $x_1 = b_1$. Тогда $x_2 = b_1 + b_2(\bmod 2)$, $x_3 = b_1 + b_2 + b_3(\bmod 2)$ и т.д. до $x_N = \sum_{i-1}^{N} b_i \equiv 0(\bmod 2)$, что в полной мере согласуется с первым уравнением системы. Тем самым задача решена. Аналогично решается задача о математическом сейфе на сетях.

Кроме математических сейфов на графах существует класс задач, где математические сейфы задаются на матрицах. Во всех задачах о сейфе на матрицах все замки сейфа расположены в виде прямоугольной таблицы размером $m \times n$, т.е. в виде матрицы $Z = (z_{ij})_{m,\,n}$. Для любого замка z_{ij} входящими замками считаются замки, расположенные в той же строке и том же столбце. Исходное состояние сейфа задается матрицей $B = (b_{ij})_{m,\,n}$. Пусть матрица $X = (x_{ij})_{m,\,n}$ — решение задачи, где x_{ij} равно количеству поворотов ключа в замке z_{ij}.

Тогда условием того, что элемент b_{ij} преобразуется матрицей X в нуль, представляется соотношением

$$\sum_{k=1}^{n} x_{ik} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{m} x_{kj} + b_{ij} \equiv 0 \ (\bmod K), \tag{4}$$

где $i = 1, 2, \ldots, m$; $j = 1, 2, \ldots, n$.

Обозначим $\vec{x} = (x_{11}, x_{12}, \ldots\ldots, x_{1n}, x_{21}, x_{22}, \ldots\ldots, x_{2n}, \ldots\ldots, x_{m,\,n-1}, x_{mn})$ вектор-столбец, полученный из матрицы X последовательной записью ее строк.

Аналогично из матрицы B получим вектор-столбец $\vec{b}$. Кроме того, пусть $\Im_n$ — матрица размера $n \times n$, состоящая из единиц, E_n — единичная матрица того же размера. Тогда условие преобразования (4) для всей матрицы B запишем в виде системы уравнений

$$A\vec{x} + \vec{b} \equiv 0(\bmod K), \tag{5}$$

где матрица A размера $mn \times mn$ состоит из m^2 клеток:

$$A=\begin{pmatrix} \Im_n & E_n & E_n & .. & .. & E_n \\ E_n & \Im_n & E_n & .. & .. & E_n \\ E_n & E_n & \Im_n & .. & .. & E_n \\ .. & .. & .. & .. & .. & .. \\ E_n & E_n & E_n & .. & .. & \Im_n \end{pmatrix}. \qquad (6)$$

Существуют численные методы решения таких систем [2]. Специфика задачи позволяет находить решение системы непосредственно, так как матрица A имеет стандартный вид и не зависит от значений матрицы B. Ее ранг и определитель зависят только от значений m и n.

Если ранг матрицы A равен mn, то решение системы (5) имеет вид

$$\vec{x} = -A^{-1}\vec{b} \,(\mathrm{mod}\, K). \qquad (7)$$

Таким образом, проблема сводится к отысканию обратной матрицы A^{-1}. В общем случае для произвольных m, n она может не существовать. Тогда система (5) может иметь решение, если начальное состояние удовлетворяет определенным ограничениям.

В данной работе исследуются сейфы для самого простого случая, когда $K = 2$. Рассмотрим последовательно четыре случая.

Случай 1. Пусть $m = n = 0$ (mod 2). Введем такие обозначения: $S_i = x_{i1} + x_{i2} + ... + x_{in}$, $\Sigma_j = x_{1j} + x_{2j} + ... + x_{nj}$, $\lambda_i = b_{i1} + b_{i2} + ... + b_{in}$, $\beta_j = b_{1j} + b_{2j} + ... + b_{nj}$, где $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$.

Образуем подсистему из системы (5) путем сложения первых n уравнений, вторых n уравнений и т.д. В результате получим следующую систему из m уравнений:

$$\begin{aligned} & S_2 + S_3 + ... + S_{m-1} + S_m = \lambda_1 (\mathrm{mod}\, 2), \\ S_1 \quad & + S_3 + ... + S_{m-1} + S_m = \lambda_2 (\mathrm{mod}\, 2), \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ S_1 + S_2 & + S_3 + ... + S_{m-1} \qquad = \lambda_m (\mathrm{mod}\, 2). \end{aligned} \qquad (8)$$

Назовем эту систему подсистемой первого рода. Подсистему второго рода получим из системы (5) следующим образом. Выделив $(k{\cdot}n{+}j)$-е уравнения, где $k = 0, 1, 2, \ldots, m - 1$, получим систему из m уравнений:

$$\begin{aligned} & S_1 + x_{2j} + x_{3j} + ... + x_{nj} = b_{1j} (\mathrm{mod}\ 2), \\ & x_{1j} + S_2 + x_{3j} + ... + x_{nj} = b_{2j} (\mathrm{mod}\ 2), \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ & x_{1j} + x_{2j} + x_{3j} + ... + S_m = b_{mj} (\mathrm{mod}\ 2). \end{aligned} \qquad (9)$$

Просуммировав уравнения в системе (8), получим $\sum_{i=1}^{n} S_i = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$. Следовательно,

$$S_i = \sum_{k=1,\, k\neq i}^{n} \lambda_k. \qquad (10)$$

 ISSN 0572-2691

Суммируя все уравнения в системе (9), получим $\sum_{i=1}^{n}(S_i + x_{ij} + b_{ij}) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i + \Sigma_j + b_j$ для $j = \overline{1, n}$. Отсюда

$$\Sigma_j = \sum_{i=1}^{n} (S_i + x_{ij} + b_{ij}) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i + b_j. \tag{11}$$

Возьмем i-е уравнение системы (9), прибавим в левую и правую части x_{ij}, получим уравнение $S_i + \Sigma_j = x_{ij} + b_{ij}$. Подставляя S_i из (10) и Σ_j из (11), получаем решение системы (5): $x_{ij} = \lambda_i + \sum_{k=1,\, k \neq i}^{m} b_{kj}$, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$.

Это равносильно соотношениям $\vec{x}A + \vec{b} \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 2)$. Тем самым конструктивным образом доказана теорема 1 [1] о том, что для $m = n = 0$ (mod 2) $A = A^{-1}$(mod 2). Это означает, что в этом случае решение единственное.

Пример 3. Пусть задан сейф матрицей $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Решением задачи будет матрица $X = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. Проверим это решение на матрице B, записывая сверху над ней номер замка и величину поворотов:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{x_{21}=1} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{x_{22}=1} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{x_{31}=1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{x_{33}=1}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{x_{41}=1} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{x_{42}=1} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{x_{43}=1} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Случай 2. Пусть m = 1 (mod 2), n = 0 (mod 2).

Образуем из системы (5) подсистемы первого и второго рода, которые имеют такой же вид, как и в случае 1 (8), (9). Сложив все уравнения в подсистеме (9), получим уравнение $\sum_{i=1}^{m} S_i = \beta_j$, $j = \overline{1, n}$. Следовательно, все $\beta_j = \beta$. Добавим в левую и правую части i-го уравнения системы (8) S_i, в результате получим $S_i = \lambda_i + \beta$, $i = \overline{1, m}$. Подставляя эти значения в (9) и вычитая 1-е уравнение из всех остальных, получаем решение

$$x_{ij} = x_{1j} + \lambda_1 + \lambda_i + \beta_{1j} + \beta_{ij}. \qquad (12)$$

Зададим произвольные значения для $x_{11}, x_{12}, ..., x_{1n}$ таким образом, чтобы их сумма равнялась $\lambda_1 + \beta$. Подставляя эти значения в (12), получаем общее решение задачи.

Пример 4. $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. Здесь $\beta = 1$, $\lambda_1 = 1$. Следовательно, $S_1 = 0$. Зададим $x_{1j} = 0$, $j = \overline{1, 4}$. Подставляя эти значения в (12), получаем $X_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Проверим это решение:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{x_{21}=1} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{x_{22}=1} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{x_{32}=1} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Поскольку S_1 задавали произвольным образом, то это решение не единственное. Остальные решения можно получить, добавляя к матрице X_1 определенные подматрицы из единиц. Чтобы эти подматрицы не влияли на первое решение, необходимо, чтобы сумма числа строк и столбцов была нечетной. Чтобы нечетное число единиц в строке или столбце не влияло на решение X_1, необходимо, чтобы нечетный размер подматриц совпадал с нечетным размером матрицы X_1. Таким образом, подматрицы имеют размеры $(m, 2k)$, где $k = 1, 2, \ldots, n/2$. В приведенном примере — это подматрицы $Y_{12}, Y_{13}, Y_{14}, Y_{23}, Y_{24}, Y_{34}, Y_{1234}$, где нижние индексы означают номера столбцов с тремя единицами каждый. Складывая эти подматрицы с матрицей X_1, получаем еще семь решений:

$$X_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, X_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, X_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, X_5 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$X_6 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, X_7 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, X_8 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

ISSN 0572-2691

В общем случае число всех решений будет 2^{n-1}.

Случай 3. Пусть $m = 0$ (mod 2), $n = 1$ (mod 2). В этом случае система (8) приобретает вид $\sum_{i=1}^{m} S_i = \lambda_i$. Это означает, что все $\lambda_i = \lambda$. Складывая все уравнения в (9), получаем $\sum_{i=1}^{m} S_i + \Sigma_j = \beta_j$. Отсюда $\Sigma_j = \beta_j + \lambda$.

Возьмем i-е уравнение системы (9) и прибавим в левую и правую части x_{ij}. Получим уравнение $S_i + \Sigma_j = x_{ij} + b_{ij}$. Отсюда

$$x_{ij} = \beta_j + \lambda + S_i + b_{ij}. \tag{13}$$

Задавая произвольные значения S_i таким образом, чтобы $\sum_{i=1}^{n} S_i = \lambda$, получаем решение задачи, которое является не единственным. Все другие решения можно получить путем добавления к полученному решению, как и в случае 2, подматриц из единиц. Рассуждая, как и в случае 2, приходим к выводу, что размеры эти подматриц имеют вид $(2k, n)$, где $k = 1, 2,\ldots, m/2$. Всего таких решений будет 2^{m-1}. Это соответствует количеству решений уравнения $\sum_{i=1}^{n} S_i = \lambda$.

Пример 5. Пусть задан сейф матрицей $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ и $S_1 = S_2 = S_3 = 0$ (mod 2), $S_4 = 1$ (mod 2). Подставляя эти значения в (13), получаем матрицу решения $X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Проверим решение:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{x_{11}=1} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{x_{15}=1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{x_{22}=1}$$

$$\xrightarrow{x_{25}=1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{x_{33}=1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{x_{35}=1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{x_{41}=1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$x_{42}=1 \qquad\qquad x_{43}=1$$

$$\to\begin{bmatrix}0&1&1&0&0\\0&1&1&0&0\\0&1&1&0&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}0&0&1&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&1&0&0\\1&1&1&1&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}.$$

Складывая с данным решением соответствующие матрицы из единиц, получаем еще семь решений, а всего — восемь.

Случай 4. Пусть $m = n = 1 \pmod 2$. В этом случае подсистема (8) состоит из уравнений $\sum_{i=1}^{m} S_i=\lambda_i=\lambda$. Суммируя уравнения в (9), получаем $\sum_{i=1}^{m} S_i=\beta_j=\beta=\lambda$, $j=\overline{1, n}$. Придавая S_i произвольные значения в пределах зависимости $\sum_{i=1}^{m} S_i=\beta$, затем, задавая $x_{i1}, x_{i2}, ..., x_{in}$ произвольные значения с учетом того, что S_i — решение предыдущей зависимости, получим общее решение системы (5) $x_{ij}=x_{1j}+S_1+S_i+b_{1j}+b_{ij}$. Количество всех решений 2^{m+n-2}.

Такое же количество решений получим, если к начальному решению системы (5) добавим подматрицы из единиц размерности (3, 2), (3, 4) и (2, 5).

Пример 6. Пусть задан сейф матрицей $B=\begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&1&1\end{bmatrix}$. Эта матрица удовлетворяет необходимому условию $\beta=\lambda=1$. Возьмем в качестве решения $S_1=S_2=0,\ S_3=1$. Для S_1 зададим $x_{1j}=0,\ j=\overline{1, 5}$. В результате получим решение $X=\begin{bmatrix}0&0&0&0&0\\1&1&0&0&0\\0&1&0&0&0\end{bmatrix}$. Проверим это решение:

$$x_{21}=1 \qquad\qquad x_{22}=1$$

$$B=\begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&1&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}0&0&0&0&0\\1&0&1&1&1\\1&0&1&1&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}.$$

Лемма. Для $m = n = 1 \pmod 2$ решением системы (5) есть $X = B$.

Для доказательства возьмем произвольный элемент b_{ij} и покажем, что матрицей B он превращается в $0 \pmod 2$. Это равносильно уравнению $\sum_{k=1,\, k\neq i}^{m} b_{kj}^2+\sum_{k=1}^{n} b_{ik}^2+b_{ij}=\sum_{k=1,\, k\neq i}^{m} b_{kj}+\sum_{k=1}^{n} b_{ik}+b_{ij}=\beta=\lambda=0 \pmod 2$, что и требовалось.

В качестве примера возьмем пример 6. Проверим решение $X = B$:

ISSN 0572-2691

$$B=\begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&1&1\end{bmatrix}\xrightarrow{x_{11}=1}\begin{bmatrix}0&1&1&1&1\\1&1&0&0&0\\1&0&1&1&1\end{bmatrix}\xrightarrow{x_{22}=1}\begin{bmatrix}0&0&1&1&1\\0&0&1&1&1\\1&1&1&1&1\end{bmatrix}\xrightarrow{x_{33}=1}\begin{bmatrix}0&0&0&1&1\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}\xrightarrow{x_{34}=1}$$

$$\to\begin{bmatrix}0&0&0&0&1\\0&0&0&0&1\\1&1&1&1&1\end{bmatrix}\xrightarrow{x_{35}=1}\begin{bmatrix}0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}.$$

При решении задачи в четырех случаях использовалась система (5), из которой выделялись две подсистемы. Таким образом, этот метод решения задачи можно назвать методом выделения подсистем. Используем его при решении задач о математическом сейфе более сложной конфигурации.

Г.П. Донець, А.Л. Гурін

ЗАДАЧА ПРО МАТЕМАТИЧНИЙ СЕЙФ ІЗ ЗАМКІВ З ДВОМА СТАНАМИ

Розглянуто задачу про математичний сейф, який задається матрицею, що складається з нулів та одиниць. Вивчається чотири можливих випадки, для кожного з яких знаходяться всі існуючі розв’язки задачі.

G.A. Donets, A.L. Gurin

PROBLEM ON MATHEMATICAL SAFE OF THE LOCKS WITH TWO STATES

The problem on mathematical safe, given by the matrix consisting of zeroes and unities, is considered. Four possible cases are studied and for each of them all existing solutions of the problem are found.

1. *Donets G.A.* Solution of safe problem on (0,1)-matrices // Cybernetics and Systems Analysis. — 2002. — N 1. — P. 98–105.
2. *Kryvyi S.L.* Algorithms for solution of systems of linear diophantine equations in residue fields // Ibid. — 2007. — **43**, N 2. — P.171−178.

Получено 18.06.2018