

УДК 517.9:62.50

*Ю.П. Ладиков-Роев, В.Е. Набивач*

**ВОЗБУЖДЕНИЕ ВОЛН ВО ВРАЩАЮЩЕМСЯ  
ПЛАЗМЕННОМ ЗАМАГНИЧЕННОМ ЦИЛИНДРЕ,  
ОКРУЖЕННОМ ПЛАЗМЕННОЙ АТМОСФЕРОЙ  
С УЧЕТОМ СЖИМАЕМОСТИ**

**Введение**

Плазменный цилиндр с круглым поперечным сечением является удобной моделью для изучения плазменных структур и волновых возмущений [1–4]. Эта модель часто используется при исследованиях моделей явлений в космосе [5–8]. В частности, для изучения волновых процессов в солнечных магнитных трубках [9–15], для построения моделей солнечной спикулы [16] и магнитных конфигураций в солнечном ветре [17], а также для изучения азимутальных мелкомасштабных ультранизкочастотных (УНЧ) осцилляций в магнитосфере Земли [18].

Эта модель является базовой для исследования волновых [4, 19–23] процессов в высокотемпературной плазме и устойчивости термоядерных установок [24–30]. Данная конфигурация часто используется для рассмотрения фундаментальных проблем физики плазмы, например для описания магнитно-вихревых колец [31–34] и равновесия плазмы с течением [35–37].

Несмотря на результаты по теоретическому исследованию поведения плазмы в цилиндрической конфигурации, многие вопросы по-прежнему остаются неясными. Отчасти это связано с тем, что для изучения возмущений в указанной конфигурации обычно используется уравнение Хайна–Люста [1] или его модификации (см., например, [23]), которые имеют довольно сложный вид. Решения этих уравнений связаны с существенными математическими сложностями и обычно получаются в приближении несжимаемых возмущений [38, 39], отсутствия течения среды [2] или осесимметричности возмущений [11].

В этой работе рассмотрим возмущения в длинном вращающемся плазменном цилиндре с учетом сжимаемости плазменной среды. Будем предполагать, что рассматриваемый плазменный цилиндр является изолированной магнитной трубкой [8], т.е. за границей плазменного шнура движение среды и магнитное поле отсутствуют.

В статье показано, что при некоторых условиях в плазменном цилиндре могут возникать моды, которые способны разрушать тонкую магнитную трубку. Этот результат представляет интерес для изучения динамики магнитных трубок на Солнце и верификации данных наблюдений с космических аппаратов. В работе подробно рассмотрены винтовые возмущения магнитной гидродинамики (МГД), при которых резонанс не возникает.

## 1. Постановка задачи

Рассмотрим цилиндр, заполненный плазмой радиусом  $R = a$ , высотой  $h = l$ , и с магнитным полем  $B_z^{(i)} = B_z^0$ ,  $B_\phi^{(i)} = B_0 \frac{R}{a}$ , которая движется вертикально со скоростью  $V_z^{(i)} = V_z^{0*}$  и одновременно вращается вокруг своей оси с угловой скоростью  $\Omega$ , при этом ее азимутальная скорость равна  $V_\phi^{(i)} = \Omega \cdot R$ .

Из уравнения магнитной гидродинамики [22] для невозмущенного состояния получим

$$\frac{\rho_0 V_\phi^2}{R} = \frac{\partial P_1}{\partial R} + \frac{B_\phi^2}{R}. \quad (1)$$

Здесь  $P_1$  — полное давление, которое равно  $P_1 = P + \frac{B_\phi^2 + B_z^2}{2}$ , а для магнитного поля использовано масштабирование  $\frac{\vec{B}}{\sqrt{4\pi}} \rightarrow \vec{B}$ .

Интегрируя (1), найдем

$$P_1^{(i)}(R) = P_1^{(i)}(0) + \rho_0 \cdot \frac{\Omega^2 \cdot R^2}{2} - \frac{B_0^2 \cdot R^2}{2 \cdot a^2}; \quad P_1^{(i)}(0) = P_0^{(i)}(0) + \frac{B_z^2}{2}; \quad (2)$$

$$P_1^{(i)}(R) = P_0^{(i)}(0) + \rho_0 \cdot \frac{\Omega^2 \cdot R^2}{2} - \frac{B_0^2 \cdot R^2}{a^2}.$$

Введем в рассмотрение безразмерные переменные  $\Pi, \Pi_1, r, \hat{V}, \beta, U$  и  $N$ .

Положим  $P = \rho \Omega^2 a^2 \Pi$ ,  $P_1 = \rho_0 \Omega^2 a^2 \Pi_1$ ,  $R = a \cdot r$ ,  $\vec{V} = \Omega a \hat{V}$ ,  $\beta = \frac{B_z}{B_0}$ ,  $U = \frac{V_z}{\Omega a}$ ,

$$N^2 = \frac{B_0^2}{\rho \Omega^2 a^2}.$$

В этих переменных уравнение (2) перепишем так:

$$\Pi_1 = \Pi_1(0) + \frac{r^2}{2}(1 - N^2), \quad \Pi = \Pi(0) + \frac{r^2}{2}(1 - 2N^2).$$

Считаем, что вне цилиндра для  $R \geq a$  (или  $r \geq 1$ ) магнитное поле и движение среды отсутствуют, поэтому

$$P_1^{(e)} = P^{(e)} = \text{const}, \quad \Pi_1^{(e)} = \Pi^{(e)} = \text{const}.$$

Поскольку на границе плазменного шнура при  $r = 1$  полные давления должны быть равны, получаем

$$P_1^{(i)} = P_1^{(e)}, \quad P_1(0) + \rho \cdot \frac{\Omega^2 \cdot a^2}{2} - \frac{B_0^2}{2} = P^{(e)} \quad (3)$$

$$\text{или } \Pi_1(0) + \frac{1}{2}(1 - N^2) = \Pi^{(e)}, \quad \Pi(0) + \frac{1}{2}(1 + N^2\beta^2 - N^2) = \Pi^{(e)}(0).$$

---

\* *Примечание.* Символами  $\langle i \rangle$  и  $\langle e \rangle$  в дальнейшем отмечаем параметры модели внутри цилиндра и вне его соответственно.

## 2. Возмущения внутри плазменного цилиндра

Рассмотрим возмущенное состояние внутри плазменного цилиндра, т.е. при  $R \leq a$ . Будем полагать, что все физические величины модели испытывают малые отклонения от стационарных значений, т.е. имеют вид

$$\vec{V} = \vec{V}^0 + \hat{V}, \quad \vec{P} = \vec{P}^0 + \hat{P}, \quad \vec{B} = \vec{B}^0 + \hat{B}, \quad \rho = \rho^0 + \hat{\rho}. \quad (4)$$

Символом  $\langle 0 \rangle$  в (4)–(7) обозначены равновесные (невозмущенные) величины, а символом  $\langle \wedge \rangle$  — возмущения. Возмущения будем считать малыми и поэтому ограничимся учетом только линейных членов.

В результате, учитывая малость возмущений, из уравнений движения в безразмерных переменных получаем систему уравнений МГД в цилиндрических координатах  $(r, \varphi, z)$  [38, 40, 41]

$$\rho_0 \left[ \frac{\partial \hat{V}_r}{\partial t} + \Omega \frac{\partial \hat{V}_r}{\partial \varphi} + V_z^0 \frac{\partial \hat{V}_r}{\partial z} - 2 \cdot \Omega \cdot \hat{V}_\varphi \right] - \hat{\rho} \Omega^2 R = -\frac{\partial \hat{P}_1}{\partial R} + \frac{B_0}{a} \frac{\partial \hat{B}_r}{\partial \varphi} + B_z^0 \frac{\partial \hat{B}_r}{\partial z} - \frac{2B_0}{a} \hat{B}_\varphi, \quad (5)$$

$$\rho_0 \cdot \left[ \frac{\partial \hat{V}_\varphi}{\partial t} + 2 \cdot \Omega \cdot \hat{V}_z + \Omega \cdot \frac{\partial \hat{V}_\varphi}{\partial \varphi} + V_z^0 \cdot \frac{\partial \hat{V}_\varphi}{\partial z} \right] = -\frac{1}{R} \frac{\partial \hat{P}_1}{\partial \varphi} + \frac{2 \cdot \hat{B}_r \cdot B_0}{a} - \frac{B_0}{a} \cdot \frac{\partial \hat{B}_\varphi}{\partial \varphi} + B_z^0 \cdot \frac{\partial \hat{B}_\varphi}{\partial z}, \quad (6)$$

$$\rho_0 \cdot \left[ \frac{\partial \hat{V}_z}{\partial t} + \Omega \cdot \frac{\partial \hat{V}_z}{\partial \varphi} + V_z^0 \cdot \frac{\partial \hat{V}_z}{\partial z} \right] = -\frac{\partial \hat{P}_1}{\partial z} + \frac{B_0}{a} \cdot \frac{\partial \hat{B}_z}{\partial \varphi} + B_z^0 \cdot \frac{\partial \hat{B}_z}{\partial z}. \quad (7)$$

К уравнениям МГД (5)–(7) необходимо добавить уравнение непрерывности [37, 38]

$$\frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} + \Omega \cdot \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial \varphi} + V_z^0 \cdot \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial z} + \rho_0 \cdot \text{div} \hat{V} = 0. \quad (8)$$

Будем считать процесс развития возмущений адиабатическим, поэтому, пренебрегая диссипативными слагаемыми в уравнении теплопереноса, получаем еще одно уравнение [11, 12]

$$\frac{\partial \hat{P}}{\partial t} + \Omega \cdot \frac{\partial \hat{P}}{\partial \varphi} + V_z^0 \cdot \frac{\partial \hat{P}}{\partial z} + \hat{V}_z \cdot \frac{\partial P^0}{\partial R} + \gamma \cdot P^0 \cdot \text{div} \hat{V} = 0. \quad (9)$$

К полученным уравнениям необходимо также добавить уравнение для индукции магнитного поля

$$\frac{\partial \hat{B}}{\partial t} = \text{rot}[\hat{V}^0 \times \hat{B}] + \text{rot}[\hat{V} \times \hat{B}^0]. \quad (10)$$

Из полученной системы уравнений убеждаемся, что все коэффициенты системы зависят только от радиальной координаты  $R$ , поэтому любую из возмущенных величин  $q(r, z, \varphi, t)$  можно представить в виде

$$q(r, z, \varphi, t) = q(r) \cdot e^{i(m\varphi + k_z z) - i\omega t}.$$

Учитывая это обстоятельство, перепишем систему (5)–(10) в безразмерных переменных

$$-i(\lambda - \eta)W_r - 2W_\varphi = -\frac{\partial \Pi_1}{\partial r} + N^2 q b_r - 2N^2 b_\varphi + \rho \cdot r, \quad (11)$$

$$-i(\lambda - \eta)W_\varphi + 2W_r = -\frac{im\Pi_1}{r} - 2N^2 b_r + N^2 q b_\varphi, \quad (12)$$

$$-i(\lambda - \eta)W_{\hat{y}} = -iv\Pi_1 + N^2qb_z,$$

$$\rho = -\frac{i}{\lambda - \eta} \operatorname{div} \vec{W},$$

$$\Pi = -\frac{i}{\lambda - \eta} \left\{ r \cdot W_r (1 - 2N^2) + \gamma \cdot \left( \Pi_0 + \frac{r^2}{2} (1 - 2N^2) \cdot \operatorname{div} \vec{W} \right) \right\} \quad (13)$$

$$b_r = -\frac{q \cdot W_r}{\lambda - \eta}, \quad b_\varphi = -\frac{1}{\lambda - \eta} [q \cdot W_\varphi + z \cdot \operatorname{div} \vec{V}], \quad b_z = -\frac{1}{\lambda - \eta} [q \cdot W_z + i\beta \cdot \operatorname{div} \vec{W}]. \quad (14)$$

В этих уравнениях введены обозначения

$$\hat{V} = \Omega a \vec{W}; \quad \hat{\rho} = \rho_0 \rho; \quad v = \frac{na}{l}; \quad \hat{P} = \rho_0 \Omega^2 a^2 \Pi; \quad \hat{B} = B_0 \vec{b};$$

$$\beta = \frac{B_z}{B_0}; \quad u = \frac{V_z^0}{\Omega_0}; \quad \eta = m + v \cdot u; \quad q = m + v \cdot \beta; \quad \varpi = \Omega \lambda.$$

Из уравнений (13), (14) следует

$$\Pi_1 = \Pi + \frac{1}{\rho_0 \Omega^2 a^2} (B_\varphi^0 \hat{B}_\varphi + B_z^0 \hat{B}_z) = \Pi - \frac{N^2}{\lambda - \eta} [rqW_\varphi + \beta qW_z + i \cdot (r^2 + \beta^2) \cdot \operatorname{div} \vec{W}]. \quad (15)$$

Ниже ограничимся рассмотрением волн в длинном цилиндре, т.е. в цилиндре, радиус которого значительно меньше его длины. Полагаем, что вертикальное поле больше азимутального, т.е.  $B_z \gg B_0$ , что имеет место в большинстве приложений.

При этом положим, что величина  $\frac{a}{l} \cdot \frac{B_z^0}{B_\varphi^0}$  имеет значения порядка единицы.

Обозначив  $v = \frac{na}{l}$ ,  $k_z = \frac{n}{l}$ , получим  $\frac{a}{l} \cdot \frac{B_z^0}{B_\varphi^0} = v \cdot \beta \approx 1$ . Отсюда также следует, что

$$\beta \approx \frac{1}{v} \gg 1.$$

Проанализируем выражение (15) для  $\Pi_1$ , в котором присутствуют слагаемые, пропорциональные  $N^2 \beta^2 \cdot \operatorname{div} \vec{W}$ . Так как  $\beta^2 \approx \frac{1}{v^2}$ , то, если величина  $N^2 \cdot \beta^2$  не

имеет значение порядка единицы, в нуль должна обращаться величина  $\operatorname{div} \vec{W}$ , но это означало бы, что рассматривается несжимаемая плазма [37, 38]. Поскольку исследуется случай сжимаемой плазмы, величина  $N^2 \cdot \beta^2$  должна иметь значение порядка единицы. Поэтому, если предположить, что величина  $\operatorname{div} \vec{W}$  не равна нулю, необходимо положить  $N^2 \cdot \beta^2 \approx 1$ . Последнее соотношение

равносильно условию, что  $N^2 \approx v^2 \ll 1$ . Поскольку  $N^2 = \frac{B_0^2}{\rho_0 \Omega^2 a^2}$ , а  $\beta^2 = \frac{B_z^2}{B_0^2}$ ,

то в результате получаем

$$N^2 \beta^2 = \frac{B_z^2}{\rho_0 \Omega^2 a^2}.$$

С учетом порядка рассматриваемых величин система уравнений (11)–(13) значительно упрощается и принимает вид

$$-i(\lambda - \eta)W_r - 2W_\varphi + \frac{i \cdot r \cdot \operatorname{div} \vec{W}}{\lambda - \eta} = -\frac{\partial \Pi_1}{\partial r}, \quad (16)$$

$$-i(\lambda - \eta)W_\varphi + 2W_r = -\frac{im\Pi_1}{r}, \quad (17)$$

$$\Pi_1 = -\frac{i}{\lambda - \eta} \left\{ r \cdot W_r + \left[ \frac{\gamma}{2} r^2 + \left( \gamma \cdot \Pi_0^{(i)}(0) + N^2 \beta^2 \right) \right] \cdot \operatorname{div} \vec{W} \right\}. \quad (18)$$

Введем обозначение  $\gamma \cdot \Pi_0^{(i)}(0) + N^2 \cdot \beta^2 = M$  и перепишем уравнение (18) в виде

$$\Pi_1 = -\frac{i}{\lambda - \eta} \left\{ r \cdot W_r + \left[ \frac{\gamma}{2} r^2 + M \right] \cdot \operatorname{div} \vec{W} \right\}. \quad (19)$$

Комбинируя (17) и (19), находим

$$W_\varphi = -\frac{i}{\psi(r)} \left\{ m \cdot r \cdot \left( \frac{\gamma}{2} r^2 + M \right) \frac{dW_r}{dr} + \Phi(r) \cdot W_r \right\}, \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \Pi_1 = & -\frac{i \cdot r^2}{\psi(r)} \left\{ (\lambda - \eta) \cdot \left( \frac{\gamma}{2} r^2 + M \right) \frac{dW_r}{dr} + \right. \\ & \left. + \left[ \left( \frac{\gamma}{2} + 1 \right) r^2 + M \right] \cdot (\lambda - \eta) + 2m \left( \frac{\gamma}{2} r^2 + M \right) \right] \frac{W_r}{r} \right\}. \end{aligned} \quad (21)$$

В (20) и (21) введены новые обозначения

$$\psi(r) = \Gamma \cdot r^2 - M \cdot m^2; \quad \Gamma = (\lambda - \eta)^2 - \frac{m^2 \gamma}{2}; \quad \Phi(r) = Tr^2 + Mm;$$

$$T = m \left( 1 + \frac{\gamma}{2} \right) + 2(\lambda - \eta). \quad (22)$$

Из (19) и (20) следует

$$\operatorname{div} \vec{W} = \frac{1}{\psi(r)} \left[ (\lambda - \eta)^2 \frac{dW_r}{dr} + (\lambda - \eta + m)^2 \frac{W_r}{r} \right], \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\Pi_1}{dr} = & -\frac{i}{\psi(r)} \left\{ (\lambda - \eta) \left( \frac{\gamma}{2} \cdot r^2 + M \right) \cdot r^2 \frac{d^2 W_r}{dr^2} + \left\{ (\lambda - \eta) \left[ \left( \frac{3 \cdot \gamma}{2} + 1 \right) \cdot r^2 + M \right] + \right. \right. \\ & \left. \left. + 2m \left( \frac{\gamma}{2} r^2 + M \right) - \frac{2m^2 M}{\psi(r)} \left[ (\lambda - \eta) \left( \frac{\gamma}{2} r^2 + M \right) \right] \cdot r \frac{dW_r}{dr} \right\} + \left\{ (\lambda - \eta) \left[ \left( \frac{\gamma}{2} + 1 \right) \cdot r^2 - M \right] + \right. \\ & \left. \left. + 2m \cdot \left( \frac{\gamma}{2} r^2 - M \right) - \frac{2m^2 M}{\psi(r)} \left[ \left( \frac{\gamma}{2} + 1 \right) \cdot r^2 + M \right] (\lambda - \eta) + 2m \left( \frac{\gamma}{2} r^2 + M \right) \right\} W_r \right\}. \end{aligned} \quad (24)$$

Подставляя (19)–(24) в (16), получаем дифференциальное уравнение второго порядка для  $W_r$

$$(\lambda - \eta)^2 \left( \frac{\gamma}{2} \cdot r^2 + M \right) \cdot r^2 \frac{d^2 W_r}{dr^2} + \left\{ (\lambda - \eta)^2 \left( \frac{3 \cdot \gamma}{2} r^2 + M \right) - \right.$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{2m^2M}{\psi(r)}(\lambda-\eta)^2\left(\frac{\gamma}{2}r^2+M\right)\left\{r\frac{dW_r}{dr}+\{r^2(\lambda-\eta)^4-(\lambda-\eta)^2\left[(m^2-1)\left(\frac{\gamma}{2}+4\right)\cdot r^2+\right.\right. \\
& \quad \left.\left.+(m^2+1)M\right]-4m\cdot(\lambda-\eta)(r^2+M)-m^2r^2\}-\frac{2m^2M}{\psi(r)}\times\right. \\
& \quad \left.\times\left\{\left[\left(\frac{\gamma}{2}+1\right)\cdot r^2+M\right](\lambda-\eta)^2+2m\cdot(\lambda-\eta)\left(\frac{\gamma}{2}r^2+M\right)\right\}\right\}W_r=0. \quad (25)
\end{aligned}$$

Рассмотрим теперь возмущения в атмосфере, окружающей плазменный цилиндр, т.е. при  $R \geq a$  ( $r \geq 1$ ). Поскольку предполагается, что в невозмущенной атмосфере движение среды и магнитное поле отсутствуют, для возмущений получаем достаточно простую систему уравнений

$$\frac{\rho_0 \cdot d\hat{V}_r}{dt} = -\frac{\partial P_1}{\partial R}, \quad \frac{\rho_0 \cdot d\hat{V}_\varphi}{dt} = -\frac{i \cdot m}{R} P_1, \quad \frac{dP}{dt} + \gamma \cdot P_0^{(e)}(0) \cdot \operatorname{div} \hat{V} = 0.$$

Переходя в этих уравнениях к безразмерным величинам, найдем

$$i\lambda W_r = \frac{\partial \Pi_1}{\partial r}, \quad i\lambda W_\varphi = \frac{i \cdot m}{r} \Pi_1, \quad \Pi_1 = -\frac{i \cdot \gamma}{\lambda} \Pi_0^{(e)}(0) \cdot \operatorname{div} \vec{W}. \quad (26)$$

Исключая в (26)  $W_r$  и  $W_\varphi$ , получаем одно уравнение относительно полного возмущенного давления  $\Pi_1(r)$

$$\frac{d^2 \Pi_1}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{d\Pi_1}{dr} + \left( \frac{m^2}{r^2} + \frac{\lambda^2}{\gamma \cdot \Pi_0^{(e)}(0)} \right) \cdot \Pi_1 = 0. \quad (27)$$

Решение уравнения (27) имеет такой вид [40]:

$$\Pi_1 = C_0 \cdot K_m \left( \frac{\lambda \cdot r}{\sqrt{\gamma \cdot \Pi_0^{(e)}(0)}} \right). \quad (28)$$

Здесь  $K_m \left( \frac{\lambda \cdot r}{\sqrt{\gamma \cdot \Pi_0^{(e)}(0)}} \right)$  — функция Бесселя мнимого аргумента [14], а  $C_0$  — постоянная величина.

Из (26) и (28) следует

$$W_r = -\frac{i \cdot C_0}{\sqrt{\gamma \cdot \Pi_0^{(e)}(0)}} K_m' \left( \frac{\lambda \cdot r}{\sqrt{\gamma \cdot \Pi_0^{(e)}(0)}} \right). \quad (29)$$

Положим, что решение уравнения (25) найдено:  $W_r = F(r)$ . В результате из условия равенства радиальных скоростей при  $r = 1$  получаем

$$C_0 = \frac{i \cdot \sqrt{\gamma \cdot \Pi_0^{(e)}(0)} \cdot F(1)}{K_m' \left( \frac{\lambda}{\sqrt{\gamma \cdot \Pi_0^{(e)}(0)}} \right)}. \quad (30)$$

Из (28) находим  $\Pi_1(1)$  в виде

$$\Pi_1(1) = \frac{i \cdot \sqrt{\gamma \cdot \Pi_0^{(e)}(0)} \cdot F(1)}{K_m' \left( \frac{\lambda}{\sqrt{\gamma \cdot \Pi_0^{(e)}(0)}} \right)} \cdot K_m \left( \frac{\lambda}{\sqrt{\gamma \cdot \Pi_0^{(e)}(0)}} \right). \quad (31)$$

### 3. Резонансные моды

Проанализируем полученные ранее уравнения (20), (21), (25) для  $W_\varphi$ ,  $\Pi_1$  и  $W_r$ .

Убедимся, что при условии  $\psi(r) = \left( (\lambda - \eta)^2 - \frac{m^2 \gamma}{2} \right) \cdot r^2 - M \cdot m^2 = 0$  существуют

резонансные возмущения, при которых энергия вращательного движения цилиндра передается винтовым возмущениям. Это может привести к быстрому разрушению конфигурации. Из полученной системы уравнений вытекает, что резонанс не возникает, если а) вращение отсутствует  $\Omega = 0$ ; б) возмущения не носят винтовой характер, т.е.  $m = 0$ . Переходя в выражении для  $\psi(r)$  к физическим величинам, получаем

$$(\omega - \Omega \cdot \eta)^2 = \frac{m^2}{R^2} \left\{ \frac{\gamma}{\rho_0} \left[ \frac{\rho_0 \Omega^2 R^2}{2} + \Pi_1(0) \right] + \frac{B_z^2}{\rho_0} \right\}. \quad (32)$$

Из (32) видно, что в резонанс вступают винтовые возмущения, частота которых определяется альвеновской вертикальной скоростью и скоростью упругих деформаций, связанной с центробежной силой.

### 4. Нерезонансные возмущения ( $m = 0$ )

Рассмотрим возмущения с  $m = 0$ , которые не вызывают резонанса. Уравнение (25) при  $m = 0$  существенно упрощается и принимает вид

$$\left( \frac{\gamma}{2} r^2 + M \right) \cdot r^2 \frac{d^2 W_r}{dr^2} + \left( \frac{3\gamma}{2} r^2 + M \right) \cdot r \frac{dW_r}{dr} + \left\{ r^2 (\lambda - \eta)^2 + \left( \frac{\gamma}{2} - 4 \right) \cdot r^2 - M \right\} \cdot W_r = 0. \quad (33)$$

Решение уравнения (33) ищем методом Галеркина [11, 40]. Следуя этому методу, используем пробные функции следующего вида:

$$W_r = C_0 r + C_1 (r - r^2) + C_2 (r - r^2)^2 + \dots \quad (34)$$

Весовые функции [14] в соответствии с этим методом выберем в виде

$$(r - r^2), (r - r^2)^2, (r - r^2)^3, \dots \quad (35)$$

При решении (33) методом Галеркина ограничимся только первым приближением. Подставим (34) в (33), умножим результат на (35) и проинтегрируем его от нуля до единицы. В результате получим уравнение

$$C_0 \cdot \frac{1}{6} \left[ (2 - \gamma) + \frac{1}{2} (\lambda - \eta)^2 \right] + C_1 \frac{1}{30} \left[ 4 - (\lambda - \eta)^2 + \frac{7}{4} \gamma + 15M \right] = 0.$$

Отсюда следует

$$C_1 = - \frac{5 \cdot C_0 \cdot \left\{ (2 - \gamma) + \frac{1}{2} (\lambda - \eta)^2 \right\}}{4 - (\lambda - \eta)^2 + \frac{7}{4} \gamma + 15M}.$$

С помощью указанных выше пробных функций найдем

$$\Pi_1 = - \frac{i}{\lambda - \eta} \cdot \frac{A_0 - A_1 (\lambda - \eta)^2}{F_0 - (\lambda - \eta)^2} \cdot C_0, \quad (36)$$

где

$$A_0 = 30 \cdot M^2 + M \cdot \left( \frac{27}{2} \gamma + 33 \right) + \left( -\frac{3}{4} \cdot \gamma^2 + \frac{43}{4} \cdot \gamma + 4 \right);$$

$$A_1 = \frac{1}{2} \cdot M + \frac{1}{4} \cdot \gamma - 1;$$

$$F_0 = 4 + \frac{7}{4} \cdot \gamma + 15 \cdot M.$$

Сравнивая радиальные скорости и полное давление при  $r = 1$  из (29), (31), (34) и (36), получим дисперсионное уравнение для определения волновых чисел  $\lambda$ . Ранее рассмотрены возмущения при  $r \geq 1$ . Однако выражения для радиальной скорости и давления при  $r \geq 1$  определены в бесселевых функциях и поэтому требуют сложного численного расчета. Между тем, как и для  $r \leq 1$ , ограничимся грубым приближением с помощью метода Галеркина. Поэтому в первом приближении используем и для  $r \geq 1$  этот же метод.

Выберем пробные функции в виде

$$W_r = \frac{D_0}{r} + \frac{D_1}{r^2}(r-1) + \frac{D_2}{r^3}(r-1)^2 + \dots, \quad D_i = \text{const}, \quad (37)$$

а весовые функции — в виде  $\frac{1}{r^2}(r-1)$ ,  $\frac{1}{r^3}(r-1)^2$ , ... .

Подставляя  $W_r$ ,  $\frac{dW_r}{dr}$  в (26) и полагая  $m = 0$ , найдем

$$D_1 = \frac{\frac{3}{2} \cdot \frac{\lambda^2}{\gamma \cdot \Pi_0^{(e)}} \cdot D_0}{\frac{9}{20} - \frac{\lambda^2}{\gamma \cdot \Pi_0^{(e)}}}. \quad (38)$$

После этого находим

$$\Pi_1 = -\frac{i \cdot 1,5\lambda}{\frac{9}{20} - \frac{\lambda^2}{\gamma \cdot \Pi_0^{(e)}}} \cdot D_0. \quad (39)$$

Учитывая, что  $C_0 = W_r(1) = D_0$ , получим дисперсионное уравнение

$$\frac{1}{(\lambda - \eta)} \cdot \frac{A_0 - (\lambda - \eta)^2 \cdot A_1}{F_0 - (\lambda - \eta)^2} - \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{1,5\lambda^2}{\frac{9}{20} - \frac{\lambda^2}{\gamma \cdot \Pi_0^{(e)}}} = 0. \quad (40)$$

Параметр  $\eta$  в (40), при условии что  $m = 0$ , равен  $\frac{na}{l} \cdot \frac{V_z^0}{\Omega a} = v \cdot U$ . Поскольку  $v$  очень мало, учитывать этот параметр нужно только в том случае, если цилиндр движется вверх с очень большой скоростью, которая должна быть намного больше скорости азимутального вращения. Если это не так, то этим параметром можно пренебречь. При этом порядок уравнения (40) уменьшится.

Рассмотрим случай сравнительно небольшой вертикальной скорости цилиндра  $V_z^0 \approx \Omega a$ . Тогда уравнение (40) примет вид

$$\delta_4 \lambda^4 - \delta_2 \lambda^2 + \delta_0 = 0, \quad (41)$$

где

$$\begin{aligned} \delta_4 &= 1,5 + [0,5M + 0,25\gamma - 2] \frac{1}{\gamma \cdot \Pi_0^{(e)}} = \frac{1}{\gamma \cdot \Pi_0^{(e)}} \left[ 1,5 \left( M + \frac{\gamma}{2} \right) + 1,5 N^2 \beta^2 \left( \frac{\gamma}{2} - 1 \right) + \right. \\ &\quad \left. + [0,5M + 0,25\gamma - 2] \right] = \frac{1}{\gamma \cdot \Pi_0^{(e)}} \left[ 1,5 N^2 \beta^2 \left( \frac{\gamma}{2} - 1 \right) + [2M + \gamma - 2] \right] = \hat{M}, \\ \delta_2 &= \frac{1}{\gamma \cdot \Pi_0^{(e)}} \left\{ 52,7 \cdot M^2 + M \left[ 38,1 + 38,8\gamma + 22,9 N^2 \beta^2 \left( \frac{\gamma}{2} - 1 \right) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + (-0,756\gamma^2) + 13,3\gamma + 4 + N^2 \beta^2 (0,056\gamma^2 - 2,44\gamma - 5,1) \right] \right\}, \\ \delta_0 &= \frac{9}{20} [30M^2 + M(13,5\gamma + 18) + (9\gamma - 0,75\gamma^2)]. \end{aligned}$$

Представим уравнение (41) так:

$$\lambda^4 + a_1 \cdot \lambda^2 + b_1 \cdot \lambda + c_1 = 0. \quad (42)$$

Тогда отображение параметров дисперсионного уравнения (41) в канонические параметры уравнения (42) имеет вид

$$\begin{aligned} \hat{\delta}_4 &= 1, \\ a_1 &= -\hat{\delta}_2 = \frac{1}{\hat{M}} \{ 52,7 \cdot M + M \cdot [38,1 + 38,9 \cdot \gamma + 4 + 13,3 \cdot \gamma - 0,755 \cdot \gamma^2 + \\ &\quad + N^2 \beta^2 (0,056\gamma^2 + 9,06\gamma - 28,1)] \}, \\ b_1 &= 0, \\ c_1 &= \hat{\delta}_0 = \frac{9\gamma \cdot \Pi_0^{(e)}}{20 \cdot \hat{M}} [30 \cdot M^2 + M \cdot (13,5\gamma + 18) + 9\gamma - 0,75\gamma^2]. \end{aligned} \quad (43)$$

Уравнение (42) определяет особое многообразие катастрофы коразмерности три (параметры  $a_1, b_1, c_1$ ) — «ласточкин хвост» теории особенностей дифференцируемых отображений [42–45] в каноническом виде.

В этом случае уравнение (41) примет вид

$$\begin{aligned} \lambda^4 + \frac{1}{\hat{M}} \{ 52,7 \cdot M + M \cdot [38,1 + 38,9 \cdot \gamma + 4 + 13,3 \cdot \gamma - 0,755 \cdot \gamma^2 + \\ + N^2 \beta^2 (0,056\gamma^2 + 9,06\gamma - 28,1)] \} \cdot \\ \cdot \lambda^2 + \frac{9\gamma \cdot \Pi_0^{(e)}}{20 \cdot \hat{M}} [30 \cdot M^2 + M \cdot (13,5\gamma + 18) + 9\gamma - 0,75\gamma^2] = 0. \end{aligned}$$

Особое многообразие катастрофы коразмерности три «ласточкин хвост» ассоциируем с полученным дисперсионным уравнением (41). Особое многообразие

катастрофы коразмерности три теории особенностей дифференцируемых отображений, катастрофы «ласточкин хвост» в канонических параметрах (42) определим из системы уравнений

$$\begin{cases} \lambda^4 + a_1 \cdot \lambda^2 + b_1 \cdot \lambda + c_1 = 0, \\ 4\lambda^3 + 2a_1 \cdot \lambda + b_1 = 0, \\ 6\lambda^2 + a_1 = 0, \\ \lambda = 0. \end{cases}$$

Отсюда в канонических параметрах получаем  $a_1 = b_1 = c_1 = 0$  — точка особенности коразмерности три — «ласточкин хвост».

Особые многообразия коразмерности два — «сборка» в канонических параметрах катастрофы «ласточкин хвост», определим из системы уравнений

$$\begin{cases} \lambda^4 + a_1 \cdot \lambda^2 + b_1 \cdot \lambda + c_1 = 0, \\ 4\lambda^3 + 2a_1 \cdot \lambda + b_1 = 0, \\ 6\lambda^2 + a_1 = 0. \end{cases}$$

В результате получим уравнение для особых многообразий коразмерности два — «сборка»:

$$c_1 = \frac{1}{24} a_1 (2a_1 - 27b_1^2) = \frac{1}{12} a_1^2 - \frac{9}{8} a_1 b_1^2.$$

Из последнего уравнения заметим, что особые точки коразмерности два находятся в нижней полуплоскости графика на рис. 1,  $a$  — сечение особых многообразий катастрофы коразмерности три «ласточкин хвост».

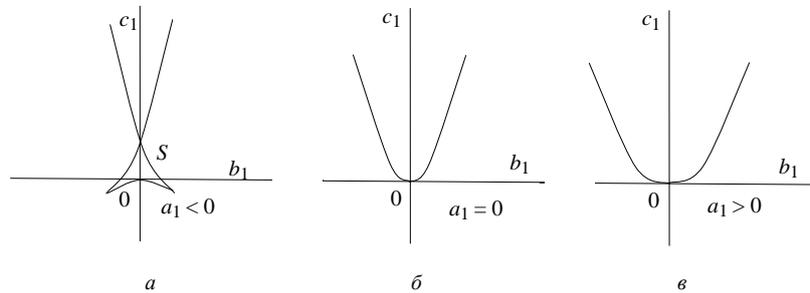


Рис. 1

Можно показать, что кривая самопересечения особых многообразий катастрофы коразмерности один «складка» в канонических параметрах (42) задается уравнением

$$a_1^2 = 4c_1. \quad (44)$$

Особые многообразия особенностей коразмерности один — «складка», определим из системы уравнений

$$\begin{cases} \lambda^4 + a_1 \cdot \lambda^2 + b_1 \cdot \lambda + c_1 = 0, \\ 4\lambda^3 + 2a_1 \cdot \lambda + b_1 = 0. \end{cases}$$

Они имеют вид

$$b_1 (a_1^2 + 12c_1) [3b_1 ((2a_1^2 - 8c_1)a_1 + 9b_1^2 - 2a_1 b_1 (a_1^2 + 12c_1))] - 4c_1 ((2a_1^2 - 8c_1)a_1 + 9b_1^2)^2 = 0.$$

Эти особые многообразия отделяют область действительных корней уравнения (42) — область устойчивости изучаемой конфигурации в общем случае, и в канонических параметрах особенности  $(a_1, b_1, c_1)$  могут быть представлены тремя характерными сечениями (рис. 1, а–в). Область устойчивости рассматриваемой конфигурации в изучаемом приближении, дисперсионное уравнение (41), представлена на рис. 1, а, выделенный отрезок оси  $\langle c_1 \rangle$ , отрезок  $0S$ .

В окрестности  $a_1 \approx 0$ , причем  $a_1 = -\varepsilon$  ( $\varepsilon$  — малая положительная величина), по всей вероятности, при  $b_1 \neq 0$  существует «малая» двумерная область устойчивости изучаемой плазменной конфигурации.

С учетом (43) получим условия устойчивости  $a_1 > 0$ ,  $c_1 > 0$ ,  $c_1 < \frac{1}{4}a_1^2$ , что для биквадратного уравнения в обозначениях (41) соответствует условиям (44).

Легко убедиться, что уравнение (41) имеет только действительные корни, если  $\delta_0 > 0$ ,  $\delta_2^2 - 4\delta_4\delta_0 > 0$ ,  $\delta_2 > 0$ . Учитывая, что  $M = \gamma\Pi_0^{(e)} + N^2\beta^2 > N^2\beta^2$ ,  $N^2\beta^2 > 0$ ,  $\gamma \geq 1$ , после некоторых вычислений можно показать, что все эти три неравенства действительно имеют место.

Таким образом, волновые процессы при  $m = 0$  могут при малых возмущениях быть устойчивыми.

### 5. Второй случай нерезонансных возмущений ( $\Omega = 0$ )

Рассмотрим еще один случай возмущений в сжимаемой плазме. Будем считать, что рассматриваемый плазменный цилиндр не вращается ( $\Omega = 0$ ), а только движется вертикально вверх со скоростью  $V_z^0 = V^0$ . Тогда магнитное поле внутри цилиндрической трубки имеет вид

$$B_\varphi = \frac{B_0 R}{a}, \quad B_z = B_z^0, \quad \beta = \frac{B_z^0}{B_\varphi^0}.$$

Равновесное состояние плазмы вне цилиндра удовлетворяет условиям

$$B_\varphi = B_z = B_r = 0, \quad P_0^{(e)} = P_1^{(e)} = \text{const}, \quad \rho = \rho_0^{(e)} = \mu \rho_0^{(i)} = \text{const},$$

где  $\mu = \frac{\rho_0^{(e)}}{\rho_0^{(i)}}$ .

Внутри плазменного цилиндра (при  $R \leq a$ ) справедливы уравнения

$$\frac{\partial P_{10}^{(i)}}{\partial R} + \frac{B_\varphi^2}{R} = 0; \quad P_{10}^{(i)} = P_{10}^{(i)}(0) - \frac{1}{2} B_0^2 \frac{R^2}{a^2}; \quad P_{10}^{(i)} = P_0^{(i)} + \frac{B_z^2 + B_\varphi^2}{2}.$$

Отсюда следует

$$P_0^{(i)} = P_{10}^{(i)} - \frac{B_z^2 + B_\varphi^2}{2} = P_1^0(0) - \frac{B_0^2 R^2}{a^2} - \frac{B_z^2}{2} = P_1^0(0) - \frac{B_z^2}{2} - \frac{B_0^2 R^2}{a^2}.$$

Поскольку  $P_1^{(i)}(0) = P_0^{(i)}(0) + \frac{B_z^2}{2}$ , получим  $P^{(i)} = P^{(i)}(0) - \frac{B_0^2 R^2}{a^2}$ .

Перейдем к безразмерным переменным. В качестве характерной скорости среды выберем вертикальную скорость  $V_z^0$  и введем обозначения

$$\frac{B_0}{\sqrt{\rho_0} \cdot V_z^0} = \mathfrak{G}, \quad \Pi_0^{(i)} = \Pi_0^{(i)}(0) - \mathfrak{G}^2 r^2.$$

Поскольку на границе цилиндра при  $R = a$  полные давления должны быть равны, справедливы соотношения  $P_{10}^{(i)}(0) - \frac{1}{2} B_0^2 = P_{10}^{(e)}(0) = P_0^{(e)}$ ,  $P_1^{(e)}(1) = P_1^{(i)}(1)$ ,

$$P_0^{(i)}(0) - \frac{1}{2} B_0^2 + \frac{B_z^2}{2} = P_0^{(e)}.$$

В безразмерном виде получаем

$$\Pi_0^{(i)}(0) = \Pi_0^{(e)} + \frac{1}{2} \mathfrak{G}^2 (1 - \beta^2).$$

Окончательно получим равенство

$$\Pi_0^{(i)}(r) = \Pi_0^{(e)} + \frac{1}{2} \mathfrak{G}^2 (1 - \beta^2 - 2r^2).$$

Теперь рассмотрим возмущения. Вне цилиндра ( $R \geq a$ ) возмущения найдены ранее (см. (28)–(31))

$$\Pi_1(r) = - \frac{i \cdot \sqrt{\gamma \cdot \Pi_0^{(e)}} \cdot F(1)}{K_m' \left( \frac{\lambda}{\sqrt{\gamma \cdot \Pi_0^{(e)}}} \right)} \cdot K_m \left( \frac{\lambda \cdot r}{\sqrt{\gamma \cdot \Pi_0^{(e)}}} \right), \quad F(1) = W_e^{(i)}(1),$$

$$W_r = - \frac{i \cdot C_0}{\sqrt{\gamma \cdot \Pi_0^{(e)}}} K_m' \left( \frac{\lambda \cdot r}{\sqrt{\gamma \cdot \Pi_0^{(e)}}} \right), \quad C_0 = - \frac{i \cdot \sqrt{\gamma \cdot \Pi_0^{(e)}} \cdot F(1)}{K_m' \left( \frac{\lambda}{\sqrt{\gamma \cdot \Pi_0^{(e)}}} \right)}.$$

Рассуждая, как и ранее, убедимся, что внутри цилиндра ( $R \leq a$ ) физический смысл имеют только слагаемые, для которых справедливо соотношение  $\mathfrak{G}^2 \cdot \beta^2 \approx 1$  или  $\mathfrak{G} \approx v \approx \frac{1}{\beta}$ .

Учитывая это, получим упрощенную систему уравнений для возмущений внутри цилиндра

$$\begin{cases} i\lambda W_r = \frac{d\Pi_1}{dr}, \\ \lambda W_\varphi = \frac{m\Pi_1}{r}, \\ -i\lambda \Pi_0^{(e)} + \gamma \cdot (\Pi_0^{(e)} - \frac{\mathfrak{G} \cdot \beta^2}{2}) \cdot \text{div} \vec{W} = 0. \end{cases} \quad (45)$$

Обозначим  $\Pi_0^{(e)} - \frac{\mathfrak{G} \cdot \beta^2}{2} = S$ . Тогда из (45) получаем уравнение

$$\frac{d^2 \Pi_1}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{d\Pi_1}{dr} - \left( \frac{m^2}{r^2} + \frac{\lambda^2}{\gamma \cdot S} \right) \cdot \Pi_1 = 0. \quad (46)$$

Решая (46), получаем [39]

$$\Pi_1 = L_2 \cdot I_m \left( \frac{\lambda \cdot r}{\sqrt{\gamma \cdot S}} \right), \quad (47)$$

$$W_r = -L_2 \cdot i \cdot \frac{1}{\sqrt{\gamma \cdot S}} \cdot I_m' \left( \frac{\lambda \cdot r}{\sqrt{\gamma \cdot S}} \right). \quad (48)$$

Сравнивая (28), (47) и (29), (48) и используя условия «сшивки» на тангенциальном разрыве, получим при  $R = a$  ( $r = 1$ )

$$\Pi_1^{(i)}(1) + \left( \frac{\partial \Pi_{10}^{(i)}}{\partial r} \right)_{r=1} \cdot \xi_r^{(i)} = \Pi_1^{(e)}(1),$$

$$W_r^{(i)}(1) = V_r^{(e)}(1), \quad V_r^{(i)} = -i \cdot \lambda \cdot \xi_r^{(i)},$$

$$L_0 \cdot K_m \left( \frac{\lambda}{\sqrt{\gamma \cdot \Pi_0^{(e)}}} \right) = L_2 \cdot I_m \left( \frac{\lambda}{\sqrt{\gamma \cdot S}} \right), \quad (49)$$

$$-\frac{i \cdot L_0}{\sqrt{\gamma \cdot \Pi_0^{(e)}}} K_m' \left( \frac{\lambda}{\sqrt{\gamma \cdot \Pi_0^{(e)}}} \right) = -\frac{i \cdot L_2}{\sqrt{\gamma \cdot S}} \cdot I_m' \left( \frac{\lambda}{\sqrt{\gamma \cdot S}} \right). \quad (50)$$

Для того чтобы величины  $L_0$  и  $L_2$  отличались от нуля, определитель уравнений (49), (50) должен быть равен нулю. Отсюда получаем дисперсионное уравнение

$$\frac{1}{\sqrt{\gamma \cdot \Pi_0^{(e)}}} \cdot I_m' \left( \frac{\lambda}{\sqrt{\gamma \cdot S}} \right) \cdot K_m \left( \frac{\lambda}{\sqrt{\gamma \cdot \Pi_0^{(e)}}} \right) - K_m \left( \frac{\lambda}{\sqrt{\gamma \cdot \Pi_0^{(e)}}} \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{\gamma \cdot S}} \cdot I_m \left( \frac{\lambda}{\sqrt{\gamma \cdot S}} \right) = 0, \quad (51)$$

$$\text{где } S = \Pi_0^{(e)} - \frac{1}{2} \vartheta \cdot \beta^2.$$

Уравнение (51) в общем случае требует численного решения. Для приближенного решения, как и ранее, воспользуемся методом Галеркина [ 40 ].

В области  $R \geq a$  ( $r \geq 1$ ) решение точно совпадает с решением в (37)–(39).

Поэтому  $W_r$  берем в виде  $W_r = \frac{D_0}{r} + \frac{D_1}{r^2}(r-1)$  и используем весовые функции

$$\frac{1}{r^2}(r-1), \frac{1}{r^4}(r-1)^2, \dots$$

В области  $R \leq a$  ( $r \leq 1$ ) пробные функции имеют вид  $W_r = L_0 r + L_1(r-r^2) + L_2(r-r^2)^2$ , а весовые функции —  $(r-r^2)$ ,  $(r-r^2)^2$ .

Следуя подходу, изложенному в разд. 4, получаем дисперсионное уравнение

$$\frac{4 + 0,67m^2 - 0,405 \frac{\lambda^2}{\gamma \cdot S}}{23,3m^2 + \frac{\lambda^2}{\gamma \cdot S}} + \frac{0,5 \frac{\lambda^2}{\gamma \cdot \Pi_0^{(e)}} - \frac{1}{60}(m^2 - 1)}{\frac{\lambda^2}{\gamma \cdot \Pi_0^{(e)}} - \frac{1}{20}(m^2 - 1)} = 0, \quad (52)$$

$$\text{где } S = \Pi_0^{(e)} - \frac{1}{2} \vartheta \cdot \beta^2.$$

Преобразуя (52), получаем

$$\beta_4 \lambda^4 - \beta_2 \lambda^2 + \beta_0 = 0, \quad (53)$$

$$\text{где } \beta_4 = \frac{0,095}{\gamma^2 \Pi_0^{(e)} S}, \quad \beta_2 = \frac{0,00358(m^2 - 1)}{\gamma S} + \frac{4 + 12,32m^2}{\gamma \Pi_0^{(e)}}, \quad \beta_0 = -(m^2 - 1)(0,2 + 0,355m^2),$$

$m \geq 1$ .

Заметим, что возмущения будут неустойчивыми с положительным инкрементом, если  $\beta_2 > 0$ , что и имеет место в данном случае.

При  $m = 1$  уравнение (53) упрощается

$$\lambda^2 \cdot [\lambda^2 + \gamma \cdot (\Pi_0^{(e)} - 0,59 \cdot \beta^2) \cdot 172] = 0.$$

В системе будут возникать неустойчивые колебания при  $m = 1$ , если внешнее давление плазмы больше магнитного давления в цилиндре, т.е. при выполнении неравенства  $P^{(e)} > \frac{B_z^2}{2}$ .

### Заключение

Исследовались малые возмущения параметров во вращающемся плазменном намагниченном цилиндре с учетом сжимаемости плазмы в самом цилиндре и окружающей плазменной атмосфере. Показано, что возникающая в цилиндре центробежная сила способствует возникновению резонансных возмущений, которые могут приводить к распаду конфигурации. Такое явление может происходить в солнечной короне при подъеме спикулы, захваченной вихревой атмосферой. Атмосферные вихри могут не только способствовать подъему и деформации поверхности спикулы, но и привести ее во вращение, вызывающее резонанс, который приводит к пересечению магнитных силовых линий и разрыву спикулы с выделением энергии. Это может быть одной из причин, по которой часть спикул не падают обратно, а взрываются, выделяя свою энергию коронарной атмосфере.

Рассмотрены также случаи, когда резонанс не возникает. Случай, когда  $m = 0$ , — резонанс не возникает и малые колебания устойчивы. Рассмотрен также случай, когда плазма в цилиндре не вращается. Показано, что когда внешнее давление плазменной атмосферы превышает магнитное давление плазмы внутри цилиндра, создаются условия для возникновения волн в цилиндре с возрастающей амплитудой.

Работа частично поддержана Комплексной программой НАН Украины по физике плазмы.

*Ю.П. Ладіков-Роев, В.С. Набівач*

### ЗБУРЕННЯ ХВИЛЬ В ПЛАЗМОВОМУ ЗАМАГНІЧЕННЬОМУ ЦИЛІНДРІ, ЩО ОБЕРТАЄТЬСЯ ТА ОТОЧЕНИЙ ПЛАЗМЕННОЮ АТМОСФЕРОЮ З УРАХУВАННЯМ СТИСЛИВОСТІ

В циліндричній системі координат  $(R, \varphi, z)$  досліджується питання розповсюдження гвинтових мод у довгому плазмовому циліндрі зі струмом і азимутним магнітним полем  $B_\varphi \sim R/a$ , де  $a$  — радіус циліндра, та постійним вертикальним полем  $B_z$ . Передбачається, що всередині циліндра плазма рухається зі швидкостями  $V_\varphi = \Omega R/a$ ,  $V_z = \text{const}$ , а за його границями рух середовища та

магнітне поле відсутні. Показано, що за певних умов має місце ефект генерації резонансних збурень, які можуть призводити до руйнування конфігурації плазми. Встановлено, що в цьому випадку енергія обертового руху циліндра переходить в енергію гвинтових збурень. Детально проаналізовано гвинтові моди, що не призводять до резонансних подій. Результати роботи можна застосувати для інтерпретації даних про поведінку магнітних трубок на Сонці.

*Yu.P. Ladikov-Royev, V.E. Nabivach*

## WAVES PERTURBATION IN ROTATED PLASMA MAGNETIC CYLINDER SURROUNDED BY PLASMA ATMOSPHERE WITH TAKING INTO ACCOUNT COMPRESSION

In the cylindrical coordinate system  $(R, \varphi, z)$ , the problem of the motion of helical modes in a long current carrying plasma cylinder with an azimuthal magnetic field  $B_\varphi \sim R/a$ , where  $a$  — is the radius of the cylinder, and a constant vertical field  $B_z$  is investigated. It is assumed that inside the cylinder plasma moves with velocities  $V_\varphi = \Omega R/a$ ,  $V_z = \text{const}$ , and beyond its boundary the motion of the environment and the magnetic field are absent. It is shown that, under certain conditions, the generation of resonance disturbances takes place, which can lead to the destruction of the plasma configuration. It is established that in this case the energy of the rotational motion of the cylinder becomes the energy of helical perturbations. The work also analyzes in detail the helical modes, which do not lead to resonant events. The results of the work are applicable to the interpretation of data on the behavior of magnetic tubes on the Sun.

1. Hain K. Zur stabilität zylinder symmetrischer plasma konfigurationen mit volumenströmen / Naturforsch. — 1958. — Bd 13a. — P. 936–940.
2. Chandrasekar S. Hydrodynamic and hydromagnetic stability. — England : Cambridge University Press, 1961. — 652 p.
3. Филиппов Б.П. Эруптивные процессы на Солнце. — М. : Физматлит, 2007. — 216 с.
4. Кенро Миямото. Основы физики плазмы и управляемого синтеза. — М. : Физматлит, 2007. — 424 с.
5. Прист Э.П. Солнечная магнитогидродинамика. — М. : Мир, 1985. — 590 с.
6. Гуссенс М. Магнитогидродинамические волны и волновой нагрев неоднородной плазмы / В кн.: Космическая магнитная гидродинамика. — М. : Мир, 1995. — С. 144–178.
7. Кременецкий И.А., Черемных О.К. Космическая погода: механизмы и проявления. — Киев : Наук. думка, 2009. — 144 с.
8. Робертс Б. Магнитогидродинамические волны на Солнце / В кн.: Космическая магнитная гидродинамика. — М. : Мир, 1995. — С. 112–143.
9. Edwin P.M., Roberts B. Wave propagation in magnetic cylinder // Solar Phys. — 1983. — **88**. — P. 179–191.
10. Bennet K., Roberts B., Narain V. Waves in twisted magnetic flux tubes // Ibid. — 1999. — **185**. — P. 41–95.
11. Erdelyi R., Fedun V. Linear MHD sausage waves in compressible magnetically twisted flux tubes // Ibid. — 2007. — **246**. — P. 101–118.
12. Седов Л.И. Механика сплошной среды. Т. 1. — М. : Наука, 1973. — 536 с.
13. Stepanov A.V., Shibasaki K., Kopylova Yu.G., Tsap Yu.T. MHD — oscillations of Coronal loops and diagnostics of flare plasma // Solar Physics with Nobeyama Radioheliograph: Proceedings of Nobeyama Symposium. — 2004, NSRO. — Report N 1. — P. 23–31.
14. Erdelyi R., Fedun V. Magneto-acoustic waves in compressible twisted flux tube // Solar Phys. — 2010. — **263**. — P. 63–85.
15. Ruderman M.S. Propagation kink waves in thin twisted magnetic tubes with continuous equilibrium magnetic field // Astron. and Astrophys. — 2015. — **575**, A 130. — P. 1–11.
16. Ladikov-Roev Y.P., Loginov A.A., Cheremnykh O.K. Nonstationary model of solar spicula // Journal of Automation and Information Sciences. — 2014. — **46** (10). — P. 20–29.
17. Ladikov-Roev Yu.P., Cheremnykh S.O., Yatsenko V.A. Axisymmetric force-free magnetic configurations in plasma flux // Journal of Automations and Informations Sciences. — 2013. — **45**, N 4. — P. 45–58.

18. *Cheremnykh O.K., Klimushkin D.Yu., Kostarev D.V.* On the structure of azimuthally small-scale ULF oscillations of hot space plasma in a curved magnetic field. Modes with continuous spectrum // *Kinematics and Physics of Celestial Bodies*. — 2014. — **30**, N 5. — P. 209–222.
19. *Appert K., Gruber R., Vaclavic J.* Continuous spectra of a cylindrical magnetohydrodynamic equilibrium // *Physics of Fluids*. — 1974. — **17**, N 7. — P. 1471–1472.
20. *Зуева Н.М., Соловьев Л.С.* Нелинейная винтовая МГД-неустойчивость // *Магнитная гидродинамика*. — 1977. — № 3. — С. 5–22.
21. *Трубников Б.А.* Теория плазмы. — М. : Энергоатомиздат, 1996. — 464 с.
22. *Загородний А.Г., Черемных О.К.* Введение в физику плазмы. — Киев : Наук. думка, 2014. — 696 с.
23. *Cheremnykh O.K.* On the theory of small-scale modes in the cylindrical column // *Kinematics and Physics of Celestial Bodies*. — 2015. — **31**, N 5. — P. 213–224.
24. *Бейтман Г.* МГД-неустойчивости. — М. : Энергоиздат, 1982. — 200 с.
25. *Сайдем Б.* Устойчивость самосжатого линейного разряда // *Труды второй международной конференции по мирному использованию атомной энергии*. — М. : Атомиздат, 1959. — С. 89–93.
26. *Шафранов В.Д.* К вопросу о гидромагнитной устойчивости плазменного шнура с током в сильном магнитном поле // *ЖТФ*. — 1970. — **40**. — С. 241–253.
27. *Кадомицев Б.Б.* Гидромагнитная устойчивость плазмы // В кн.: *Вопросы теории плазмы*. Вып. 2. — М. : Госатомиздат, 1963. — С. 132.
28. *Cheremnykh O.K., Revenchuk S.M.* Dispersion relations for the Suydam problem // *Plasma Phys. and Contr. Fusion*. — 1992. — **34**, N 1. — P. 55–75.
29. *Burdo O.S., Cheremnykh O.K., Revenchuk S.M., Pustovitov V.D.* General geometric dispersion relations for toroidal plasma configuration // *Ibid*. — 1994. — **36**, N 4. — P. 641–656.
30. *Andrushchenko Zh.N., Cheremnykh O.K., Edenstrasser J.W.* Global Alfvén eigenmodes in stellarator with trapped energetic particles // *Phys. of Plasmas*. — 1999. — **6**, N 6. — P. 2462–2471.
31. *Ладиков-Роев Ю.П.* Магнито-вихревые кольца // *Изв. АН СССР. Сер. Механика и машиностроение*. — 1960. — № 4. — С. 7–13.
32. *Ладиков-Роев Ю.П.* Некоторые задачи динамики магнитно-вихревых конфигураций // *Прикладная математика и механика*. — 1960. — **24**, № 5. — С. 897–905.
33. *Ladikov-Roev Yu.P.* The existence and motion of magneto-vortex rings in the atmosphere // *Proc. of the Steklov Institute of Mathematics*. — 1991. — **1**. — P. 73–79.
34. *Cheremnykh O.K.* On the motion of vortex rings in an incompressible media // *Nelineinaya Dinamika [ Russian Journal of Nonlinear Dynamics]*. — 2008. — **4**, N 4. — P. 417–428.
35. *Andrushchenko Z.N., Revenchuk S.M., Cheremnykh O.K.* Steady MHD flows in a cylindrical plasma column // *Plasma Physics Reports*, — 1993. — **19**, N 2. — P. 241–251.
36. *Cheremnykh O.K., Andrushchenko Z. M., Edenstrasser J.W., Taranov V.B.* Relaxation of non-ideal magnetohydrodynamic plasma in cylindrical column // *Physics of Plasmas*. — 1994. — **1**, N 8. — P. 2525–2530.
37. *Ладиков-Роев Ю.П., Черемных О.К.* Математические модели сплошных сред. — Киев : Наук. думка, 2010. — 551 с.
38. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика. Т. 6. Гидродинамика. — М. : Наука, 1986. — 736 с.
39. *Двайт Г.Б.* Таблицы интегралов и другие математические формулы. — М. : Наука, 1977. — 224 с.
40. *Флетчер К.* Численные методы на основе метода Галеркина. — М. : Мир, 1988. — 352 с.
41. *Ладиков Ю.П.* Стабилизация процессов в сплошных средах. Сер. : Теоретические основы технической кибернетики. — М. : Наука, 1978. — 432 с.
42. *Постон Т., Стюарт И.* Теория катастроф и ее приложения. — М. : Мир, 1980. — 607 с.
43. *Набивач В.Е.* Теория катастроф и особенности корней характеристических уравнений. — Николаев: Автоматика-2013. — С. 58–59.
44. *Nabivach V.* Root distribution of characteristic equations up to fourth order // *Soviet journal of automation and information sciences*. — 1985. — **17**(6). — P. 12–15.
45. *Набивач В.Е.* Теория катастроф и управление рисками: концептуальные принципы // *Международный научно-технический журнал «Проблемы управления и информатики»*. — 2013. — № 3. — С. 16–26.

Получено 15.05.2018