

УДК 517.9:62.50

Ю.П. Ладиков-Роев, А.А. Логинов, В.Е. Набивач

**ГЕНЕРАЦИЯ МАГНИТОГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ
ВОЛН В УПРОЩЕННОЙ МОДЕЛИ
МАГНИТОСФЕРНОГО ХВОСТА ЗЕМЛИ***

Ключевые слова: магнитное поле Земли, магнитогидродинамические волны, дисперсионное уравнение, теория катастроф, устойчивость.

Введение

В настоящей работе изучаются магнитогидродинамические (МГД) волны в системе «неподвижный плоский плазменный слой–внешняя движущаяся плазма». Такая задача характерна для геомагнитного хвоста, обтекаемого солнечным ветром [1–3]. Из гидродинамики известно, что возмущения в сверхзвуковых течениях, которые совпадают по направлению со скоростью, могут иметь устойчивые режимы движения [4]. С учетом этого считается, что течение плазмы, которое обычно является сверхзвуковым на границе геомагнитного хвоста, также может иметь устойчивые режимы движения [5]. Поэтому основное внимание в работе уделено теоретическим и математическим аспектам исследования волн, генерируемых внутри плазменного слоя, и описанию их влияния на внешнюю, движущуюся вокруг слоя, плазму. Мотивацией для такого исследования является факт обнаружения волновых процессов вблизи геомагнитного хвоста в рамках многоспутникового проекта CLUSTER [6, 7]. Эти волны, за редким исключением [1, 5, 8–11], не исследовались ни экспериментально, ни теоретически, в отличие от МГД волн, распространяющихся внутри замкнутой части магнитного поля Земли [12–17]. Можно ожидать, что эти волны играют важную роль в процессах взаимодействия солнечного ветра с геомагнитным хвостом [5, 18].

1. Модель равновесного состояния

Рассмотрим плоский слой плазмы толщиной $2h$, обтекаемый сверху и снизу потоком плазмы со скоростью V_0 (рис. 1). Внутри слоя в верхней части $0 < x < h$ присутствует продольное магнитное поле $B_z = B_0 \frac{x}{h}$. В нижнем слое $-h \leq x \leq 0$ магнитное поле направлено в противоположную сторону, $B_z = -B_0 \frac{x}{h}$.

* Работа выполнена при частичной поддержке Целевой комплексной программы НАН Украины по физике плазмы.

© Ю.П. ЛАДИКОВ-РОЕВ, А.А. ЛОГИНОВ, В.Е. НАБИВАЧ, 2019

Ниже исследуем МГД возмущения, возникающие в рассматриваемом слое плазмы и в его окружении. Поставленная задача является простейшим аналогом магнитосферного хвоста Земли, обтекаемого солнечным ветром.

В невозмущенном состоянии полное давление в слое равно $P_{10}^i = \frac{B_z^2}{2} + P_0^i$, где P_0^i — гидродинамическое давление плазмы [19]. Вне плазменного слоя, ввиду постоянства скорости потока, невозмущенное давление постоянное и равно P_0^e . Из-за отсутствия скорости в слое, $P_{10}^i = \text{const}$. На поверхности слоя имеет место равенство давлений [20].

$$P_{10}^i = P_0^i + \frac{B_0^2}{2} = P_0^e.$$

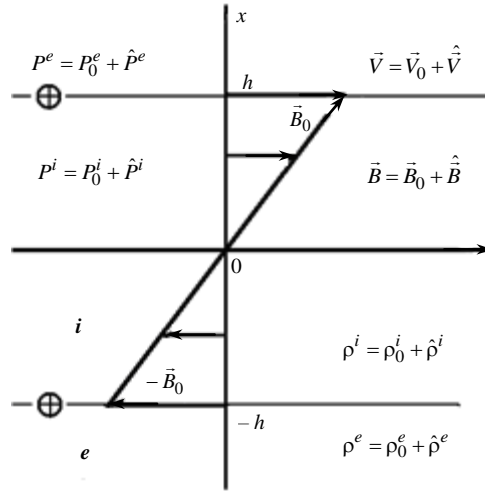


Рис. 1

Гидродинамическое давление внутри слоя равно

$$P_0^i = P_{10}^i - \frac{B_z^2}{2} = P_0^e - \frac{B_0^2 x^2}{2h^2}. \quad (1)$$

Учтем, что по поверхностям слоя ($x = \pm h$) протекает поверхностный ток [21], экранирующий поле $B_z(x)$. Введем в рассмотрение безразмерные величины ξ, ζ, Π и \vec{W} :

$$x = h\xi, \quad z = h\zeta, \quad P = B_0^2 \Pi, \quad \vec{V} = \frac{B_0}{\sqrt{\rho_0^i}} \vec{W}. \quad (2)$$

В этих переменных гидродинамическое давление внутри слоя равно $\Pi_0^i = \Pi_{00}^e - \frac{1}{2} \xi^2$, а снаружи — $\Pi_{00}^e = \text{const}$.

2. Уравнения для возмущенных величин

Рассмотрим возмущения физических величин

$$\vec{V} = \vec{V}_0 + \hat{V}, \quad (\vec{V} = \vec{V}_0 + \hat{V}) \quad \vec{B} = \vec{B}_0 + \hat{B}, \quad P = P_0 + \hat{P}, \quad (\rho = \rho_0^i + \hat{\rho}). \quad (3)$$

Внутри плазменного слоя при $-h < x \leq h$ из уравнений магнитной гидродинамики для этих возмущений следуют уравнения движения

$$\rho_i^0 \frac{\partial \hat{V}_x}{\partial t} = -\frac{\partial \hat{P}_i}{\partial x} + \bar{B}_z^0 \frac{\partial \hat{B}_x}{\partial z}, \quad (4)$$

$$\rho_i^0 \frac{\partial \hat{V}_z}{\partial t} = -\frac{\partial \hat{P}_i}{\partial z} + \hat{B}_x \frac{\partial B_0}{\partial x} + \hat{B}_z^0 \frac{\partial \hat{B}_z^0}{\partial z}, \quad (5)$$

уравнения сохранения массы

$$\frac{\partial \hat{p}_i}{\partial t} + \rho_i^0 \operatorname{div} \hat{V} = 0. \quad (6)$$

Для упрощения анализа будем считать, что процесс развития возмущений адиабатический, тогда возмущенное давление удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial \hat{P}_i}{\partial t} + \hat{V} \operatorname{grad} P_i^0 + \gamma P_i^0 \operatorname{div} \hat{V} = 0. \quad (7)$$

Из закона индукции Фарадея для возмущенного магнитосферного поля

$$\frac{\partial \hat{B}_x}{\partial t} = B_z^0 \frac{\partial \hat{V}_x}{\partial z}, \quad (8)$$

$$\frac{\partial \hat{B}_z}{\partial t} = -B_0 \frac{\partial \hat{V}_x}{\partial x} - \hat{V}_x \frac{\partial B_0}{\partial x}. \quad (9)$$

Во внешней области $|x| \geq h$ уравнение движения дает

$$\rho_e^0 \left(\frac{\partial \hat{V}_x}{\partial t} + V_0 \frac{\partial \hat{V}_x}{\partial z} \right) = -\frac{\partial \hat{P}_e}{\partial x}, \quad (10)$$

$$\rho_e^0 \left(\frac{\partial \hat{V}_z}{\partial t} + V_0 \frac{\partial \hat{V}_z}{\partial z} \right) = -\frac{\partial \hat{P}_e}{\partial z}, \quad (11)$$

уравнение адиабаты имеет вид

$$\frac{\partial \hat{P}_e}{\partial t} + \gamma P_e^0 \operatorname{div} \hat{V} = 0. \quad (12)$$

Из закона сохранения массы получаем

$$\frac{\partial \hat{p}_e}{\partial t} + \rho_e^0 \operatorname{div} \hat{V} = 0. \quad (13)$$

Уравнения индукции сводятся к двум уравнениям

$$\frac{\partial \hat{B}_x}{\partial t} = -V_0 \frac{\partial \hat{B}_x}{\partial z}, \quad (14)$$

$$\frac{\partial \hat{B}_z}{\partial t} = V_0 \frac{\partial \hat{B}_x}{\partial x}. \quad (15)$$

Рассматривая полученные уравнения, легко увидеть, что их коэффициенты зависят только от x . Поэтому можно искать решение системы в виде

$$q(x, z, t) = q(x) \exp i \left(\frac{n}{h} z + \omega t \right). \quad (16)$$

3. Анализ уравнений для возмущенных величин

Запишем полученные уравнения в безразмерном виде

$$\hat{V} = \frac{B_0}{\sqrt{\rho_0^i}} \vec{W}, \quad \hat{P} = B_0^2 \Pi, \quad \hat{P}_0 = \Pi_0 B_0^2, \quad \hat{\rho}_e = \rho_0^i \rho_e, \quad \hat{B} = B_0 \vec{b}, \quad \hat{\rho}_i = \rho_0^i \rho_i,$$

$$\hat{V}_0 = \frac{B_0}{\sqrt{\rho_0^i}} W_0, \quad \hat{t} = \frac{h \sqrt{\rho_0^i}}{B_0} \tau, \quad \hat{\omega} = \frac{B_0}{h \sqrt{\rho_0^i}} \lambda. \quad (17)$$

При этом размерные возмущенные физические величины обозначены «шапками», далее в безразмерном виде они будут записаны «без шапок». В безразмерных переменных уравнения (4)–(9) для плазменного слоя примут вид

$$i\lambda W_x = -\frac{\partial \Pi_i}{\partial \xi} + inb_x \xi, \quad (18)$$

$$i\lambda W_z = -in\Pi_i + inb_z \xi + b_x, \quad (19)$$

$$i\lambda \Pi_i - W_x \xi + \gamma \left(\Pi_{00}^e - \frac{\xi^2}{2} \right) \operatorname{div} \vec{W} = 0, \quad (20)$$

$$i\lambda \rho_i + \operatorname{div} \vec{W} = 0, \quad (21)$$

$$\lambda b_x = n\xi W_x, \quad (22)$$

$$i\lambda b_z = in\xi W_z - W_x - \xi \operatorname{div} \vec{W}. \quad (23)$$

Во внешней области с учетом того, что $\vec{V}_0 = \text{const}$, уравнения для возмущенных величин запишем также в безразмерном виде

$$i\lambda W_x + inW_0 W_x = -\frac{\rho_0^i}{\rho_0^e} \frac{\partial \Pi_e}{\partial \xi},$$

$$i\lambda W_z + inW_0 W_z = -\frac{\rho_0^i}{\rho_0^e} n\Pi_e, \quad (24)$$

$$i\lambda \rho_e + \rho_e^0 \operatorname{div} \vec{W} = 0,$$

$$i\lambda \Pi_e + \gamma \Pi_0^e \operatorname{div} \vec{W} = 0, \quad (25)$$

$$i\lambda b_x = -inW_0 b_x, \quad (26)$$

$$i\lambda b_z = W_0 \frac{\partial b_x}{\partial \xi}. \quad (27)$$

Систему (24) и (26) удобно переписать в следующем эквивалентном виде:

$$i(\lambda + nW_0)W_x = -\frac{\rho_0^i}{\rho_0^e} \frac{\partial \Pi_e}{\partial \xi}, \quad (28)$$

$$i(\lambda + nW_0)W_z = -i \frac{\rho_0^i}{\rho_0^e} n\Pi_e, \quad (29)$$

$$(\lambda + nW_0)b_x = 0, \quad (30)$$

$$i\lambda b_z - W_0 \frac{\partial b_x}{\partial \xi} = 0. \quad (31)$$

Из уравнений (30), (31) следует, что во внешней области возмущение магнитного поля отсутствует $b_x = b_z = 0$. Из условий равновесия видно, что магнитное поле b_x должно быть непрерывным на границе слоя. Поскольку вне слоя $b_x = 0$, то при $\xi = \pm 1$ внутри слоя $b_x(\pm 1)$ также должна быть равна нулю. Но из (22) следует, что $W_x(\pm 1) = 0$ также должно быть равно нулю.

Из системы (28)–(31) следует, что возмущения с волновым числом $\lambda = nW_0$ возникать не могут, так как обращается в нуль напряжение. Поэтому далее полагаем $\lambda + nW_0 \neq 0$.

Из (25), (28), (29) находим уравнение

$$\frac{\partial^2 \Pi_e}{\partial \xi^2} + \left[-n^2 + \frac{\lambda}{\gamma \Pi_0^e} (\lambda + nW_0) \right] \Pi_e = 0,$$

которое имеет решение

$$\Pi = e^{\delta \xi}, \quad \delta^2 - n^2 = -\frac{\rho_0^e}{\rho_0^i} \frac{\lambda}{\gamma \Pi_0^e} (\lambda + nW_0). \quad (32)$$

Вернемся теперь к внутренней задаче. Из (18)–(23), учитывая, что $\text{div} \vec{b} = 0$, после простых, но громоздких вычислений получаем выражения для скоростей.

Из (18) и (22) получаем

$$W_x = \frac{i\lambda}{\lambda^2 - n^2 \xi^2} \frac{d\Pi_i}{d\xi}. \quad (33)$$

Выражение

$$W_z = \frac{n}{\lambda} \left(\frac{\xi}{\lambda^2 - n^2 \xi^2} \frac{d\Pi_i}{d\xi} + \Pi_i \right) \quad (34)$$

получаем из (19), (22) и (33), и уравнение для полного давления плазмы Π_1 принимает вид

$$a_2(\xi, \lambda) \frac{d^2 \Pi_i}{d\xi^2} + a_1(\xi, \lambda) \frac{d\Pi_i}{d\xi} + a_0(\xi, \lambda) \Pi_i = 0, \quad (35)$$

где

$$a_2 = \lambda^4 \xi^2 + \lambda^2 \left[\gamma \Pi_{00}^e - \xi^2 \gamma \left(\frac{1}{2} - n^2 \Pi_{00}^e \right) - n^2 \xi^4 \right] + \gamma \xi^2 \left(\frac{1}{2} n^2 \xi^2 - n^2 \Pi_{00}^e \right),$$

$$a_1 = 2n^2 \xi \left\{ \lambda^2 \left(\gamma \Pi_{00}^e - \frac{\gamma}{2} \xi^2 \right) + n^2 \xi^2 \left[\xi^2 \left(1 + \frac{\gamma}{2} \right) - \gamma \Pi_{00}^e \right] \right\},$$

здесь Π_{00}^e — невозмущенное гидродинамическое давление во внешней области.

$$a_0 = \lambda^2(\lambda^4 - 2n^2\xi^2\lambda^2 + n^4\xi^4). \quad (36)$$

Аналитическое решение уравнения (35) получить довольно сложно, а поэтому последнее может быть решено численными или другими методами, в частности методом Галеркина.

Укажем еще на один способ получения решения задачи о возмущениях внутри плазменного слоя. Будем исходить из условия отсутствия магнитного заряда $\operatorname{div} \vec{b} = 0$, что дает

$$\frac{\partial b_x}{\partial \xi} + \frac{\partial b_z}{\partial \zeta} = 0.$$

Введем в рассмотрение магнитно-силовую функцию $\psi(\xi, \zeta) = \psi(\xi)e^{+i(n\zeta - \lambda\tau)}$ для согласования с (16).

Положим

$$b_x = -\frac{\partial \psi}{\partial \zeta} = -in\psi \exp i(n\zeta + \lambda\tau), \quad b_z = \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \exp i(n\zeta + \lambda\tau). \quad (37)$$

Тогда из уравнений (18)–(23) получим

$$W_x = \frac{i\lambda\psi}{\xi}; \quad W_z = \frac{n}{\lambda} \left[\Pi_i - \xi \frac{d\psi}{d\zeta} + \psi \right], \quad (38)$$

$$\frac{(\lambda^2 - n^2\xi^2)}{\xi} \psi = \frac{\partial \Pi_i}{\partial \xi}, \quad (39)$$

$$\Pi_i = \frac{1}{(Mn^2 - \lambda^2)\xi^2} \left\{ [M(n^2\xi^2 - \lambda^2) - \lambda^2\xi^2] \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \xi - [M(n^2\xi^2 - \lambda^2) - \lambda^2\xi^2] \psi \right\}, \quad (40)$$

где

$$M = \gamma \left(\Pi_{00}^e - \frac{\xi^2}{2} \right). \quad (41)$$

Исключая из (39), (40) давление Π_i , получим уравнение относительно функции $\psi(\xi)$

$$\beta_2 \frac{d^2\psi}{d\xi^2} + \beta_1 \frac{d\psi}{d\xi} + \beta_0\psi = 0, \quad (42)$$

где

$$\beta_2 = M^2[\lambda^4 - (Mn^2 + n^2\xi^2)\lambda^2 + Mn^4\xi^2]\xi^2, \quad (43)$$

$$\beta_1 = -M\xi\{(2M\lambda^2 - \lambda^2\xi^2)(\lambda^2 - Mn^2) - \gamma\lambda^2\xi^2(\lambda^2 - n^2\xi^2)\}, \quad (44)$$

$$\begin{aligned} \beta_0 = \xi^2 \{ & (\lambda^2 - n^2\xi^2)(\lambda^2 + Mn^2) + \lambda^2(2M^2 + \gamma\xi^4)(\lambda^2 - Mn^2) + \\ & + \gamma\xi[M(\lambda^2 - n^2\xi^2) + \lambda^2\xi^2] \}. \end{aligned} \quad (45)$$

4. Дисперсионное уравнение

При получении дисперсионного уравнения для волновых возмущений в плазменном слое и его окружении воспользуемся методом Галеркина. Учитывая, что сама постановка задачи носит качественный характер, ограничимся первым приближением.

Учтем, что $b_x(i) = W_x(i) = 0$, а также тот факт, что при $x > 0$ и $x < 0$ равновесное магнитное поле меняет знак, а вертикальное возмущение магнитного поля должно обращаться в нуль при $x = 0$.

Поэтому пробные функции Галеркина выберем в виде

$$\psi = c_0 \xi(1 - \xi^2) + c_1 \xi^2(1 - \xi^2) + c_2 \xi^2(1 - \xi^2)^2 \dots \quad (46)$$

Тогда весовые функции должны иметь вид

$$\xi(1 - \xi^2), \xi^2(1 - \xi^2) \dots \quad (47)$$

Подставляя (46), (47) в уравнения (39), (40) и проведя интегрирование по ξ от -1 до $+1$, найдем, что коэффициент при c_1 обращается в нуль, а коэффициент при c_0 определяет дисперсионное соотношение для волновых процессов внутри плазменного слоя и имеет вид

$$\left\{ \begin{aligned} & -0,0931\lambda^4 + \lambda^2[-\gamma \Pi_{00}^e \cdot 0,393036 + 0,063487 + n^2 - 0,013084 - 0,025\gamma] + \\ & + n^4(\gamma \Pi_{00}^a + 0,025388 + n^2\gamma(0,003933 - 0,1584\Pi_{00}^e)) - 0,017256 \end{aligned} \right\} = 0. \quad (48)$$

Таким образом, получим дисперсионное уравнение

$$\begin{aligned} & \lambda^4(-0,093) + \lambda^2[-\gamma \cdot \Pi_{00}^e \cdot 0,393 + 0,05 + n^2 - 0,025\gamma] + n^4 \times \\ & \times (\gamma \cdot \Pi_{00}^e + 0,025) + n^2\gamma(0,004 - 0,158 \cdot \Pi_{00}^e) - 0,017 = 0. \end{aligned} \quad (49)$$

Тогда уравнение (49) можно записать в виде

$$\delta_4 \lambda^4 - \delta_2 \lambda^2 + \delta_0 = 0, \quad (50)$$

где

$$\delta_4 = -0,093 = \hat{M},$$

$$\delta_2 = -\gamma \cdot \Pi_{00}^e \cdot 0,393 + 0,05 + n^2 - 0,025\gamma,$$

$$\delta_0 = n^4(\gamma \cdot \Pi_{00}^e + 0,025) + n^2\gamma(0,004 - 0,158 \cdot \Pi_{00}^e) - 0,017.$$

Представим уравнение (50) так:

$$\lambda^4 + \hat{\delta}_2 \cdot \lambda^2 + \hat{\delta}_1 \cdot \lambda + \hat{\delta}_0 = 0, \quad (51)$$

где отображение параметров уравнения (50) в параметры уравнения (51) имеет вид

$$\begin{cases} \hat{\delta}_4 = 1, \\ \hat{\delta}_2 = \frac{1}{M}(-\gamma \cdot \Pi_{00}^e \cdot 0,393 + 0,05 + n^2 - 0,025 \gamma), \\ \hat{\delta}_1 = 0, \\ \hat{\delta}_0 = \frac{1}{M}[n^4(\gamma \cdot \Pi_{00}^e + 0,025) + n^2\gamma(0,004 - 0,158 \cdot \Pi_{00}^e) - 0,017]. \end{cases} \quad (52)$$

Уравнение (51) определяет многообразие катастрофы коразмерности три (параметры $\hat{\delta}_2, \hat{\delta}_1, \hat{\delta}_0$) — «ласточкин хвост» теории особенностей дифференцируемых отображений [22–26].

В рассматриваемом случае уравнение (50) принимает вид

$$\lambda^4 + \frac{1}{M}(-\gamma \cdot \Pi_{00}^e \cdot 0,393 + 0,05 + n^2 - 0,025 \gamma) \cdot \lambda^2 + \frac{1}{M}(n^4(\gamma \cdot \Pi_{00}^e + 0,025) + n^2\gamma(0,004 - 0,158 \cdot \Pi_{00}^e) - 0,017) = 0.$$

Особое многообразие будем ассоциировать с дисперсионным уравнением (49). Это особое многообразие катастрофы «ласточкин хвост» в канонических параметрах (51) определяется системой уравнений

$$\begin{cases} \lambda^4 + \hat{\delta}_2 \cdot \lambda^2 + \hat{\delta}_0 = 0, \\ 4\lambda^3 + 2\hat{\delta}_2 \cdot \lambda = 0, \\ 6\lambda^2 + \hat{\delta}_2 = 0, \\ \lambda = 0. \end{cases}$$

Тогда получаем $\hat{\delta}_2 = \hat{\delta}_0 = 0$, точку особенности коразмерности три — «ласточкин хвост».

Далее особые многообразия коразмерности два — «сборка» в канонических параметрах катастрофы «ласточкин хвост» — определим из системы уравнений

$$\begin{cases} \lambda^4 + \hat{\delta}_2 \cdot \lambda^2 + \hat{\delta}_0 = 0, \\ 4\lambda^3 + 2\hat{\delta}_2 \cdot \lambda_1 = 0, \\ 6\lambda^2 + \hat{\delta}_2 = 0. \end{cases}$$

Уравнение для особых многообразий коразмерности два — «сборка» — получим в виде

$$\hat{\delta}_0 = \frac{1}{12} \hat{\delta}_2^2.$$

Из этого уравнения заметим, что особые точки коразмерности два находятся в нижней полуплоскости графиков сечений (рис. 2, а) [23] особого многообразия катастрофы коразмерности три — «ласточкин хвост».

Можно показать, что кривая самопересечения особых многообразий катастрофы коразмерности один — «складка» — в параметрах уравнения (50) задается соотношением

$$\hat{\delta}_2^2 = 4\hat{\delta}_0. \quad (53)$$

Эти особые многообразия отделяют область действительных корней уравнения (51) — область устойчивости волновых процессов. Итак, область устойчивости в канонических параметрах особенности $(\hat{\delta}_2, \hat{\delta}_1, \hat{\delta}_0)$ можно представить плоским сечением (рис. 2, а) в трехмерном пространстве особых многообразий катастрофы коразмерности три, «ласточкин хвост» (рис. 2, а–в).

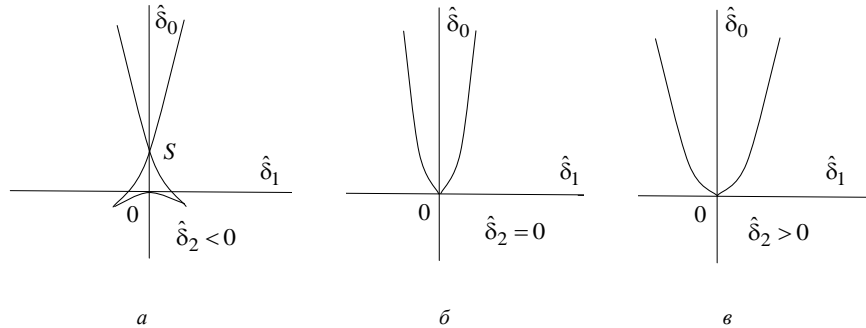


Рис. 2

Итак, область устойчивых волновых процессов в рассмотренном приближении (49) представлена на рис. 2, а, выделенный участок оси $\langle \hat{\delta}_1 \rangle$, отрезок 0S.

В таблице приведены данные анализа однопараметрического (по параметру Π_{00}^e) семейства дисперсионных уравнений (49) при заданных значениях параметров γ ($\gamma = 1,4$) и n .

Таблица

n	Параметры дисперсионного уравнения		
1	$\hat{\delta}_4 = 0,3 \cdot \Pi_{00}^e + 0,03$	$\hat{\delta}_2 = -1,28 \cdot \Pi_{00}^e - 0,01$	$\hat{\delta}_0 = -0,04 \cdot \Pi_{00}^e + 0,003$
3	$\hat{\delta}_4 = 0,3 \cdot \Pi_{00}^e + 0,23$	$\hat{\delta}_2 = -11,98 \cdot \Pi_{00}^e - 0,01$	$\hat{\delta}_0 = -2,72 \cdot \Pi_{00}^e + 0,27$
5	$\hat{\delta}_4 = 0,3 \cdot \Pi_{00}^e + 0,63$	$\hat{\delta}_2 = -35,91 \cdot \Pi_{00}^e - 0,29$	$\hat{\delta}_0 = -12,84 \cdot \Pi_{00}^e + 1,93$

Можно показать, что при $\Pi_{00}^e > 0,23$ дисперсионное уравнение (49) может иметь только действительные корни, оценки выполнены с двумя верными знаками.

Таким образом, при возмущениях равновесного давления в «хвосте» магнитосферы Земли, превышающих 0,23 ($\Pi_{00}^e > 0,23$), в магнитосфере Земли возможно возбуждение волн магнитогидродинамического характера, которые не связаны с солнечным ветром.

Если находимся в окрестности $\hat{\delta}_2 = \frac{1}{M} (-\gamma \cdot \Pi_{00}^e \cdot 0,393 + 0,05 + n^2 - 0,025 \gamma) \approx 0$, причем $\hat{\delta}_2 = -\varepsilon$ (ε — малая положительная величина), то при $\hat{\delta}_1 \neq 0$ будет существовать, по крайней мере, «малая» двумерная в пространстве параметров системы область устойчивых волновых процессов в плазменном слое.

Заключение

В работе построена математическая модель для исследования магнитогидродинамических волн, которые распространяются в «хвосте» плазменного слоя, индуцированного солнечным ветром.

Основная сложность описания этих волн связана с конфигурацией магнитного поля внутри плазменного слоя «хвоста» магнитного поля Земли. Рассмотрена «плоская» модель плазменного слоя, которая позволяет получить аналитические результаты в законченном виде.

- Для модели «плоского» плазменного слоя получены уравнения малых колебаний как внутри слоя, так и вне его, рассмотрен вопрос устойчивости их существования.

- Найдено дисперсионное уравнение для возмущений магнитного поля, которое учитывает сжимаемость плазменной среды. С помощью этого уравнения проанализирован вопрос о распространении МГД волн внутри и снаружи плазменного слоя в солнечном ветре.

- Установлено, что в плазменном слое (аналоге магнитосферы) могут присутствовать устойчивые волны, которые не связаны с окружающим его солнечным ветром.

- В окружающем плазменный слой течения (солнечном ветре) возмущений, которые связаны с возмущениями внутри геомагнитного хвоста, не возникает, $W_x(\pm 1) = 0$. Это можно объяснить разреженностью и огромной скоростью течения солнечного ветра.

- Таким образом, магнитные бури, которые возникают в атмосфере Земли, обязаны своим происхождением коронарным выбросам массы Солнца.

Теоретические результаты работы могут быть использованы для анализа данных, полученных с космических аппаратов.

Ю.П. Ладіков-Росв, О.О. Логінов, В.С. Набівач

ГЕНЕРАЦІЯ МАГНІТОГІДРОДИНАМІЧНИХ ХВИЛЬ У СПРОЩЕНІЙ МОДЕЛІ МАГНІТОСФЕРНОГО ХВОСТА ЗЕМЛІ

Основну увагу приділено побудові математичної моделі та опису методів дослідження магнітогідродинамічних (МГД) хвиль, що поширюються в «хвості» магнітного поля Землі. Ці хвилі, на відміну від хвиль МГД, які поширюються поблизу замкнутої частини магнітного поля Землі, досліджено мало. Складність опису цих хвиль пов'язана зі зміною магнітного поля всередині плазмового шару магнітосферного «хвоста». Розглянуто систему «плоский плазмовий шар–зовнішня рухома плазма», яка дозволяє отримати аналітичні результати в закінченому вигляді. Для моделі «плоского» плазмового шару отримано рівняння малих коливань як усередині шару, так і поза ним. З використанням теорії особливостей диференційованих відображень (теорії катастроф) розглянуто питання стійкості їх існування. Знайдено дисперсійне рівняння для збурень магнітного поля, яке враховує стисливість плазмового середовища. За допомогою цього рівняння проаналізовано питання про поширення МГД хвиль всередині і зовні плазмового шару в сонячному вітрі. Встановлено, що в плазмовому шарі (аналогу магнітосфери) можуть бути присутні стійкі хвилі, які не пов'язані з оточуючим сонячним вітром. В оточуючому плазмовий шар перебігу (сонячному вітрі) його збуджень, які пов'язані зі збуреннями всередині геомагнітного хвоста, не виникає. Це можна пояснити розрідженістю і величезною швидкістю течії сонячного вітру. Таким чином, магнітні бурі, що виникають за рахунок розглянутих збурень в атмосфері Землі, зобов'язані своїм походженням коронарним викидам маси Сонця.

Ключові слова: магнітне поле Землі, магнітогідродинамічні хвилі, дисперсійне рівняння, теорія катастроф, стійкість.

GENERATION OF MHD WAVES IN A SIMPLIFIED MODEL OF THE EARTH'S MAGNETOSPHERIC TAIL

The main attention is paid to the construction of a mathematical model and the description of methods for studying magnetohydrodynamic (MHD) waves propagating in the «tail» of the Earth's magnetic field. These waves, in contrast to MHD waves, which propagate near the closed part of the Earth's magnetic field, have been little studied. The complexity of the description of these waves is associated with the configuration of the magnetic field inside the plasma layer of the magnetospheric «tail». In this work, we consider the system «flat plasma layer» — an external moving plasma, which allows obtaining analytical results in a finished form. For the model of a «flat» plasma layer, equations of small oscillations are obtained both inside the layer and outside it, using the theory of features of differentiable mappings (catastrophe theory), the stability of their existence is considered. The dispersion equation for perturbations of the magnetic field is found, which takes into account the compressibility of the plasma medium. Using this equation, the problem of the propagation of MHD waves inside and outside the plasma layer in the solar wind is analyzed. It has been established that in the plasma layer (analogue of the magnetosphere) stable waves can be present that are not connected with the solar wind surrounding it. In the flow (the solar wind) surrounding the plasma layer, excitations that are associated with disturbances inside the geomagnetic tail do not occur. This can be explained by the sparseness and huge speed of the solar wind. Thus, the magnetic storms that arise due to the considered disturbances in the Earth's atmosphere owe their origin to coronary ejections of the mass of the Sun.

Keywords: Earth's magnetic field, magnetohydrodynamic waves, dispersion relation, catastrophe theory, stability.

1. Зеленый Л.М., Веселовский И.С. Плазменная гелиогеофизика. М. : Физматлит, 2008. 2. 672 с.
2. Буринская Т.М. Неустойчивость Кельвина–Гельмгольца для потока плазмы, ограниченного в пространстве. *Физика плазмы*. 2008. **14**, № 11. С. 1013–1020. DOI: 10.1134/S1063780X0811007X.
3. Cheremnykh O., Cheremnykh S., Kozak L., Kronberg E. Magnetohydrodynamic waves and the Kelvin–Helmholtz instability at the boundary of plasma mediums. *Physics of Plasma*. 2018. **25**, N 10. P. 102–119. <https://doi.org/10.1063/1.5048913>.
4. Ландау Л.Д. Устойчивость тангенциальных разрывов в сжимаемой среде. *Доклады АН СССР*. 1944. **44**. С. 339–342.
5. Mishin V.V., Tomozov V.M. Kelvin–Helmholtz instability in the solar atmosphere, solar wind and geomagnetosphere. *Solar Physics*. 2016. **291**, N 11. P. 3165–3184. DOI: 10.1007/s11207-016-0891-4
6. Зеленый Л.М., Григоренко Е.Е., Федоров А.О. Пространственно-временные ионные структуры в хвосте магнитосферы Земли: бимлеты, как результат неадиабатического импульсного ускорения плазмы. *Письма в ЖЭТФ*. 2004. **80**, вып. 10. С. 771–783.
7. Grigorenko E.E., Sauvand J.A., Zeleny L.M. Spatial-Temporal characteristics of ion beamlets in plasma sheet boundary layer of magnetotail. *J. Geophys. Res.* 2007. **112**. P. 1–21. <https://agupubs.onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1029/2006JA011986>
8. Fridman A.M. Prediction and discovery of extremely strong hydrodynamic instabilities due to a velocity jump: theory and experiments. *Physics-Uspokhi*. 2008. **51**. N 3. P. 213. DOI: 10.1070/PU2008v051n03ABEH006470.
9. Шевелев М.М., Буринская Т.М. Неустойчивость Кельвина–Гельмгольца для цилиндрического потока плазмы с произвольной температурой. *Физика плазмы*. 2011. **37**. С. 1081–1095.

10. Kyoung-Joo Hwang. Magnetopause waves controlling the dynamics of Earth's magnetosphere. *J. Astron. Space Sci.* 2015. **32**, N 1. P. 1–11.
11. Леонович А.С., Мазур В.А., Козлов Д.А. МГД волны в геомагнитном хвосте: обзор. *Солнечно-Земная физика*. 2015. **1**, №1. С. 4–42.
12. Леонович А.С., Мазур В.А., Сенаторов В.Н. Альфвеновский волновод. *ЖЭТФ*. 1983. **85**, № 1(7). С. 141–145.
13. Agapitov A.V., Cheremnykh O.K. Natural oscillations of the Earth magnetosphere associated with solar wind sudden impulses. *Ukrainian Journal of Physics*. 2008. **53**, N 5. P. 506–510.
14. Burdo O.S., Cheremnykh O.K., Verkhoglyadova O.P. Study of ballooning modes in the inner magnetosphere of the Earth. *Izv. Akad. Nauk. Fiz.* 2000. **64**, N 9. P. 1896–1900.
15. Cheremnykh O.K. Transversally small-scale perturbations in arbitrary plasma configurations with magnetic surfaces. *Plasma Phys. and Contr. Fusion*. 2010. **52**, N 9. P. 1–6.
16. Cheremnykh O.K., Danilova V.V. Transverse small-scale MHD disturbances in space plasma with magnetic surfaces. *Kinematics and Physics of Celestial Bodies*. 2011. **27**, N 2. P. 98–108.
17. Dai L., Takahashi K., Lysak R. et al. Storm time occurrence and spatial distribution of Pc4 poloidal ULF waves in the inner magnetosphere: a van allen probes statistical study. *J. Geophys. Res.* 2015. **120**. P. 4748–4762. DOI: 10.1002/2015 JA 021134.
18. Axford W.I. Viscous interaction between the solar wind and Earth's magnetosphere Planet. *Space Sci.* 1964. **12**. P. 45–51.
19. Загородний А.Г., Черемных О.К. Введение в физику плазмы. Киев : Наукова думка, 2014. 695 с.
20. Ладиков-Роев Ю.П., Черемных О.К. Математические модели сплошных сред. Киев : Наукова думка, 2010. 552 с.
21. Кременецкий И.А., Черемных О.К. Космическая погода: механизмы и проявления. Киев : Наукова думка, 2009. 144 с.
22. Постон Т., Стюарт И. Теория катастроф и ее приложения. М. : Мир, 1980. 607 с.
23. Ладиков-Роев Ю.П., Набивач В.Е. Возбуждение волн во вращающемся плазменном замагниченном цилиндре, окруженном плазменной атмосферой с учетом сжимаемости. *Международный научно-технический журнал «Проблемы управления и информатики»*. 2018. № 6. С. 25–40. <http://www.dl.begellhouse.com/>
24. Набивач В.Е. Теория катастроф и особенности корней характеристических уравнений. Николаев : Автоматика-2013. С. 58–59.
25. Nabivach V. Root distribution of characteristic equations up to fourth order. *Soviet Journal of Automation and Information Sciences*. 1985. **17**, N 6. P. 12–15.
26. Набивач В.Е. Теория катастроф и управление рисками: концептуальные принципы. *Международный научно-технический журнал «Проблемы управления и информатики»*. 2013. № 3. С. 16–26. <http://www.dl.begellhouse.com/>

Получено 06.06.2019