

ОЦЕНИВАНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ НА ОСНОВЕ КОНЕЧНЫХ ВЫБОРОК СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

Ключевые слова: случайная величина, функция распределения, вариационный ряд.

Введение

При статистической обработке экспериментальных данных часто сталкиваются с оценением функции распределения случайных величин на основе конечных выборок [1–8].

Пусть имеем N независимых наблюдений случайной величины с функцией распределения $F(x)$ и плотностью распределения $g(x): (x_1, \dots, x_N)$, которые соответствуют генеральной совокупности [9]. Известен ряд подходов к оценке функции распределения на основе выборочных данных [2–13]. При большом объеме выборочных данных N наиболее популярный подход — построение эмпирической функции распределения в виде ступенчатой кривой:

$$\hat{F}_N(x) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N I_{(-\infty, x)}(x_i), \quad (1)$$

где $I(x)$ — функция Хевисайда.

На основе теоремы Гливленко–Кантелли [10, 11] оценка (1) является несмещенной и состоятельной.

В данной статье предлагается принципиально новый подход к оцениванию положения точек на искомой функции распределения на основе конечных (в том числе малых) выборок. Количество определяемых точек равно размеру выборки.

Основные соотношения

Пусть имеем k подвыборок $(x_1, \dots, x_m), (x_{m+1}, \dots, x_{2m}), \dots, (x_{(k-1)m+1}, \dots, x_{km})$, сформированных из исходной выборки, каждая состоит из m элементов. Проведем ранжирование по возрастанию в каждой подвыборке. В результате получим набор ранжированных подвыборок

$$\begin{aligned} & (x_1^1, \dots, x_m^1), \\ & \dots, \\ & (x_1^k, \dots, x_m^k), \end{aligned} \quad (2)$$

таких, что $x_1^i \leq x_2^i \leq \dots \leq x_m^i$ ($i = 1, \dots, k$).

Рассмотрим по очереди наборы первых, вторых, ..., m -х элементов ранжированных подвыборок случайных величин (x_s^1, \dots, x_s^k) для каждого $s = 1, \dots, m$. Плотность распределения s -х элементов ранжированных подвыборок (2) из m элементов определяется соотношением

$$p_m^s(x) = k_m^s F(x)^{s-1} (1 - F(x))^{m-s} g(x), \quad s = 1, \dots, m, \quad (3)$$

где $k_m^s = \frac{m!}{(s-1)!(m-s)!}$ — нормирующий коэффициент, равный произведению

общего числа перестановок элементов в подвыборке на количество перестановок элементов, меньших s -го элемента, и на количество перестановок элементов, больших s -го элемента, $F(x)$ и $g(x)$ — исходные функция распределения и плотность распределения соответственно.

Функции распределения s -х элементов ранжированных подвыборок из m элементов зависят от F и определяются следующим выражением:

$$\Phi_m^s(x) = \int_{-\infty}^x k_m^s F(\xi)^{s-1} (1-F(\xi))^{m-s} g(\xi) d\xi, \quad s=1, \dots, m. \quad (4)$$

Выражение (4) можем записать в виде [13]

$$\Psi_m^s(\alpha) = \int_0^\alpha k_m^s \vartheta^{s-1} (1-\vartheta)^{m-s} d\vartheta, \quad s=1, \dots, m, \quad (5)$$

где $\vartheta = F(x)$.

Отсюда

$$\Psi_m^s(\alpha) = \sum_{j=s}^m A_m^s(j) \alpha^j, \quad s=1, \dots, m, \quad (6)$$

$$A_m^s(j) = \begin{cases} 0, & j < s, \\ (-1)^{j+s} C_m^j C_{j-1}^{s-1}, & s=1, \dots, m. \end{cases} \quad (7)$$

Соотношения (4), (5) являются основой для оценивания функции распределения $F(x)$.

Анализ основных соотношений

Выражение (6) определяет семейство кривых (по s), для каждой из которых существует единственный корень α_s^q уравнения:

$$\Psi_m^s(\alpha_s^q) = q, \quad s=1, \dots, m, \quad (8)$$

при произвольном значении $0 < q < 1$.

Рассмотрим графики $\Psi_m^s(\alpha)$ для $s=1, \dots, m$, $m=7$ (рис. 1). Для примера на графиках точки соответствуют решениям уравнений (8) при $q=0,5$.

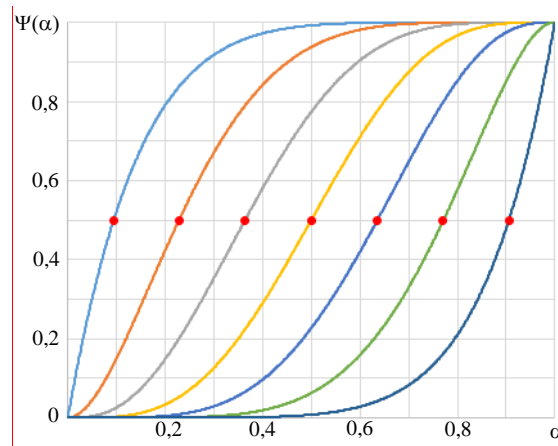


Рис. 1

Заметим, что функции $\Psi_m^s(\alpha)$ не зависят от распределения $F(x)$, а только от размера подвыборки m и номера порядковой статистики s .

Отметим два практически важных свойства семейства кривых $\Psi_m^s(\alpha)$ (6).

Во-первых, для $s = m$ (крайняя кривая справа) уравнение для определения ординаты, соответствующей квантилю q : $\Psi_m^m(\alpha_m^q) = q$, сводится к $(\alpha_m^q)^m = q$ и имеет корень $\alpha_m^q = \sqrt[m]{q}$.

Во-вторых, корни уравнений симметричны относительно точки $(0,5; 0,5)$

$$\alpha_1^q = 1 - \sqrt[m]{1 - q}$$

или в общем случае

$$\alpha_s^q = 1 - \alpha_{m+1-s}^{1-q}.$$

Как видно из графиков на рис. 1, в области $0,1 \leq q \leq 0,9$ можно ожидать достаточно хорошую точность определения α_s^q .

Определим абсциссы функции распределения $F(x)$. Для каждого квантиля q справедливо уравнение

$$\Phi_m^s(x_s^q) = q, \quad s = 1, \dots, m. \quad (9)$$

На основе (9) получаем набор абсцисс (q -квантилей) для функции распределения $F(x)$ $x_1^q, x_2^q, \dots, x_s^q, \dots, x_m^q$.

Определим ординаты для функции распределения $F(x)$. Для каждой абсциссы x_s^q ($s = 1, \dots, m$) на основе (8) определим соответствующую ординату α_s^q , такую, что

$$\alpha_s^q = F(x_s^q), \quad s = 1, \dots, m.$$

Таким образом, пара чисел $(x_s^q; \alpha_s^q)$ определяет точку исходного распределения $F(x)$ для каждой порядковой статистики $s = 1, \dots, m$.

Алгоритм построения оценки положений точек на функции распределения

Процедура определения абсцисс для оценки функции распределения $F(x)$ проста и сводится к ранжированию подвыборок, получению порядковых статистик и определению q -квантилей последовательно для каждого $s = 1, \dots, m$. Определение q -квантиля проводится на основе распределения s -й статистики. В общем случае это распределение неизвестно, но можно оценить его медиану, т.е. 0,5-квантиль.

Для определения соответствующей ординаты для каждой из абсцисс необходимо решать алгебраическое уравнение m -го порядка (8).

В результате на основе k подвыборок (2), каждая размером m , получаем m точек на функции распределения $F(x)$.

На графиках (см. рис. 1) точки соответствуют решениям уравнений (8) при $q = 0,5$, т.е. определяют ординаты функций $\alpha_s^{med} = F(x_s^{med})$ для медиан порядковых статистик $x_1^{med}, x_2^{med}, \dots, x_s^{med}, \dots, x_m^{med}$.

Состоятельность, смещенность и эффективность оценки функции распределения

Уравнения (8), (9) являются точными для определения точек на искомой функции распределения. При знании точного значения медианы для каждой s -й статистики

($s = 1, \dots, m$) точки на искомой функции распределения определяются точно. Обычно точное значение медианы неизвестно. Поэтому в качестве оценки медианы распределения s -й статистики вынуждены использовать оценку медианы выборки.

В соответствии с определением смещенности требуется определить математическое ожидание оценки положения s -й точки. В то же время согласно данному алгоритму необходимо знание определенного квантиля. Без дополнительной информации можно опираться разве что на медиану, что вынуждает в качестве оценки медианы распределения s -й статистики использовать его математическое ожидание, отличающееся, как известно, не более чем на среднеквадратическое отклонение. Это приводит к смещению, поскольку положению s -й точки на искомом распределении соответствует именно медиана. Но заметим, что «ширина» плотности распределения s -й статистики (3) связана с дисперсией распределения и сужается с ростом m .

Оценка дисперсии элементов s -й статистики с увеличением длины подвыборки m на основе (3)

$$\varepsilon = \lim_{m \rightarrow \infty} m^s \beta^m \sim \lim_{m \rightarrow \infty} m^s \left(\frac{1}{a}\right)^m = \lim_{m \rightarrow \infty} m^s \frac{1}{a^m} = 0,$$

так как $a > 1$, поскольку $\beta \sim F \sim \frac{1}{a} < 1$.

Это означает состоятельность полученной оценки.

Таким образом, предлагаемая оценка является состоятельной, но смещенной, причем смещение зависит от вида искомого распределения и уменьшается с увеличением размера подвыборки. Заметим, что полученное таким образом смещение хуже, чем при практическом применении алгоритма, поскольку в этом случае предполагается в качестве оценки медианы распределения s -й статистики использование медианы выборки размером k . При устремлении его к бесконечности оценка медианы выборки совпадает с медианой распределения ввиду ее состоятельности. Данный факт улучшает практическую оценку, по сравнению с теоретической.

Кроме того, проведенные численные эксперименты показывают выигрыш по эффективности приведенного алгоритма по сравнению с классическим при k , равном единице, что является, можно сказать, самым распространенным практическим применением.

Для сравнения на рис. 2 приведены теоретическая функция распределения (1) и ее оценки: эмпирическая (2) с $N = 11$ и полученная с помощью предложенного подхода с $m = 11$, $k = 1$ путем соединения точек прямыми (3). Кроме того, в качестве величин x_{\min} и x_{\max} , для которых $F(x < x_{\min}) = 0$ и $F(x \geq x_{\max}) = 1$, как и для эмпирической, принимались минимальное и максимальное значения выборки.

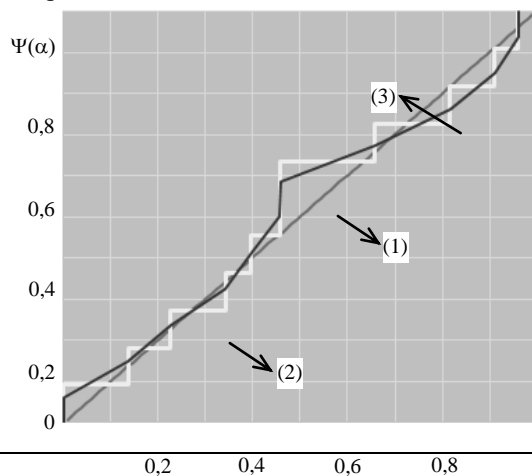


Рис. 2

Эффективность оценки рассчитывалась усреднением квадрата отклонения функции от теоретической. На рис. 3 приведен график, отображающий отношение средних квадратов отклонений предложенной функции η к эмпирической ξ для разных m . Как видим, предложенная оценка выигрывает в эффективности, причем для малых m ощутимо.

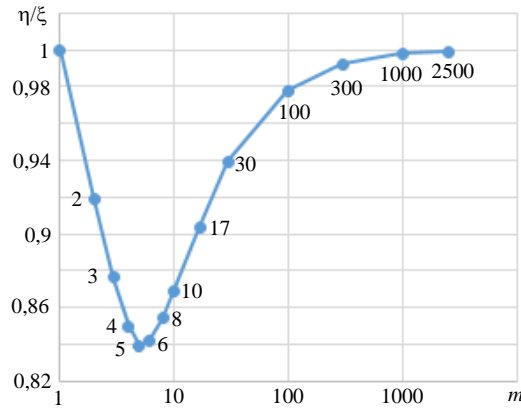


Рис. 3

Важно отметить следующее. Оценка функции распределения на основе предложенного подхода в виде интерполированной кривой позволяет проводить численное дифференцирование, фильтрацию и другие операции обработки сигналов. В то же время классическая функция распределения в виде ступенчатой кривой имеет ряд известных ограничений при применении этих операций обработки.

Практические алгоритмы определения параметров распределения

Определение ординат функции $F(x)$ на основе конечных выборок из m элементов сводится к решению алгебраических уравнений m -го порядка (7), что является непростой задачей. Но заметим, что для медианного значения $q = 0,5$ получаемые корни почти эквидистантны. Тогда для $q = 0,5$ предлагается два упрощенных алгоритма определения ординат искомого распределения. Они оба базируются на допущении об эквидистантности корней и отличаются выбором размера шага между ними. Проведено численное моделирование, которое свидетельствует о пригодности предложенных алгоритмов для практического применения.

Алгоритм 1. Учитывая отмеченные свойства корней, запишем приближенную формулу для искомым корней в виде

$$\alpha_s^{med} = \alpha_1^{med} + (s-1) \frac{\alpha_m^{med} - \alpha_1^{med}}{m-1}, \quad s = 1, \dots, m. \quad (10)$$

На рис. 4 приведены результаты сравнения ординат, полученных численным расчетом корней уравнений (8) и на основе (10).

Алгоритм 2. Представим шаг между корнями уравнений (8) в виде $d = \frac{1}{m + \Delta}$, где m — количество элементов в подвыборке, Δ — параметр, который в случае использования медианных значений лежит в интервале 0,38–0,41 (точное значение при $m = 2$ равно $\sqrt{2} - 1$). Отметим, что если для каждого m выбирать свое оптимальное значение, то можно получить несколько лучшие результаты, примерно в полтора раза, но все равно хуже, чем по алгоритму 1). Для центрирования определим параметр смещения $D = 0,5 - d(m+1)/2$. Тогда для s -й ординаты, соответствующей медианному значению s -х элементов ранжированных подвыборок (2) по m элементов, имеем

$$\alpha_s = sd + D, \quad s = 1, \dots, m. \quad (11)$$

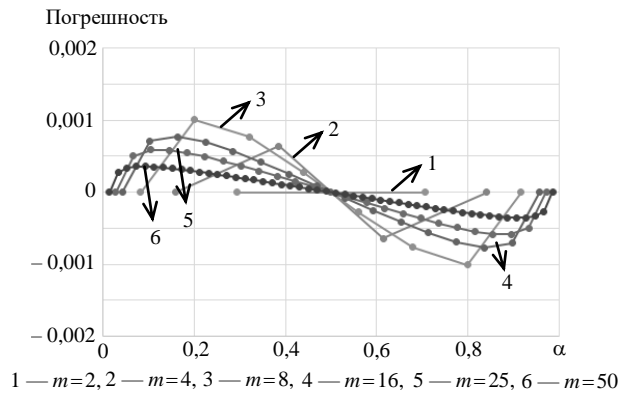


Рис. 4

Точки $(x_1^{med}; \alpha_1)$, $(x_2^{med}; \alpha_2), \dots, (x_m^{med}; \alpha_m)$ — оценки искомой функции распределения случайной величины.

На рис. 5 приведены результаты сравнения ординат, полученных численным расчетом корней уравнений (8) и на основе (11) при выборе $\Delta = \sqrt{2} - 1$.

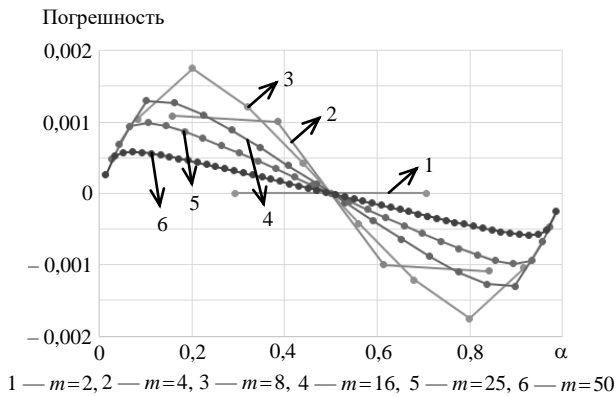


Рис. 5

Как видим, оба алгоритма дают точные решения для $m = 2$ (алгоритм 1 точен также и для $m = 3$); с увеличением m до 8 погрешность сначала увеличивается до 0,001 (алгоритм 1) и 0,0018 (алгоритм 2), а дальше с ростом m монотонно уменьшается.

Приведенные результаты свидетельствуют о приемлемости предложенных упрощенных алгоритмов для применения в большинстве практических случаев — абсциссы точек на графиках соответствуют вычисляемым корням, а ординаты — вносимым погрешностям.

Изложенные теоретические выкладки справедливы в общем случае для произвольного распределения случайной величины. В Приложении приведено определение абсцисс и ординат искомой функции распределения случайной величины через решение интегральных уравнений в аналитическом виде для случая равномерного распределения на основе подвыборки из двух элементов. Полученное решение полностью согласуется с алгоритмами 1, 2.

Численное моделирование

Применение предложенного подхода к определению распределения на основе конечных выборок проиллюстрировано на рис. 6.

Исходный сигнал моделировался в виде случайной величины с распределением, близким к нормальному (сумма шести равномерно распределенных случайных величин), и амплитудой, которая с вероятностью 0,5 принимала значение 1 либо 3.

На рис. 6 сплошной линией приведены плотность и функция распределения смоделированной случайной величины, а также точки распределения, определенные на основе предложенного подхода по подвыборкам из 25 элементов (25 точек), усредненные по ансамблю. Плотность распределения получена численным дифференцированием функции распределения.

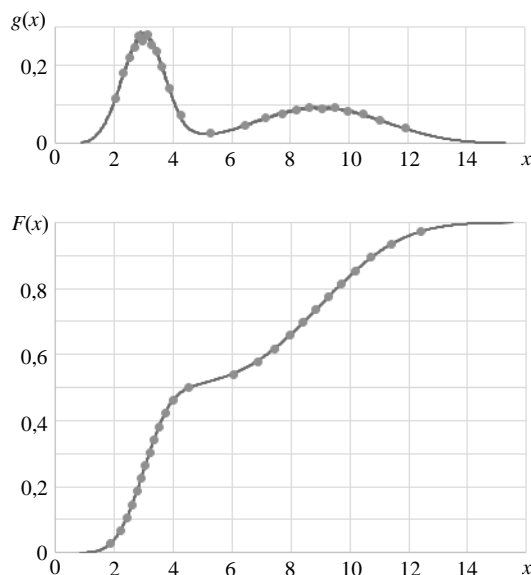


Рис. 6

Как видим, построенная функция и плотность распределения хорошо соответствуют модельным.

Применение метода определения параметров распределения для фильтрации сигналом от импульсных помех

Предложенный подход можно применить для фильтрации интенсивности сигнала при наличии некоррелированной импульсной помехи и известной эталонной функции распределения незашумленного сигнала [14–16].

Наличие некоррелированной импульсной помехи приводит к возрастанию интенсивности зашумленного сигнала на «пораженных» участках и сказывается на плотности и функции распределения выборки зашумленного сигнала. Плотность распределения может приобретать двухмодовый характер (с «утяжеленным хвостом» (рис. 4)), причем одна мода связана с распределением сигнала, а другая обусловлена помехой. Определение интенсивности сигнала (фильтрация) возможно на основе определения распределения по конечным подвыборкам зашумленного сигнала.

Фильтрация состоит в определении количества «правильных» значений в распределении зашумленного сигнала, определенных на основе подвыборок. Понятно, что при «большой» импульсной помехе начало функции распределения зашумленного сигнала будет содержать преимущественно «незашумленные» значения, в то же время в конце функции распределения будут преимущественно «зашумленные» значения.

Определение количества «правильных» значений состоит в сравнении определенных точек функции распределения по конечным подвыборкам зашумленного сигнала с эталонной функцией распределения. В результате такого сравнения определяем количество элементов в ранжированных подвыборках, соответствующих эталонному распределению и на основе которых следует оценивать интенсивность сигнала.

Заключение

Предложен новый подход к оцениванию функции распределения случайной величины на основе конечных (в том числе малых) выборок. Дано теоретическое обоснование подхода, изложены алгоритм оценивания функции распределения, а также упрощенные алгоритмы, имеющие практическое значение. Приведены результаты численного моделирования, которые иллюстрируют соответствие построенной функции распределения модельной. Изложен метод фильтрации сигнала с импульсными помехами на основе предложенного подхода.

Приложение

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ НА ОСНОВЕ ВЫБОРКИ ИЗ ДВУХ ЭЛЕМЕНТОВ

Для определенности рассмотрим равномерно распределенную случайную величину, ее функция распределения $F(x) = x$ линейна. Отметим, что в этом случае ординаты функции распределения будут совпадать с абсциссами.

Рассмотрим набор подвыборок из двух элементов (x_1, x_2) и произведем ранжирование каждой из них.

Определим медианные значения отдельно для первого и второго элементов ранжированных подвыборок из двух элементов.

Для первого элемента плотность вероятности $p_1(x) = C(1 - F(x))$ (поскольку существует только два варианта — либо производилась перестановка элементов, либо нет — $C=2$).

Для второго элемента $p_2(x) = CF(x)$.

Определим соответствующие функции распределения:

$$\Phi_2^1(x) = \int_0^x p_1(x) dx = C \int_0^x (1-x) dx = C \left(x - \frac{x^2}{2} \right),$$

$$\Phi_2^2(x) = \int_0^x p_2(x) dx = C \int_0^x x dx = C \frac{x^2}{2},$$

а также медианное значение первых элементов ранжированных подвыборок из двух элементов на основе выражения $\Phi_2^1(x_1^{med}) = 0,5$.

$$\begin{aligned} \text{Имеем } 2 \left(x_1^{med} - \frac{x_1^{med^2}}{2} \right) &= 0,5 \text{ или } x_1^{med^2} - 2x_1^{med} + 0,5 = 0. \text{ Тогда } x_1^{med} = \\ &= 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Аналогично для вторых элементов

$$\Phi_2^2(x_2^{med}) = 0,5, \quad x_2^{med^2} = 0,5, \quad x_2^{med} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Полученные точные значения, как нетрудно проверить, совпадают со значениями, получаемыми с помощью упрощенных алгоритмов 1 и 2.

ОЦІНЮВАННЯ ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЇ ФУНКЦІЇ РОЗПОДІЛУ НА ОСНОВІ СКІНЧЕННИХ ВИБІРОК ВИПАДКОВОЇ ВЕЛИЧИНИ

Запропоновано новий підхід до оцінювання функції розподілу випадкової величини на основі скінченних (в тому числі малих) вибірок. Підхід засновано на визначенні оцінок положень точок функції розподілу. Викладено теоретичне обґрунтування підходу, алгоритми оцінювання функції розподілу. Рівняння (інтегральні) для визначення точок на шуканій функції розподілу є точними. Тому при знанні розподілу будь-якої порядкової статистики точки шуканої функції розподілу визначаються точно. У найпростішому випадку підхід може бути зведено до визначення медіани статистики. Зазвичай, її точне значення невідоме. Тому як медіану розподілу статистики використовують вибіркочну медіану. Розглянуто слушність, зміщеність та ефективність оцінок положення точок на шуканій функції розподілу. Показано, що запропоновані оцінки є слушними, але зміщеними, причому зміщення залежить від виду шуканого розподілу і зменшується з ростом розміру підвибірки. Чисельні експерименти для найбільш важливих практичних випадків свідчать про вигравш по ефективності запропонованого підходу в порівнянні з класичним. Запропоновано спрощені алгоритми наближеного визначення параметрів розподілу, а також наведено оцінки похибок, що свідчать про прийнятність запропонованих спрощених алгоритмів. Наведено результати чисельного моделювання, які ілюструють відповідність побудованої функції розподілу модельній і переваги підходу. Відзначено, що оцінка функції розподілу на основі запропонованого підходу у вигляді інтерпольованої кривої дозволяє проводити чисельне диференціювання, фільтрацію та інші операції обробки сигналів. У той же час класична функція розподілу у вигляді ступінчастої кривої має ряд відомих обмежень при застосуванні цих операцій обробки. Викладено метод фільтрації сигналу з імпульсними некорельованими завадами на основі запропонованого підходу. У Додатку наведено визначення абсцис і ординат шуканої функції розподілу випадкової величини через рішення інтегральних рівнянь в аналітичному вигляді для випадку рівномірного розподілу на основі підвбірок з двох елементів. Отримане рішення повністю узгоджується зі спрощеними алгоритмами.

Ключові слова: випадкова величина, функція розподілу, варіаційний ряд.

A.B. Lozynsky, I.M. Romanyshyn, B.P. Rusyn

ESTIMATION OF EXPERIMENTAL DISTRIBUTION FUNCTION ON THE BASIS OF FINITE SAMPLES OF RANDOM VARIABLE

A new approach to estimating the distribution function of a random variable based on finite (including small) samples is proposed. The approach is based on determining estimates of the positions of points of the distribution function. The theoretical substantiation of the approach and the algorithms for estimating the distribution function are presented. The equations (integral) for determining of the points on the desired distribution function are exact. Therefore, with knowledge of the distribution of any order statistics, the points of the sought-for distribution function are determined exactly. In the simplest case, the approach can be reduced to determining the median of statistics. Usually its exact value is unknown. Therefore, the estimation of median of the sample distribution is used as the median of the distribution of statistics. The consistency, bias and effectiveness of estimates of the points position on the sought-for distribution function are considered. It is shown that the proposed estimates are consistent, but biased, and the bias depends on the type of the sought-for distribution and decreases with increasing size of the subsample. Numerical experiments for the most important practical cases indicate an increasing of the effectiveness of the proposed approach compared to the classical one. Simplified algorithms for the approximate determination of distribution parameters are proposed, and error estimates are given that indicate the acceptability of the proposed simplified algorithms. The results of

numerical modeling are presented, which illustrate the correspondence of the constructed distribution function of the model and the advantages of the approach. It is noted that the estimation of the distribution function based on the proposed approach in the form of an interpolated curve allows for numerical differentiation, filtering and other signal processing operations. At the same time, the distribution function in the classical form has a number of limitations in the application of these processing operations. A method for filtering a signal with uncorrelated pulse interference based on the proposed approach is described. The Appendix gives the determination of abscissas and ordinates of the sought-for distribution function of a random variable due to the solution of integral equations in an analytical form for the case of a uniform distribution based on subsamples of two elements. The resulting solution is fully consistent with simplified algorithms.

Keywords: random variable, distribution function, variational series.

1. Aliev T., Musaeva N., Suleymanova M., Gazizade B. Technology for calculating the parameters of the density function of the normal distribution of the useful component in a noisy process. *Journal of Automation and Information Sciences*. 2016. **48**, N 4. P. 39–55. DOI: 10.1615/JAutomatInfScien.v48.i4.50.
2. Rosenblatt M. Remarks on some non-parametric estimates of a density function. *Annals Math. Statist.* 1956. **27**. P. 832–837.
3. Parzen E. On estimation of a probability density function and mode. *Ann. Math. Statist.* 1962. **33**, N 3. P. 1065–1076.
4. Eddy W.F. Optimum kernel estimators of the mode. *Ann Statist.* 1980. **8**. P. 870–882.
5. Eddy W.F. The asymptotic distributions of kernel estimators of the mode. *Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und verwandte Gebiete*. 1982. **59**. P. 279–290.
6. Nadaraya E.A. Some new estimates of distribution functions. *Teor. Veroyatnost. i Primenen.* 1964. **9**, N 3. P. 550–554.
7. Nadaraya E.A., Babilua P., Sokhadze G. The estimation of a distribution function by indirect sample. *Український математичний журнал*. 2010. **62**, N 12. P. 1642–1658. DOI: 10.1007/s11253-011-0479-y.
8. Кулешов Е.Л. Интервальная оценка функции распределения вероятностей. *Автометрия*. 2015. **51**, № 2. С. 23–26. DOI: 10.15372/AUT20160104.
9. Львовский Е.Н. Статистические методы построения эмпирических формул: Учеб. пособие для вузов. 2-е изд., перераб. и доп. М.: Высш. школа, 1988. 239 с.
10. Glivenko V. Sulla determinazione empirica delle leggi di probabilita. *Giornale dell'Instituto Italiano degli Attuari*. 1933. **4**. P. 92–99.
11. Cantelli F.G. Sulla determinazione empirica delle leggi di probabilita. *Giornale dell'Instituto Italiano degli Attuari*. 1933. **4**. P. 421–424.
12. Kolmogorov A.N. Sulla determinazione empirica di una legge di distribuzione. *Giornale dell'Instituto Italiano degli Attuari*. 1933. **4**. P. 83–91.
13. Смирнов Н.В. Приближение законов распределения случайных величин по эмпирическим данным. *Успехи математических наук*. 1944. **10**. С. 179–206.
14. Lozynsky A., Romanyshyn I., Rusyn B., Minialo V. Robust approach to estimation of the intensity of noisy signal with additive uncorrelated impulse interference. *IEEE Second International Conference on Data Stream Mining & Processing (DSMP)*. August 21–25, 2018. Ukraine: Lviv. 2018. P. 251–254. DOI: 10.1109/DSMP.2018.8478625.
15. Lozynsky A., Romanyshyn I., Rusyn B. Intensity estimation of noise-like signal in presence of uncorrelated pulse interferences. *Radioelectronics and Communications*. 2019. **62**, N 5. P. 214–222. DOI: 10.3103/S0735272719050030.
16. Rusyn B.P., Lutsyk A.A., Kosarevych R.Ya. Modified architecture of lossless image compression based on FPGA for on-board devices with linear CCD. *Journal of Automation and Information Sciences*. 2019. **51**, N 2. P. 41–49. DOI: 10.1615/JAutomatInfScien.v51.i2.50.

Получено 03.06.2019
После доработки 11.09.2019