УДК 519.85

В.М. Комяк, А.Н. Соболь, А.Н. Данилин, В.В. Комяк, К.Т. Кязимов

ОПТИМИЗАЦИЯ РАЗБИЕНИЯ ОБЛАСТИ НА ПОДОБЛАСТИ ПО ЗАДАННЫМ ОГРАНИЧЕНИЯМ В ПРОСТРАНСТВЕ

Ключевые слова: геометрический объект, геометрическая информация, разбиение, трассировка, конфигурационное пространство, обобщенные переменные, математическая модель, оптимизация.

Введение

При взаимодействии материальных объектов, участвующих в процессе синтеза сложных систем, необходимо учитывать их пространственную форму, метрические характеристики, а также ограничения на их размещение. В общем случае синтез оптимальных конфигураций сложных систем [1, 2], как правило, связан с задачами оптимизации упаковки (компоновки, покрытия, разбиения) пространственных объектов заданной формы. Рассматриваемое направление исследований относится к теории геометрического проектирования, основы которого заложены в работе [3], и связано с математическим моделированием геометрических объектов и их взаимоотношений [4–8].

Одна из задач геометрического проектирования — задача разбиения области на подобласти. Непрерывные задачи разбиения области на подобласти приведены в [9, 10]. В данной работе рассматривается дискретная задача разбиения области на два вида подобластей, каждая из которых разбивается на подобласти по разным критериям качества и ограничениям.

Примером такой задачи можно назвать задачу разбиения области на два вида подобластей: подобласти по функциональному назначению задачи и трассы (телесные), которые проводятся к каждой из подобластей первого вида. К такой задаче относятся актуальные практические задачи обустройства территорий (строительство стоянок автотранспорта и проектирование соединительных подъездных дорог), паевания земли и прокладки вспомогательных трасс, обеспечивающих доступ к любому из участков; рациональной прокладки коммуникационных соединений в строительстве, судо- и авиастроении; трассировки многослойных плат в радиоэлектронике и т.д.

Однако несмотря на наличие различных моделей и методов решения дискретных задач разбиения и трассировки, они по-прежнему актуальны в тех областях, формализация которых недостаточна для применения существующих моделей и методов, что связано с необходимостью учета особенностей каждой из предметных областей. Это, в свою очередь, приводит к необходимости построения новых математических моделей, формулировке постановок новых задач и разработке эффективных методов их решения.

В рамках класса задач разбиения и трассировки в работе рассматривается задача обоснования рациональной сети путей эвакуации, которая возникает на этапе проектирования зданий. Поскольку пути эвакуации пронизывают все здание, а их структура и размеры связаны с компоновкой помещений, повышение эффективности противопожарных решений может вступить в противоречие с экономическими и техническими показателями проектных решений. Иначе говоря, проектные решения можно считать неэффективными, если решение по обеспечению безопасности людей будет приводить к неэффективному использованию площадей здания. Поэтому актуальной является задача обоснования объемно-планировочных решений зданий, как с точки зрения эффективного использования полезных площадей зданий, так и с точки зрения проектирования путей эвакуации в них.

Рассмотрим следующую задачу. Пусть для проектирования определены: трехмерная область S_0 любой пространственной формы, что описывает N-этажное здание, помещения различного функционального назначения на каждом этаже с разным количеством людей в них. Проектировщик определяет места входа в здание $u_i(x_i, y_i, z_i)$, $i = 1, \ldots, n$, задаваемые диапазоном значений $(u_i - \Delta u_i$, $u_i + \Delta u_i)$, которые определяют местоположение лестниц. Ступени имеют форму прямоугольных параллелепипедов. В области существуют также области запрета $S_t, t = 1, \ldots, m$, обозначим $S_0' = S_0 \setminus \bigcup_t S_t$.

Возникает следующая задача. Необходимо разбить область S_0' на два типа областей: S_{fj}, $f = 1, \ldots, n_j$, $j = 1, \ldots, N$, по функциональному назначению здания (этажи S_{0j}, помещения на этажах S_{fj}, с максимизацией их объемов при ограничениях норм проектирования); области $T^* = T_0^* \bigcup L^*$, определяющие рациональную сеть коридоров $T_0^* = \bigcup_j T_j^*$ и лестниц $L^* = \bigcup_{i=1,2,\ldots\in\{1,2,\ldots,n\}} L_i^*$, по заданному критерию (например, по критерию времени движения потоков людей при ограничениях как на параметры потока, так и на метрические характеристики (размеры) трасс, учитывающие нормы строительства).

1. Формирование пространственной конфигурации разбиения геометрических объектов

Как сказано выше, сформулированная задача относится к классу задач геометрического проектирования [3] и заключается в отображении ν некоторого исходного множества $\sum$ элементов произвольной природы в абстрактное множество Ω соответствующей структуры при выполнении заданного набора ограничений Λ, $\nu : \sum \to \Omega$ [1]. Такое отображение называется конфигурацией и осуществляется в конфигурационном пространстве [1].

Конфигурационное пространство геометрических объектов базируется на формализации понятия геометрической информации. Геометрическая информация $g = (\{s\}, \{\mu\}, \{p\})$ об объекте S включает в себя пространственную форму $\{s\}$, его метрические характеристики $\{\mu\}$ и параметры размещения $\{p\}$. Будем задавать пространственную форму $\{s\}$ геометрического объекта уравнением его границы в виде $f(\xi, \mu) = 0$, где $\xi = (x, y, z) \in R^3$, а $\mu = (\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_\alpha)$ — константы, характеризующие его метрические свойства, назовем их параметрами пространственной формы объекта S.

Свяжем с объектом собственную систему координат, начало которой — полюс объекта. При аффинных преобразованиях движение объекта изменяет положение его собственной системы координат относительно неподвижной системы координат пространства R^3. Для характеристики такого положения зададим параметры размещения $p = (p_1, p_2, \ldots, p_\beta) = (x, y, z)$; $\beta = 3$. Сформируем конфигурационное пространство ΞS объекта S с обобщенными переменными: метрическими параметрами $\mu = (\mu_1, \mu_2, ..., \mu_\alpha)$ и параметрами размещения $p = (p_1, p_2, ..., p_\beta)$. Тогда каждая точка $g = (\mu, p) = (\mu_1, \mu_2, ..., \mu_\alpha, p_1, p_2, ..., p_\beta)$ конфигурационного пространства ΞS определяет геометрический объект $S(g) \subset R^3$.

Пусть $\Xi S_0'$ — конфигурационное пространство объекта S_0' с обобщенными переменными $g_0 = (\mu^0, p^0)$, и пусть $p^0(0, 0, 0)$ — начало собственной неподвижной системы координат.

Осуществим параметризацию двух видов подмножеств:

$$S^1 = \{S_{11}, .., S_{1n_1}, .., S_{f1}, .., S_{fn_f}, .., S_{N1}, .., S_{Nn_N}\}, \tag{1}$$

$$S^2 = \{T_1, .., T_j, .., T_N;\ L_1, .., L_i, .., L_n\}. \tag{2}$$

С помощью теоретико-множественных операций сформируем сложные объекты $S^1 = \left(\bigcup_j \left(\bigcup_{f_J} S_{fj}\right)\right)$ и $S^2 = \left(\bigcup_j T_j\right) \bigcup \left(\bigcup_i L_i\right)$. Назовем объекты S_{fj}, T_j, L_i базовыми.

Пусть объект S_{fj} имеет форму s_{fj}^1, метрические параметры $\mu_{fj}^1 = (\mu_{fj,1}^1, \mu_{fj,2}^1, ..., \mu_{fj,\alpha}^1)$ и параметры размещения $p_{fj}^1 = (p_{fj,1}^1, p_{fj,2}^1, ..., p_{fj,\beta}^1)$; $\beta = 3$. Объекты T_j, L_i имеют форму s_j^2, метрические параметры $\mu_j^2 = (\mu_{j,1}^2, \mu_{j,2}^2, ..., \mu_{j,\alpha}^2)$, параметры размещения $p_j^2 = (p_{fj,1}^2, p_{j,2}^2, ..., p_{j,\beta}^2)$ и s_i^2, метрические параметры $\mu_i^2 = (\mu_{i,1}^2, \mu_{i,2}^2, ..., \mu_{i,\alpha}^2)$, параметры размещения $p_i^2 = (p_{i,1}^2, p_{i,2}^2, ..., p_{i,\beta}^2)$ соответственно.

Пусть $\Sigma = \{S^1, S^2\}$ — исходное множество геометрических объектов, где S^{ii}, $ii = 1, 2$, соответственно множества (1, 2) с обобщенными переменными $g^{ii} = (\mu^{ii}, p^{ii})$, а $\{s^1, s^{2,}, ..., s^{m}\}$ — множество возможных их пространственных форм. Каждой точке $g^{ii} \in \Xi(S^{ii})$ соответствует параметризованный геометрический объект $S^{ii}(g^{ii}) \subset R^3$. Конфигурационное пространство будет иметь вид $\Xi\Sigma = \Xi S^1 \times \Xi S^2$ с обобщенными переменными $g = (g^1, g^2)$.

С помощью теоретико-множественных операций сформируем сложный геометрический объект $S_p = P(S^1, S^2)$, $(S_p = S^1 \bigcup S^2)$. Оператор $P: \Sigma \to S_p$ задает структуру сложного объекта. Тогда сложному объекту S_p в конфигурационном пространстве $\Xi\Sigma$ будет отвечать параметризованный геометрический объект $S^{\partial}(g^1, g^2) = P(S^1(g^1), S^2(g^2))$.

Определение 1 [1]. Отображение $v: \sum \to \Xi\Sigma$ множества геометрических объектов $\Sigma = \{S^1, S^2\}$ в конфигурационное пространство $\Xi\Sigma$, которое удовлетворяет заданному набору ограничений Λ, задает пространственную конфигурацию геометрических объектов S^{ii}, $ii = 1, 2$.

Пусть $\Sigma^0 = \Sigma \bigcup S_0^{'}$, аналогично изложенному выше сформируем конфигурационное пространство $\Xi\Sigma^0 = \Xi S_{0'}^{'} \times \Xi S^1 \times \Xi S^2$.

Введем понятие пространственной конфигурации разбиения. Для формирования системы ограничений Λ зададим на множестве объектов из Σ^0 бинарные отношения [1]:

а) непересечения $\{*\}$, т.е. $S^1(g^1) * S^2(g^2)$, если $\mathrm{int}\, S^1 \bigcap \mathrm{int}\, S^2 = \varnothing$;

б) пересечения $\{\bar{*}\}$, т.е. $S_0^{'}(g_0) \bar{*} \Sigma(g)$, если $S_0^{'} \bigcap \Sigma = S_0^{'}$;

в) включения $\{\circ\}$, т.е. $\Sigma(g) \circ S_0^{'}(g_0)$, если $\mathrm{int}\, \Sigma \subset S_0^{'}$.

Следует отметить, что $\mathrm{int}\, S$ — это топологическая внутренность объекта.

Определение 2. Отображение $v : \sum^0 \to \Xi\Sigma^0$ задает конфигурацию разбиения, если $S^1(g^1) * S^2(g^2)$, $S_0^{'}(g_0) \bar{*} \Sigma(g)$ и $\Sigma(g) \circ S_0^{'}(g_0)$.

2. Математическая модель и метод решения задачи разбиения

Необходимо определить оптимальную геометрическую информацию, характеризующую рациональность разбиения и трассировки

$$g^* = F(g), \tag{3}$$

где $g = (g^1, g^2)$ — исходная геометрическая информация в задаче разбиения и трассировки; F — отображение, которое превращает исходную геометрическую информацию в оптимальную геометрическую информацию g^*.

Другими словами, необходимо определить оптимальный вектор переменных параметров u^*, который соответствует оптимальной геометрической информации g^*, при котором функционал качества $Q(u)$, характеризующий рациональность разбиения и трассировки с учетом заданной системы ограничений U, достигал бы экстремального значения:

$$u^* = \arg \operatorname*{extr}_{u \in U} Q(u), \tag{4}$$

где $u = (u_Đ, u_T)$; $u_Đ = (\mu^1, p^1, p^2)$, $u_T = (\mu^2)$ — переменные параметры компонент геометрической информации g, которые относятся к характеристикам разбиения и трассировки с учетом соответствующих ограничений.

Функционал $Q(u)$, описывающий качество получаемого решения задачи разбиения и трассировки, отражает эффективность проектных решений и состоит из двух составляющих: первое учитывает эффективность использования целевой площади от решения задачи разбиения, второе — от решения задачи трассировки.

Определим смысл ограничений на переменные параметры задачи:

$$U = \{u \,|\, R^P(u_P) \ge 0, R^T(u_T) \ge 0\}, \tag{5}$$

 ISSN 0572-2691

где ограничения задачи $R^P(u_P)=\{R^P_\eta(u_P)\ge 0,\ \eta\in[1,\ldots,r_P]\}$ связаны с разбиением, $R^T(u_T)=\{R^T_\varsigma(u_T)\ge 0, \varsigma\in[1,\ldots,\ r_T]\}$ — с трассировкой.

Ограничения на разбиение области: 1) принадлежность подобластей разбиения исходной области; 2) непересечение подобластей между собой; 3) результат объединения подобластей, областей запрета и трасс, который совпадает с исходной областью; 4) непересечение подобластей разбиения с областями запрета; 5) выполнение требований соотношения объемов (площадей) подобластей; 6) соблюдение минимальных объемов подобластей.

Ограничения на проведение трасс: 7) принадлежность начала трасс каждого этажа границам подобластей; 8) учет ограничений на геометрические параметры трасс; 9) непересечение трасс с областями запрета и подобластями; 10) непревышение необходимого времени полной эвакуации людей из здания; 11) соблюдение допустимой плотности потока людей.

Различают параметры, характеризующие разбиение, и параметры, характеризующие трассировку. Предыдущая особенность положена в основу декомпозиции двухкритериальной задачи на две взаимосвязанные подзадачи меньшей размерности: задачу разбиения и задачу трассировки. Сначала рассмотрим задачи разбиения, а затем, на множестве подобластей и их границ, — задачи трассировки. Воспользуемся подходом ранжирования критериев:

$$Q_P \succ Q_T,\ u_P^* = \arg \underset{u_P\in U}{ext}\, Q_P(u_P),\ \ u_T^* = \arg \underset{u_T\in U'\subset U}{ext}\, Q_T(u_T, u_P^*), \qquad (6)$$

где Q_P — критерий качества разбиения; Q_T — критерий качества трассировки.

Общая задача (3)–(5) разбивается на следующие базовые задачи.

Задача разбиения в $\boldsymbol{R^3}$. Необходимо максимизировать суммарный объем подобластей, на которые разбивается исходная область, т.е.

$$u_P^* = \arg \max_{u_P\in U} Q_P(u_P),\ \ Q_P(u_P)=V[\bigcup_f \bigcup_j S_{fj}(u_P)], \qquad (7)$$

где V — функция определения объема области.

Область U описывает вышеперечисленные ограничения 1)–11).

Формализованы ограничения задачи и исследованы ее свойства [11]. Отмечено, что задача принадлежит к многомерным, нелинейным, многоэкстремальным задачам математического программирования. В силу особенностей предметной области необходимо учитывать специфические нелинейные ограничения, что выводит математическую модель за рамки классических моделей нелинейного математического программирования.

Пусть p_j — перестановка номеров $j=1,\ldots,N$, которая соответствует варианту разбиения области S_0 на подобласти S_{0j}, $j=1,\ldots,N$, набором плоскостей, параллельных координатной плоскости xOy, где $S_{0j}=\bigcup_{f=1}^{n_j} S_{fj}$. Высота подобластей S_{0j} определяется, исходя из их функциональных особенностей (назначения и соответственно разных высоты и характеристик). Иными словами, каждой последовательности номеров $j=1,\ldots,N$ или некоторой перестановке p_j номеров $j = 1,...,N$, ставится в соответствие вариант разбиения области S_0 на подобласти S_{0j}. Количество возможных вариантов разбиения — $N!$. Каждая перестановка определяет закон распределения характеристик (например, количество людей, поступающих на лестничную клетку) в зависимости от номера подобласти j, который, в свою очередь, определяет закон изменения метрических характеристик области разбиения.

Для одной основной трассы рассматривается C_n^1 вариантов решения задачи на области допустимых решений, которая формируется ограничениями задачи. При выборе двух трасс рассматривается C_n^2 вариантов и т.д., а при выборе n трасс — C_n^n вариантов. Таким образом, задачу (7) с ограничениями 1)–11) необходимо решить на комбинаторном множестве, мощность которого равна $(\sum_{jj=1}^{n} C_n^{jj}) \cdot N! \cdot \bar{O}$, где $\bar{O}$ — оценка алгоритма разбиения подобластей S_{0j}, $j = 1,...,N$.

Задача трассировки в $\boldsymbol{R^3}$. Необходимо минимизировать время движения потока людей по трассам $T = T_0 \bigcup L$ (T_0 — сеть коридоров, L — лестницы).

В этом случае

$$u_T^* = \arg \min_{u_T \in U' \subset U} Q_T(u_T, u_P^*), \; Q_T(u_T, u_P^*) = t[T(u_T, u_P^*)], \tag{8}$$

где $t\,[T(u_T, u_P^*)]$ — время движения по сети T. Область U' формируется ограничениями 7)–11).

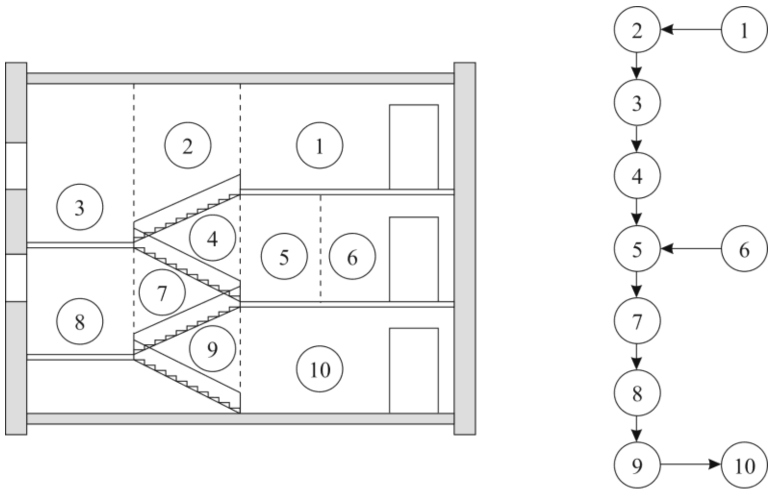
Задача (8) требует учета метрических характеристик трасс, и данный класс задач относится к задачам телесной трассировки (body tracing).

Для определения времени движения однородных потоков людей по трассам применяется метод моделирования движения потока с помощью аппарата сетей Петри. Моделирование осуществляется с учетом нормированной плотности потока, которая обеспечивается изменением метрических характеристик трасс при их соединении. Формально сеть Петри изображается ориентированным двудольным графом специального вида, множество вершин которого делится на два класса: позиции, которым в рассматриваемой модели соответствуют подобласти разбиения и участки трасс, а также переходы, которым соответствуют поперечные сечения между соседними участками трасс. Функционирование сети Петри представляет собой процесс перемещения маркеров (людей), которые переходят из одной позиции в другую при срабатывании переходов, что приводит к новой разметке, т.е. новому размещению людей (рис. 1).

Для гетерогенных потоков используется метод последовательно-одиночного перемещения людей, форма которых задается эллипсами с различными метрическими характеристиками [12].

Задачу (8) необходимо решить на комбинаторном множестве, мощность которого равна $N! V \cdot \hat{N}$, где $\hat{N}$ — оценка трассировки подобластей S_{0j}, $j = 1,...,N$, $V = \sum_{jj=1}^{n} C_n^{jj}$. Варианты, в которых метрические характеристики не удовлетворяют ограничениям задачи, или время движения превышает необходимое, отбрасываются.

 ISSN 0572-2691



а *б*

Рис. 1

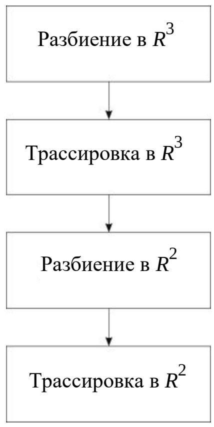


Рис. 2

Таким образом, осуществлена декомпозиция задачи (3)–(5) на две подзадачи: разбиения (7) и трассировки (8), размерность каждой меньше, чем (3)–(5).

В силу большой размерности и жесткой системы ограничений каждая из сформулированных выше задач (7) и (8) также разбивается на взаимосвязанные задачи пространства R^2. При этом переменные параметры разбиваются на подмножества, характеризующие разбиение и трассировку с сохранением приоритетности решения задач.

В связи с вышеуказанной особенностью рассматриваемой задачи предложена схема ее решения (рис. 2).

Задача разбиения в $\boldsymbol{R^2}$. Построена модель разбиения j-й подобласти S_{0j}:

$$Q_P(u_P) = \frac{S_q(\bigcup\limits_f S_{fj}(u_P))}{S_q(S_0 \setminus (\bigcup\limits_i T_{ij}) \setminus (\bigcup\limits_t S_{tj})} \to \underset{u_P \in U'' \subset U}{1}, \tag{9}$$

где S_q — функция определения площади области.

Область U'' описывает систему ограничений 1)–11) для двумерного случая.

Предложено два метода разбиения многосвязной области на типовые подобласти взаимно ортогональными прямыми и радиальными прямыми при заданном соотношении площадей подобластей и ограничений на их минимальную площадь [13]. Разработаны два алгоритма разбиения области на подобласти наборами взаимно ортогональных прямых для случая, когда задаются трассы в области и без них. При задании трасс задача сводится к разбиению многосвязной области, осуществляется выбор подмножеств объектов для каждой компоненты связности. Для формирования и дальнейшего перебора допустимых наборов подобластей разбиения записываются деревья решений [13].

Получена верхняя оценка количества допустимых наборов подобластей (оценка разбиения), которые необходимо проанализировать с помощью вышеупомянутых деревьев:

$$o = \psi \cdot \prod_{k=1}^{M_j} n_{kj}!(n_{kj}-1)\cdot D, \qquad (10)$$

где $\psi = (n_j)^{n_j}$ — оценка количества допустимых наборов подобластей разбиения некоторой области S_{oj}, $S_{oj} = \bigcup_{k=1}^{M_j} S_{kj}$, $\bigcup_{f=1}^{n_j} S_{fj} = \bigcup_{k=1}^{M_j} S_{kj}$, $\sum_{k=1}^{M_j} n_{kj} = n_j$; M_j — количество компонент связности S_{kj} области S_{oj}; n_j — количество объектов разбиения области S_{oj}; D — верхняя оценка количества допустимых вариантов разбиения по деревьям решений; $(n_{kj}-1)$ — количество деревьев решений для каждой перестановки номеров подобластей разбиения, принадлежащих компоненте связности S_{kj}.

Обозначим $\bar{O} = \sum_{j=1}^{N} o$. В качестве правила отсечения выступает требование отсутствия дублирования допустимых наборов подобластей.

Следует заметить, что площади подобластей разбиения задаются интервально, а разбиение осуществляется для максимальных значений площадей.

Задача трассировки в $\boldsymbol{R}^2$. По разбиению области S_{oj} формируется граф. Выделяются вершины графа V_{ii}, $ii = 1,\ldots,n_T$; $n_T(n, u_P^*)$, принадлежащие границе области. Назовем эти вершины рубежом. От любой точки границы трассы продолжаются в область S_{oj} по ребрам графа. Связное множество ребер, имеющее общую вершину на рубеже, назовем остовом. Систему остовов, которые не имеют общих вершин на рубеже и по которым все объекты разбиения достижимы, назовем полной или VR-покрытием. Обозначим эту систему T_j, а время движения по ребрам $l_{ii_{gq}}$ остова T_{ii} — $\sum_{gq} t_{ii_{gq}}$. Для VR-покрытия определим остов с максимальным временем движения по его ребрам:

$$t_{T_j} = \max_{ii\in\{1,\ldots,n_T\}} \sum_{gq} t_{ii_{gq}}. \qquad (11)$$

Пусть τ — множество VR-покрытий для S_{oj} и вершин $V_{ii}, ii = 1,\ldots,n_T$. Тогда задача проведения трасс, обеспечивающих доступ к каждой подобласти, можно представить с помощью выражения (12), т.е. осуществляется выбор VR-покрытия с минимальным значением времени (11):

$$Q_T(u_T^*, u_P^*) = t_{T_j} \to \min_{T_j\in\tau}; \; T_* = \arg\min_{T_j\in\tau} t_{T_j}, \quad u_T \in U''' \subset U', U''' \subset \tau. \qquad (12)$$

Область U''' формируется ограничениями 7)–11) для двумерного случая. Для построения множества VR-покрытий построено дерево решений [11].

Предложен метод получения оптимального решения, составляющими которого являются как построение всех допустимых VR-покрытий по дереву решений, так и выбор оптимального, с точки зрения (12).

Получена оценка трассировки j-й подобласти:

$$\bar{N} = (k_0 \cdot n_v)^{n_T}, \qquad (13)$$

где k_0 — количество логических операций для присоединения ребра к вершине; n_v — количество ребер графа.

Метрические характеристики трасс определяются моделированием движения потока людей с допустимой плотностью [11, 12] и учитываются в полученном разбиении, поскольку разбиение осуществляется для случая задания площадей подобластей их максимальными значениями с интервалов возможных изменений.

3. Компьютерное моделирование разбиения в примерах прикладных задач

Создано алгоритмическое и программное обеспечение для компьютерного моделирования разбиения и трассировки. Решена следующая задача.

Необходимо разбить здание на два вида областей: 1) по функциональному назначению здания (этажи, а на этажах — помещения с максимизацией их площадей и с использованием норм проектирования); 2) по определению структуры путей эвакуационного движения потоков людей (минимальное количество лестниц, коридоры на этажах, обеспечивающие доступ ко всем помещениям, метрические характеристики путей движения с минимальным временем, которое не должно превышать необходимое, полной эвакуации неоднородно расположенных в здании людей).

Построено дерево решений задачи (3)–(5) [11]. Получена оценка трудоемкости предложенного алгоритма

$$O = \left(\sum_{jj=1}^{n} C_n^{jj} \right) \cdot N! \cdot \hat{N}, \tag{14}$$

где $\hat{N} = \sum_{j=1}^{N} o \cdot \bar{N}$.

Вопросы разбиения множества на подмножества в задачах комбинаторной оптимизации рассмотрены в работе [14]. В данной работе для сокращения количества вариантов, которые анализируются методом ветвей и границ, предложено использовать ряд разработанных правил отсечения и верхних оценок и метод Монте–Карло на каждом из уровней дерева решений.

В качестве примера осуществлено компьютерное моделирование эвакуации людей из 50-этажной башни (фрагмент приведен на рис. 3) с помощью комплекса программ, который написан на языке C ++ в среде Visual C.

Высота этажей разная: с первого по третий — 4,5 м; четвертого — 5,1 м; с пятого по сороковый — 3,6 м; с сорок первого по пятидесятый — 4,5 м, цокольный этаж — 10 м. Количество людей на всех этажах одинаковая. На рис. 4, *а* приведена конфигурация разбиения этажа на шесть подобластей коридорами (5 подобластей имеет по 22 человека, а одна область — 23) при шести входах (лестницах).

Каждая из подобластей разбивается на три объекта взаимно ортогональными прямыми с заданными соотношениями площадей. Решена задача трассировки с определением ширины коридоров этажа и лестниц: все коридоры имеют ширину 1,05 м, а лестницы — 1,35 м. Время полной эвакуации из здания — 433,75 с при скорости движения 100 м/мин (нормированная скорость), объем трасс составляет 66348 м^3.

На рис. 4, *а* сделаны следующие обозначения: числа на ребрах — длина и ширина коридоров в метрах; в вершинах — время следования к лестничной клетке в секундах.

На рис. 4, *б* приведены параметры потока на одном из выходов (в вершине последовательности цифр, которые необходимо читать по парам: первое число в паре — время в секундах, второе — пропускная способность в чел / с).

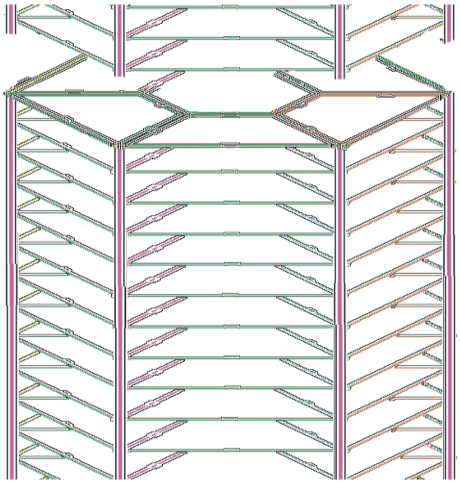
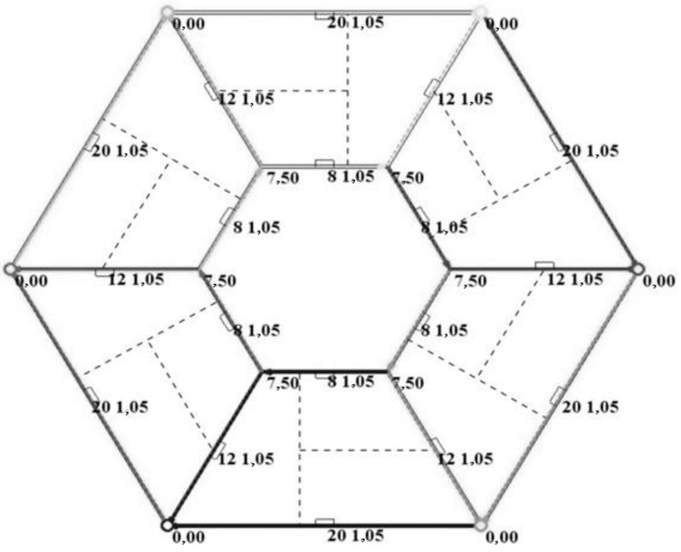
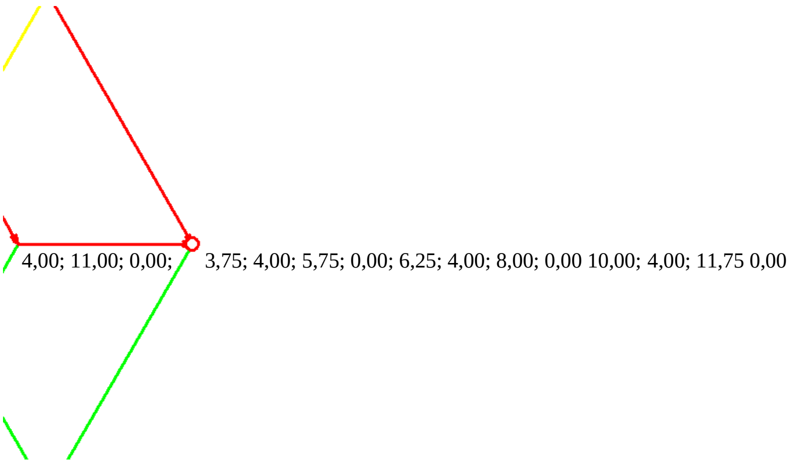


Рис. 3



а



б

Рис. 4

ISSN 0572-2691

Данный вариант проекта здания наилучший с точки зрения рассматриваемой целевой функции — максимизации целевого объема (7) при минимальном времени полной эвакуации (8) с учетом норм проектирования зданий и допустимых параметров движения потока людей.

Для обоснования адекватности разработанных математических моделей и методов оптимизационного разбиения и трассировки в R^3 проведено сравнение полученных результатов с решениями проектировщиков на примере 25-этажного жилого дома. В данном здании планировка всех этажей одинаковая, количество людей на всех этажах принимается равным 18 человек, здание имеет одну лестничную клетку шириной 1,25 м, блоки каждого из этажей соединяет холл (с максимальной шириной 3,7 м).

Осуществлено моделирование разбиения половины этажа (в силу симметрии) на три блока заданных площадей наборами взаимно-перпендикулярных прямых. При моделировании рассмотрено шесть возможных вариантов разбиения на три блока с одинаковыми площадями. В результате анализа полученных вариантов с учетом правил отсечения (блоки должны покрывать обозначенные места) выбран вариант, который совпадает с вариантом проектировщиков.

По варианту разбиения этажа построен граф. Осуществлена трассировка, обеспечивающая доступ к каждому из блоков; выбран вариант *VR*-покрытия с минимальным значением максимального времени (11) (рис. 5, *а*, с временем достижения блоков при скорости движения людского потока 100 м/мин). Для оптимальной трассировки путем моделирования движения потока людей с плотностью 5 чел./кв.м определены геометрические параметры трасс (рис. 5, *б*, с шириной коридоров). Минимальное время выхода из дома составляет 244,59 с, ширина лестницы — 1,56 м, максимальная ширина коридоров — 2 м. На рис. 5, *в*, приведены параметры потока людей при их движении на этаже со скоростью 90 м/мин.

Решение по безопасности эвакуации приводит к увеличению ширины лестничной клетки на 0,31 м, что соответственно увеличивает ее объем на 124,99 $м^3$. Это может быть компенсировано проектировщиками за счет уменьшения холлов этажей.

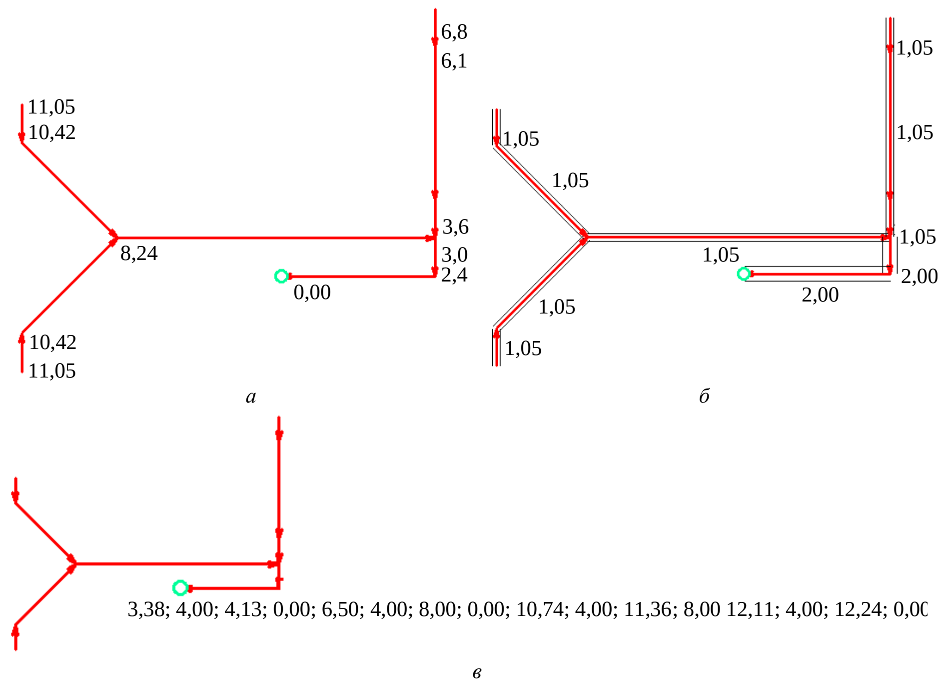


Рис. 5

Заключение

Введено понятие пространственной конфигурации разбиения области на подобласти, с помощью которого построена новая модель ее разбиения на два вида подобластей, каждая из которых разбивается на подобласти по разным критериям качества и ограничениям. На примере задачи обоснования объемно-планировочных решений зданий получено разбиение области на подобласти как с точки зрения эффективного использования целевых площадей здания, так и с точки зрения минимального времени полной эвакуации людей из здания.

Рассмотрение метрических характеристик и параметров размещения объектов в качестве независимых переменных позволит предложить новые математические модели и оптимизационные методы синтеза пространственных конфигураций. Дальнейшим направлением можно считать также разработку новых подходов к моделированию движения потоков людей. Все это увеличивает круг решаемых задач по их функциональным возможностям и может использоваться, например, при разбиении отсеков транспортных средств при перевозке грузов и их сохранении, в системах распознавания образов, в робототехнике и т.д.

В.М. Комяк, О.М. Соболь, О.М. Данілін, В.В. Комяк, К.Т. Кязімов

ОПТИМІЗАЦІЯ РОЗБИТТЯ ОБЛАСТІ НА ПІДОБЛАСТІ ЗА ЗАДАНИМИ ОБМЕЖЕННЯМИ У ПРОСТОРІ

Задачі геометричного проектування (упаковки, компонування, покриття, розбиття) полягають в оптимізаційному відображенні геометричної інформації про об'єкти згідно з заданим критерієм якості та обмежень. Геометрична інформація про геометричні об'єкти складається з трьох компонент: просторової форми, метричних параметрів форми, які визначають їх розміри, і параметрів розміщення у просторі. Конфігураційний простір геометричних об'єктів ґрунтується на формалізації поняття геометричної інформації. Відображення множини об'єктів в їх конфігураційний простір згідно з заданим набором обмежень задає просторову конфігурацію геометричних об'єктів. Введено поняття просторової конфігурації розбиття області на підобласті, за допомогою якого побудовано нову модель її розбиття на два види підобластей, кожна з яких розбивається на підобласті за різними критеріями якості і обмеженнями. Як приклад розв'язано задачу розбиття тривимірної області (будівлі) на два види підобластей, перший — це підобласті для функціонального призначення (приміщення) з максимізацією їх об'ємів з урахуванням норм проектування. Другий — це підобласті, які визначають раціональну мережу трас, згідно заданого критерію, прикладом якого може слугувати час повної евакуації людей з будівлі з обмеженнями як на параметри потоку людей, так і на метричні характеристики трас, що враховують норми проектування. Для розрахунку часу руху однорідних потоків людей з нормованою щільністю використовуються мережі Петрі, а для гетерогенних потоків людей — їх послідовний індивідуально-потоковий рух. Розгляд метричних характеристик і параметрів розміщення об'єктів як узагальнених незалежних змінних дозволить в подальшому запропонувати нові математичні моделі та оптимізаційні методи синтезу просторових конфігурацій і може використовуватися, наприклад, при розбитті відсіків транспортних засобів під час перевезення вантажів і їх збереженні, в системах розпізнавання образів, в робототехніці тощо.

Ключові слова: геометричний об'єкт, геометрична інформація, розбиття, трасування, конфігураційний простір, узагальнені змінні, математична модель, оптимізація.

V.M. Komyak, A.N. Sobol, A.N. Danilin, V.V. Komyak, K.T. Kyazimov

OPTIMIZATION OF DIVISION OF AREA ON SUBAREAS UNDER SPECIFIED LIMITATIONS IN SPACE

The tasks of geometric design (packaging, layout, covering, partitioning) consist in optimizing the display of geometric information about objects in accordance with a given quality criterion and limitations. Geometrical information about a geometrical object consists of three components: spatial shape, metric shape parameters that determine their sizes and spatial placement parameters. The configuration space of geometric objects is based on the formalization of the concept of geometric information. The mapping of multiple objects into their configuration space according to a given set of constraints defines the spatial configuration of geometric objects. The article introduces the concept of the spatial configuration of partitioning an area into subareas, with the help of which a new model of its partitioning into two types of subareas is constructed, each of which is divided into subareas according to different quality criteria and restrictions. As an example, the problem of partitioning a three-dimensional area (building) into two types of subareas has been solved, the first is subareas for functional purpose (premises) with maximization of their volumes, taking into account design standards. The second is subareas that determine a rational network of routes, according to a given criterion, an example of which is the time of complete evacuation of people from a building with restrictions on both the flow parameters of the people and the metric characteristics of the routes, taking into account design standards. Petri nets are used to calculate the time of movement of homogeneous flows of people, and individual-and-flow movement are used for heterogeneous flows of people with normalized density. Consideration of metric characteristics and placement parameters of objects as generalized independent variables will allow us to propose new mathematical models and optimization methods for synthesizing spatial configurations in the future and can be used, for example, when partitioning vehicle compartments during cargo transportation and storage, in pattern recognition systems, robotics, etc.

Keywords: geometric object, geometric information, partitioning, tracing, configuration space, generalized variables, mathematical model, optimization.

1. Stoyan Y.G., Yakovlev S.V. Configuration space of geometric objects. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2018. **54**, N 5. P. 716–726.
2. Яковлев С.В. О некоторых классах пространственных конфигураций геометрических объектов и их формализации. *Международный научно-технический журнал «Проблемы управления и информатики»*. 2018. №5. С.73–84.
3. Стоян Ю.Г. Основная задача геометрического проектирования. Х.: Ин-т проблем машиностроения АН УССР, 1983. 36 с. (Препринт / АН УССР. Ин-т проблем машиностроения; 181).
4. Стоян Ю.Г. Размещение геометрических объектов. Киев: Наук. думка, 1975. 239 с.
5. Стоян Ю.Г., Гиль Н.И. Методы и алгоритмы размещения плоских геометрических объектов. К.: Наук. думка, 1976. 247 с.
6. Стоян Ю.Г., Яковлев С.В. Математические модели и оптимизационные методы геометрического проектирования. К.: Наук. думка, 1986. 268 с.
7. Яковлев С.В., Гиль Н.И., Комяк В.М. и др. Элементы теории геометрического проектирования / Под ред. В.Л. Рвачева. К.: Наук. думка, 1995. 241с.
8. Yakovlev S., Kartashov O., Komyak V., Shekhovtsov S., Sobol O., Yakovleva I. . Modeling and simulation of coverage problem in geometric design systems. 2019. IEEE 15th International Conference on the Experience of Designing and Application of CAD Systems (CADSM). Polyana. Ukraine, 2019. P. 20–23.
9. Kiseleva E.M. ,. Lozovskaya L.I, Timoshenko E.V. Solution of continuous problems of optimal covering with spheres using optimal set-partition theory. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2009. **45**, N 3. P. 421–437.
10. Киселева Е.М., Шор Н.З. Непрерывные задачи оптимального разбиения множеств: теория, алгоритмы, приложения. Киев: Наук. думка, 2005. 564 с.
11. Комяк В.В. Моделі та методи розбиття і трасування для оцінки шляхів евакуації у висотних будівлях при проектуванні: Автореф. дис. … канд. техн. наук: 01.05.02 «Математичне моделювання та обчислювальні методи». ХНУРЕ. Харків, 2014. 25 с.
12. Komyak V., Komyak V., Danilin A. A study of ellipse packing in the high-dimensionality problems. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*. 2017. 1/4(85). P. 17–23.
13. Komyak V., Sobol O., Kartashov O., Yakovleva I., Komyak V., Danilin A., Lyashevskaya O. Computer simulation of the partitioning by mutually orthogonal lines. 2019. *IEEE 15th International Conference on the Experience of Designing and Application of CAD Systems (CADSM).* Polyana. Ukraine, 2019. P. 16–19.
14. Тимофеева Н.К. О некоторых свойствах разбиений множества на подмножества. *Управляющие системы и машины*. 2002. № 5. С. 6–23.

Получено 25.10.2019