МЕТОДЫ УПРАВЛЕНИЯ И ОЦЕНИВАНИЯ В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

УДК 519.21+62

Я.М. Чабанюк, А.В. Никитин, У.Т. Химка, Т.Р. Никитина

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ИМПУЛЬСНОГО ПРОЦЕССА ВОЗМУЩЕНИЙ В УСЛОВИЯХ ПУАССОНОВОЙ АППРОКСИМАЦИИ С ТОЧКОЙ РАВНОВЕСИЯ КРИТЕРИЯ КАЧЕСТВА

Ключевые слова: случайная эволюция, пуассонова аппроксимация, марковские переключения.

Введение

Эволюционные модели, построенные с помощью управляемых стохастических дифференциальных уравнений с импульсным возмущением и марковскими переключениями, во многих случаях описывают реальные социально-экономические явления и процессы, в частности информационной борьбы, управление производством и многие другие. Анализ асимптотических свойств моделей позволяет делать заключения о различного рода зависимостях процессов от параметров, которые предполагаются ничтожно малыми в масштабах решаемой задачи.

В настоящей статье продолжаются исследования, начатые в работах [1–9], в которых обоснованы построения эволюционных моделей в марковской среде в условиях неклассичесских схем аппроксимации. В частности, в [9] указаны алгоритмы построения предельных генераторов для управляемого диффузионного процесса в схеме стохастической аппроксимации в условиях существования единственной точки равновесия критерия качества. В данной статье внимание сосредоточим на исследовании эволюционной системы, возмущенной управляемым импульсным процессом с марковскими переключениями в схеме пуассоновой аппроксимации.

Стохастическая эволюционная система

Пусть стохастическая эволюционная система в схеме серий под воздействием эргодической марковской среды задана стохастическим дифференциальным уравнением [3, 7]

$$dy^{\varepsilon}(t) = C(y^{\varepsilon}(t), x(t/\varepsilon^2))dt + d\eta^{\varepsilon}(t, u^{\varepsilon}(t)),\ u^{\varepsilon}(t) \in \square, \tag{1}$$

где ε — малый параметр серии, $y^{\varepsilon}(t)$ — случайная эволюция, $x(t), t \geq 0$ — равномерно эргодический марковский процесс, который определен на стандартном фазовом пространстве $(X, \mathbf{X})$ [2] генератором [3]

$$\mathbf{Q}\varphi(x) = q(x)\int_E P(x, dy)[\varphi(y) - \varphi(x)]$$

на банаховом пространстве $B(X)$ ограниченных функций с вещественными значениями и супремум нормой

$$\| \varphi(x) \| = \sup_{x \in X} | \varphi(x) | .$$

Стохастическое ядро $P(x, B), x \in X, B \in \mathbf{X}$ определяет равномерно эргодическую вложенную цепь Маркова $x_n = x(\tau_n), n \geq 0$, где τ_n — моменты скачков вложенной цепи, которая имеет стационарное распределение $\rho(B), x \in X, B \in \mathbf{X}$. Стационарное распределение $\pi(B), B \in \mathbf{X}$, марковского процесса $x(t), t \geq 0$, можно определить из соотношения [3] $\pi(dx)q(x) = q\rho(dx)$, где $q = \int_X \pi(dx)q(x)$.

Определим потенциальный оператор $\mathbf{R}_0$ для генератора $\mathbf{Q}$ с помощью соотношения $\mathbf{R}_0 = \mathbf{\Pi} - (\mathbf{\Pi} + \mathbf{Q})^{-1}$. Здесь $\mathbf{\Pi}\varphi(x) = \int_X \pi(dy)\varphi(y)\mathbf{1}(x)$ — проектор на подпространство $N_Q = \{\varphi : \mathbf{Q}\varphi = 0\}$ нулей оператора $\mathbf{Q}$, $\mathbf{1}(x) = 1$ для всех $x \in X$.

Большое число конструктивных примеров, иллюстрирующих поведение систем вида (1) в условиях эргодической марковской среды, читатель может найти в работах [2, 3].

Импульсный процесс возмущений в схеме пуассоновой аппроксимации

Импульсный процесс возмущений (ИПВ) $\eta^\varepsilon(t, u), t \geq 0$, $u \in \mathbb{R}$, в схеме аппроксимации Пуассона определяется из соотношения [3]

$$\eta^\varepsilon(t, u^\varepsilon(t)) = \int_0^t \eta^\varepsilon(ds, u^\varepsilon(s), x^\varepsilon(t / \varepsilon^2)), \tag{2}$$

где совокупность процессов с независимыми приращениями $\eta^\varepsilon(t, u, x), t \geq 0, u \in \mathbb{R}, x \in X$, определена с помощью генераторов [3]

$$\mathbf{\Gamma}^\varepsilon(x)\varphi(u, w) = \varepsilon^{-2} \int_R (\varphi(u, w + v) - \varphi(u, w))\Gamma^\varepsilon(dv, x), x \in X \tag{3}$$

и удовлетворяет условиям пуассоновой аппроксимации (детальнее см. [2, 3, 5]):

P1. Аппроксимация средних:

$$\int_R v\Gamma^\varepsilon(dv, x) = \varepsilon(a(x) + \theta_a(x)), \;\; \theta_a(x) \to 0, \varepsilon \to 0,$$

$$\int_R v^2\Gamma^\varepsilon(dv, x) = \varepsilon(b(x) + \theta_b(x)), \;\; \theta_b(x) \to 0, \varepsilon \to 0.$$

P2. Условия на функцию распределения:

$$\int_R g(v)\Gamma^\varepsilon(dv, x) = \varepsilon(\Gamma_g(x) + \theta_g(x)), \; \theta_g(x) \to 0, \varepsilon \to 0$$

для всех $g(v) \in C_3(\mathbb{R})$. Здесь мера $\Gamma_g(x)$ ограничена для всех $g(v) \in C_3(\mathbb{R})$ и определена соотношением

$$\Gamma_g(x) = \int_R g(v)\Gamma_0(dv, x),$$

где $C_3(\mathbb{R})$ — класс функций, который определяет меру и включает в себя ограниченные функции с действительными значениями такие, что $g(v)/|v|^2 \to 0$ при $v \to 0$.

P3. Равномерная квадратическая интегрируемость:

$$\lim_{c \to \infty} \sup_{x \in X} \int_{|v| > c} v^2\Gamma_0(dv, x) = 0 .$$

P4. Отсутствие диффузионной составляющей

$$b(x) = \int_R v^2 \Gamma_0(dv, x) .$$

Приведем простой пример случайной величины ξ, которая удовлетворяет условиям пуассоновой аппроксимации:

$$P\{\xi = b\} = \varepsilon p,$$

$$P\{\xi = \varepsilon a_2\} = 1 - \varepsilon p.$$

Соотношения для моментов этой случайной величины имеют вид

$$\mathrm{E}\,\alpha = \varepsilon(a_2 + bp) + o(\varepsilon),$$

$$\mathrm{E}\,\alpha^2 = \varepsilon(b^2 p) + o(\varepsilon).$$

Процедура стохастической аппроксимации

Определим критерий качества процесса управления u_y с помощью функции $G(y, x, u)$, которая имеет единственную точку равновесия u_y^* на каждом интервале $[\tau_n, \tau_{n+1}]$, $n \geq 0$, на котором марковский процесс $x(t)$ принимает значение x. Тогда равновесие определяется уравнением

$$G(y, x, u_y^*) = 0 . \tag{4}$$

Заметим, что решение стохастического дифференциального уравнения (1) на интервале $[\tau_n, \tau_{n+1}]$ является марковским процессом с неслучайным управлением.

Для задачи (1), (4) введем в рассмотрение процедуру стохастической аппроксимации (RSA)

$$du_y^\varepsilon(t) = \alpha(t) G(y^\varepsilon(t), x(t/\varepsilon^2), u_y^\varepsilon(t)) dt , \tag{5}$$

где функция $\alpha(t) > 0$ удовлетворяет условиям

$$\text{PSA1: } \int_{t_0}^{\infty} \alpha(t) dt = \infty , \ t_0 > 0 ;$$

$$\text{PSA2: } \int_{t_0}^{\infty} \alpha^2(t) dt < \infty , \ t_0 > 0 .$$

Цель наших исследований — определить асимптотику задачи (1), (5) при описанных выше условиях.

Основной результат

Теорема 1. Пусть выполнены условия пуассоновой аппроксимации P1–P4.

Тогда справедлива слабая сходимость

$$(y^\varepsilon(t), u_y^\varepsilon(t), \eta^\varepsilon(t)) \Rightarrow (\tilde{y}(t), \tilde{u}_y(t), \tilde{\eta}(t)), \ \varepsilon \to 0 , \ t_0 > 0 .$$

Предельный процесс $(\tilde{y}(t), \tilde{u}_y(t), \tilde{\eta}(t))$ определяется генератором

$$\mathbf{M}\varphi(y, u, w) = \mathbf{L}\varphi(y, u, w) + \mathbf{B}\varphi(y, u, w) , \tag{6}$$

где

$$\mathbf{L}\varphi(y, u, w) = \tilde{C}(y)\varphi'(y, u, w) + \mathbf{\Gamma}\varphi(y, u, w) ,$$

$$\mathbf{C}(y)\varphi(y) = \tilde{C}(y)\varphi'(y), \ \tilde{C}(y) = \int_X \pi(dx) C(y, x) ,$$

$$\mathbf{\Gamma}\varphi(u,w)=\hat{a}\varphi'_w(u,w)+\int_R[\varphi(u,w+v)-\varphi(u,w)]\hat{\Gamma}_0(dv)\,,$$

$$\hat{a}=\int_X \pi(dx)(a(x)-a_0(x))\,,$$

$$a_0(x)=\int_R v\Gamma_0(dv,x)\,,\ \hat{\Gamma}_0(v)=\int_R \Gamma_0(dv,x)\,,$$

$$\mathbf{B}\varphi(y,u,w)=\alpha(t)G(y,u)\varphi'_u(y,u,w)\,,$$

$$G(y,u)=\int_X G(y,x,u)\pi(dx)\,.$$

Доказательство теоремы 1. В первую очередь исследуем ряд важных свойств генераторов процессов с независимыми приращениями.

Лемма 1. При выполнении условий P1–P4 генераторы процессов с независимыми приращениями $\eta^{\varepsilon}(t,u,x)$, $t\ge 0, x\in X, u\in \mathbb{R}$, представимы в виде

$$\mathbf{\Gamma}^{\varepsilon}(x)\varphi(u,w)=\varepsilon^{-1}\mathbf{\Gamma}_1(x)\varphi(u,w) \tag{7}$$

на тест функциях $\varphi(u,w)\in \mathbb{R}\times C_3(\mathbb{R})$, где

$$\mathbf{\Gamma}_1(x)\varphi(u,w)=a(x)\varphi'_w(u,w)+\int_R[\varphi(u,w+v)-\varphi(u,w)]\Gamma_0(dv,x)\,.$$

Доказательство. Воспользуемся разложением функции $\varphi(u,w)$ в ряд Тэйлора и осуществим преобразование генератора (3):

$$\mathbf{\Gamma}^{\varepsilon}(x)\varphi(u,w)=\varepsilon^{-2}\int_R(\varphi(u,w+v)-\varphi(u,w))\Gamma^{\varepsilon}(dv,x)=$$

$$=\varepsilon^{-2}\int_R(\varphi(u,w+v)-\varphi(u,w)-v\varphi'_w(u,w)-\frac{1}{2}v^2\varphi''_{ww}(u,w))\Gamma^{\varepsilon}(dv,x)+$$

$$+\varepsilon^{-2}\int_R v\varphi'_w(u,w)\Gamma^{\varepsilon}(dv,x)+\frac{\varepsilon^{-2}}{2}\int_R v^2\varphi''_{ww}(u,w)\Gamma^{\varepsilon}(dv,x)=$$

$$=\varepsilon^{-2}\int_R(\varphi(u,w+v)-\varphi(u,w)-v\varphi'_w(u,w)-\frac{1}{2}v^2\varphi''_{ww}(u,w))\Gamma^{\varepsilon}(dv,x)+$$

$$+\varepsilon^{-2}\int_R v\varphi'_w(u,w)\Gamma^{\varepsilon}(dv,x)+\frac{\varepsilon^{-2}}{2}\int_R v^2\varphi''_{ww}(u,w)\Gamma^{\varepsilon}(dv,x)=$$

$$=\varepsilon^{-2}\int_R(\varphi(u,w+v)-\varphi(u,w)-v\varphi'_w(u,w)-\frac{1}{2}v^2\varphi''_{ww}(u,w))\Gamma^{\varepsilon}(dv,x)+$$

$$+\varepsilon^{-1}a(x)\varphi'_w(u,w)+(a(x)-a_0(x))\varphi'_w(u,w)+\frac{1}{2}(b(x)-b_0(x))\varphi''_{ww}(u,w)+$$

$$+\int_R(\varphi(u,w+v)-\varphi(u,w))\Gamma^0(dv,x)+\gamma^{\varepsilon}(x)\varphi(u,w)\,,$$

где предпоследнее равенство следует из условий пуассоновой аппроксимации.

Заметим, что функция $(\varphi(u,w+v)-\varphi(u,w)-v\varphi'_w(u,w)-\frac{1}{2}v^2\varphi''_{ww}(u,w))\in C_3(\mathbb{R})$, ограничена, поскольку ограничена функция $\varphi(u,\cdot)$ вместе со своими производными по переменной w, и, кроме того, выполняется равенство

 ISSN 0572-2691

$$\lim_{|v|\to 0}\frac{\varphi(u, w+v)-\varphi(u, w)-v\varphi'_w(u, w)-\frac{1}{2}v^2\varphi''_{ww}(u, w)}{v^2}=0 .$$

С учетом того, что $\gamma^{\varepsilon}(u, w)\varphi(u, w)=O(\varepsilon^2)$, получим соотношение (7).

Лемма 1 доказана.

Лемма 2. Генератор трехкомпонентного марковского процесса $(u^{\varepsilon}(t),$ $\eta^{\varepsilon}(u, t), x(t)), t\geq 0$, $u\in \mathbb{R}$, представим в виде

$$\mathbf{L}^{\varepsilon}(x)\varphi(u, w, x)=\varepsilon^{-2}\mathbf{Q}\varphi(u, w, x)+\varepsilon^{-2}\mathbf{\Gamma}_1(x)\varphi(u, w, x)+\gamma^{\varepsilon}(x)\varphi(u, w, x) ,$$

где оператор $\mathbf{\Gamma}_1(x)$ определен в лемме 1, а остаточный член $\left\|\gamma^{\varepsilon}(x)\varphi(u, w, x)\right\|\to 0$ при $\varepsilon\to 0, \varphi(u, w, \cdot)\in C_3(\mathbb{R})$.

Доказательство. Утверждение леммы 2 станет очевидным, если вспомнить определение генератора марковского процесса и вид генераторов для $\eta^{\varepsilon}(t, u), u^{\varepsilon}(t)$ и $x(t)$.

Затем рассмотрим так называемый усеченный генератор [7]

$$\mathbf{\Gamma}_0^{\varepsilon}(x)\varphi(u, w, x)=\varepsilon^{-2}\mathbf{Q}\varphi(u, w, x)+\varepsilon^{-1}\mathbf{\Gamma}_1(x)\varphi(u, w, x). \tag{8}$$

Лемма 3. Решение проблемы сингулярного возмущения для усеченного оператора (8) на возмущенных тест-функциях

$$\varphi^{\varepsilon}(u, w, x)=\varphi(u, w)+\varepsilon\varphi_1(u, w, x)+\varepsilon^2\varphi_2(u, w, x) \tag{9}$$

определено равенством

$$\mathbf{\Gamma}_0^{\varepsilon}(x)\varphi^{\varepsilon}(u, w, x)=\mathbf{\Gamma}\varphi(u, w)+\varepsilon\theta_{\eta}^{\varepsilon}(x)\varphi(u, w) ,$$

где остаточный член $\theta_{\eta}^{\varepsilon}(x)\varphi(u, w)$ равномерно ограничен по x. Предельный генератор представим в виде

$$\mathbf{\Gamma}=\mathbf{\Pi}\mathbf{\Gamma}_1(x)\mathbf{R}_0\mathbf{\Gamma}_1(x)\mathbf{\Pi}. \tag{10}$$

Доказательство. Для выполнения равенства (8) необходимо, чтобы коэффициенты при одинаковых степенях ε, слева и справа, были одинаковыми. Вычислим генератор на тест-функциях (9)

$$\mathbf{\Gamma}_0^{\varepsilon}(x)\varphi^{\varepsilon}(u, w, x)=\varepsilon^{-2}\mathbf{Q}\varphi(u, w)+\varepsilon^{-1}[\mathbf{Q}\varphi_1(u, w, x)+\mathbf{\Gamma}_1(x)\varphi(u, w)]+$$
$$+[\mathbf{Q}\varphi_2(u, w, x)+\mathbf{\Gamma}_1(x)\varphi_1(u, w, x)]+\varepsilon\mathbf{\Gamma}_1(x)\varphi_2(u, w, x) .$$

Из первого слагаемого получим соотношения $\mathbf{Q}\varphi(u, w)=0,$ т.е. функция должна принадлежать нуль-подпространству оператора $\mathbf{Q}$. Кроме того, очевидно, что $\varphi(u, w)$ не зависит от x.

Далее $\mathbf{Q}\varphi_1(u, w, x)+\mathbf{\Gamma}_1(x)\varphi(u, w)=0$, откуда

$$\varphi_1(u, w, x)=\mathbf{R}_0\mathbf{\Gamma}_1(x)\varphi(u, w) . \tag{11}$$

Рассмотрим уравнение

$$\mathbf{Q}\varphi_2(u, w, x)+\mathbf{\Gamma}_1(x)\varphi_1(u, w, x)=\mathbf{\Gamma}\varphi(u, w) .$$

Перепишем его в виде

$$\mathbf{Q}\varphi_2(u, w, x)+\mathbf{\Gamma}_1(x)\mathbf{R}_0\mathbf{\Gamma}_1(x)\varphi(u, w)=\mathbf{\Gamma}\varphi(u, w) .$$

Из условий разрешимости последнего уравнения можем найти предельный оператор (10). Тогда

$$\varphi_2(u, w, x) = \mathbf{R}_0[\mathbf{\Gamma}_1(x)\mathbf{R}_0\mathbf{\Gamma}_1(x) - \mathbf{\Gamma}]\varphi(u, w) . \tag{12}$$

Используя (11) и (12), другие члены ряда Тэйлора можно записать таким образом:

$$\varepsilon\mathbf{\Gamma}_1(x)\varphi_2(u, w, x) = \varepsilon[\mathbf{\Gamma}_1(x)\mathbf{R}_0[\mathbf{\Gamma}_1(x)\mathbf{R}_0\mathbf{\Gamma}_1(x) - \mathbf{\Gamma}]]\varphi(u, w) = \varepsilon\theta_\eta^\varepsilon(x)\varphi(u, w) .$$

Ограниченность $\theta_\eta^\varepsilon(x)\varphi(u, w)$ следует из представления операторов $\mathbf{\Gamma}_1$ и $\mathbf{R}_0$.

Лемма 4. Генератор чтырехкомпонентного марковского процесса $(y^\varepsilon(t), u_y^\varepsilon(t), \eta^\varepsilon(t, u), x(t/\varepsilon^2)), t \geq 0$, $u \in \square$, имеет вид

$$\mathbf{L}^\varepsilon(x)\varphi(y, u, w, x) = \varepsilon^{-2}\mathbf{Q}\varphi(y, u, w, x) + \mathbf{\Gamma}^\varepsilon(x)\varphi(y, u, w, x) +$$

$$+ \mathbf{C}(x)\varphi(y, u, w, x) + \mathbf{B}(x)\varphi(y, u, w, x) + \theta_w^\varepsilon(x)\varphi(y, u, w, x) , \tag{13}$$

где $\mathbf{\Gamma}^\varepsilon(x)$ — генератор (3) семейства импульсных процессов возмущений (2),

$$\mathbf{C}(x)\varphi(y, x) = \mathrm{C}(y, x)\varphi_y'(y, x) , \; \mathbf{B}(x)\varphi(u) = \alpha(t)G(y, x, u)\varphi'(u) . \tag{14}$$

Остаточный член $\left\|\theta_w^\varepsilon(x)\varphi(u, w, x)\right\| \to 0$ при $\varepsilon \to 0, \varphi(u, w, \cdot) \in \mathrm{C}_3(\square)$.

Доказательство справедливости соотношения (13) с учетом (14) можно осуществить по схеме, описанной в [7].

Лемма 5. Генератор $\mathbf{L}^\varepsilon(x)$ в случае импульсного процесса возмущений имеет асимптотическое представление

$$\mathbf{L}^\varepsilon(x)\varphi(y, u, w, x) = \varepsilon^{-2}\mathbf{Q}\varphi(y, u, w, x) + \varepsilon^{-1}\mathbf{\Gamma}_1(x)\varphi(y, u, w, x) +$$

$$+ \mathbf{C}(x)\varphi(y, u, w, x) + \mathbf{B}(x)\varphi(y, u, w, x) + \tilde{\theta}_w^\varepsilon(x)\varphi(y, u, w, x) , \tag{15}$$

где генератор $\mathbf{\Gamma}_1(x)$ определен в лемме 1, остаточный член $\tilde{\theta}_w^\varepsilon(x) = \theta_w^\varepsilon(x) + \gamma^\varepsilon(x)$

$\left\|\tilde{\theta}_w^\varepsilon(x)\varphi(y, u, w, x)\right\| \to 0$ при $\varepsilon \to 0$.

Доказательство. Справедливость формулы (15) становится очевидной, если использовать представление генератора в виде (5) и результаты леммы 4.

Далее введем в рассмотрение усеченный генератор

$$\mathbf{L}_0^\varepsilon(x)\varphi(y, u, w, x) = \varepsilon^{-2}\mathbf{Q}\varphi(y, u, w, x) + \varepsilon^{-1}\mathbf{\Gamma}_1(x)\varphi(y, u, w, x) +$$

$$+ \mathbf{C}(x)\varphi(y, u, w, x) + \mathbf{B}(x)\varphi(y, u, w, x) . \tag{16}$$

Лемма 6. Решение проблемы сингулярного возмущения [3] для усеченного генератора (16) на возмущенных тест-функциях

$$\varphi^\varepsilon(y, u, w, x) = \varphi(y, u, w) + \varepsilon\varphi_1(y, u, w, x) + \varepsilon^2\varphi_2(y, u, w, x) \tag{17}$$

определяется равенством

$$\mathbf{L}_0^\varepsilon(x)\varphi^\varepsilon(y, u, w, x) = \mathbf{L}\varphi(y, u, w) + \varepsilon^2\theta_w^\varepsilon(x)\varphi(y, u, w) , \tag{18}$$

где остаточный член $\theta_w^\varepsilon(x)$ равномерно ограничен по x . Предельный генератор представим в виде

$$\mathbf{L} = \mathbf{\Pi}[\mathbf{C}(x) + \mathbf{\Gamma}_1(x)\mathbf{R}_0\mathbf{\Gamma}_1(x) + \mathbf{B}(x)]\mathbf{\Pi} . \tag{19}$$

Доказательство. Для того чтобы выполнялось равенство (16), необходимо, чтобы коэффициенты при одинаковых степенях ε , слева и справа, были одинаковыми [3]. С этой целью вычислим

 ISSN 0572-2691

$$\mathbf{L}_0^{\varepsilon}(x)\varphi^{\varepsilon}(y,u,w,x)=\varepsilon^{-2}\mathbf{Q}\varphi(y,u,w)+\varepsilon^{-1}[\mathbf{Q}\varphi_1(y,u,w,x)+\mathbf{\Gamma}_1(x)\varphi(y,u,w)]+$$

$$+[\mathbf{Q}\varphi_2(y,u,w,x)+\mathbf{\Gamma}_1(x)\varphi_1(y,u,w,x)+\mathbf{C}(x)\varphi_1(y,u,w)+\mathbf{B}(x)\varphi_1(y,u,w)]+$$

$$+\varepsilon[\mathbf{\Gamma}_1(x)\varphi_2(y,u,w,x)+\mathbf{C}(x)\varphi_1(y,u,w,x)]+$$

$$+\varepsilon^2[\mathbf{C}(x)\varphi_2(y,u,w,x)+\mathbf{B}(x)\varphi_2(y,u,w,x)].$$

Поскольку $\varphi(y,u,w)$ не зависит от x, то

$$\mathbf{Q}\varphi(y,u,w)=0\Leftrightarrow\varphi(y,u,w)\in N_Q.$$

Далее

$$\mathbf{Q}\varphi_1(y,u,w,x)+\mathbf{\Gamma}_1(x)\varphi(y,u,w)=0,$$

откуда получим решение

$$\varphi_1(y,u,w,x)=\mathbf{R}_0\mathbf{\Gamma}_1(x)\varphi(y,u,w).$$

Исследуем уравнение

$$\mathbf{Q}\varphi_2(y,u,w,x)+\mathbf{\Gamma}_1(x)\varphi_1(y,u,w,x)+$$

$$+\mathbf{C}(x)\varphi(y,u,w)+\mathbf{B}(x)\varphi(y,u,w)=\mathbf{L}\varphi(y,u,w).$$

Перепишем его в виде

$$\mathbf{Q}\varphi_2(y,u,w,x)=[\mathbf{L}-\mathbf{\Gamma}_1(x)\mathbf{R}_0\mathbf{\Gamma}_1(x)-\mathbf{C}(x)-\mathbf{B}(x)]\varphi(y,u,w).$$

Из условий разрешимости последнего уравнения можно найти предельный генератор в виде (19) на тест-функциях (17) с учетом (18).

Лемма доказана.

Завершив доказательство теоремы 1 по схеме доказательства теоремы 6.3 в [3], получим предельный генератор в виде (6).

Замечание 1. Слабая сходимость процесса $(y^{\varepsilon}(t),u_y^{\varepsilon}(t),\eta^{\varepsilon}(t))\Rightarrow(\hat{y}(t),\hat{u}_y(t),\hat{\eta}(t))$ при $\varepsilon\to 0$ следует из сходимости соответствующих генераторов в условиях компактности допредельной совокупности процессов $(y^{\varepsilon}(t),u_y^{\varepsilon}(t))$. Теоремы про компактность процессов с независимыми приращениями в схеме аппроксимации Пуассона можно найти, например, в [2].

Теорема 2. Пусть выполнимы условия P1–P4 , а также PSA1 и PSA2. Кроме того, пусть существует функция Ляпунова $V(y,u)$ усредненной системы

$$\frac{du}{dt}=G(y,u),$$

которая для всех y удовлетворяет условию экспоненциальной устойчивости

$$\text{Y1}:\ G(y,u)V_u'(y,u)\le -cV(y,u);$$

дополнительному условию на функцию Ляпунова

$$\text{Y2}:\ |C(y,x)R_0[\tilde{G}(y,x,u)V_u'(y,u)]_u'|\le c_1(1+V(y,u)),$$

где $\tilde{G}(y,x,u)=G(y,u)-G(y,x,u)$, и условиям

$$|G(y,x,u)\mathbf{R}_0[\tilde{C}(y,x)V_u'(y,u)]_u'|\le c_2(1+V(y,u)),$$

$$|\tilde{C}(y,x)\mathbf{R}_0[\tilde{C}(y,x)V_u'(y,u)]_u'|\le c_3(1+V(y,u)),$$

$$|G(y,x,u)\mathbf{R}_0[\tilde{G}(y,x,u)V_u'(y,u)]_u'|\le c_4(1+V(y,u)),$$

$$\tilde{C}(y, x) = C(y) - C(y, x).$$

Тогда выполнимо соотношение вида

$$\mathrm{P}\{\lim_{\varepsilon\to 0} u_y^\varepsilon(t) = u_y^*\} = 1, \forall y.$$

Доказательство. Для возмущенной функции Ляпунова

$$V^\varepsilon(y, u, w, x) = V(u, w) + \varepsilon V_1(y, u, w, x) + \varepsilon^2 V_2(y, u, w, x),$$

используя (19), получим предельное представление для управления

$$\mathbf{L}_u^\varepsilon V^\varepsilon(y, u, w, x) = \mathbf{B}V(u, w) + \varepsilon\theta_u(x),$$

где $\mathbf{B}\varphi(u) = \alpha(t)G(y, u)\varphi'(u)$.

Из условий Y1, Y2 получим оценку

$$\mathbf{L}^\varepsilon V^\varepsilon(y, u, w, x) \le -c\alpha(t)V(u, w) + c^*\alpha^2(t)(1 + V(u, w)),$$

затем применим результат теоремы Невельсона–Хасьминского [10].

Теорема доказана.

Заключение

Построенная для управления $u_y^\varepsilon(t)$ процедура стохастической аппроксимации определяет оптимальные значения u_y^* для произвольного импульсного процесса переноса y. Полученные результаты позволяют утверждать, что поведение предельного процесса полностью определяется допредельной нормированной стохастической эволюционной системой в эргодической марковской среде.

Я.М. Чабанюк, А.В. Нікітін, У.Т. Хімка, Т.Р. Нікітіна

АСИМПТОТИЧНІ ВЛАСТИВОСТІ ІМПУЛЬСНОГО ПРОЦЕСУ ЗБУРЕНЬ В УМОВАХ ПУАССОНОВОЇ АПРОКСИМАЦІЇ З ТОЧКОЮ РІВНОВАГИ КРИТЕРІЮ ЯКОСТІ

Для системи стохастичних диференціальних рівнянь з марковськими переключеннями та імпульсним збуренням у схемі пуассонової апроксимації та в умовах існування єдиної точки рівноваги критерію якості побудовано граничні генератори імпульсного процесу та динамічної системи. Складність запропонованої еволюційної моделі полягає у трьох її властивостях. По-перше, система перебуває в умовах зовнішнього випадкового впливу, який моделюється за допомогою перемикаючого марковського процесу. Процеси з незалежними приростами, які теж залежать від марковського перемикаючого процесу, між моментами його відновлення мають певні характеристики, а у моменти відновлення ці характеристики змінюються. Тому відбувається певна так звана «склейка» траєкторій процесів з незалежними приростами. По-друге, у моделі наявна схема пуассонової апроксимації, яка є узагальненням класичної схеми усереднення, що визначається нормуванням, в залежності від малого параметра. У класичній схемі апроксимації у граничному процесі ми не бачимо великих стрибків у системі. Максимум, що отримуємо — це зсув детермінованої траєкторії. А от у схемі апроксимації Пуассона, яка була винайдена Королюком та Лімніосом у монографії 2005 р., цю проблему усунуто, тобто у границі будуть присутні і детермінований зсув, і великі стрибки. По-третє, у системі наявна функція керування, яка визначається процедурою стохастичної апроксимації Робінса–Монро. Така процедура розв'язує завдання знаходження точки рівноваги функції регресії і полягає у знаходженні єдиного розв'язку рівняння відносно керування. Припускаючи існування єдиного керування на кожному інтервалі, розв'язуємо дворівневу задачу. У статті досліджено питання, як поведінка граничного процесу залежить від дограничного нормування стохастичної системи в ергодичному марковському середовищі.

Ключові слова: випадкова еволюція, пуассонова апроксимація, марковські переключення.

Y.M. Chabanyuk, A.V. Nikitin, U.T. Khimka, T.R. Nikitina

ASYMPTOTIC PROPERTIES OF THE IMPULSE PERTURBATION PROCESS UNDER THE POISSON APPROXIMATION CONDITIONS WITH POINT OF EQUILIBRIUM QUALITY CRITERION

For a system of stochastic differential equations with Markov switchings and impulse perturbation under Poisson approximation scheme and under the conditions of the existence of a single equilibrium point of the quality criterion, the limit generators for the impulse process and the dynamic system are constructed. The complexity of the proposed evolutionary model lies in its three properties. Firstly, the system is under conditions of an external random impact, which is modeled using the Markov switching process. Processes with independent increments, which also depend on the Markov switching process, have certain characteristics between the moments of its restoration, and at the moments of restoration these characteristics change. Therefore, the so-called «gluing» of trajectories of processes with independent increments occurs. Secondly, the model contains a Poisson approximation scheme, which is a generalization of the classical averaging scheme and is determined by normalization depending on a small parameter. In the classical approximation scheme in the limit process, we do not see large jumps in the system. The maximum that we get is the shift of the deterministic trajectory. But in the Poisson approximation scheme, which was invented by Korolyuk and Limnios in the 2005 monograph, this problem is eliminated, that is, in the limit there will be both a deterministic shift and large jumps. And thirdly, the system has a control function, which is determined using the Robins-Monroe stochastic approximation procedure. This procedure solves the problem of finding the equilibrium point of the regression function and consists in finding the only solution to the equation with respect to control. Assuming the existence of a single control on each interval, we solve a two-level problem. The article examines the questions of how the behavior of the limiting process depends on the prelimit normalization of the stochastic system in an ergodic Markov environment.

Keywords: random evolution, Poisson approximation, Markov switching.

1. Jacod J., Shiryaev A.N. Limit theorems for stochastic processes. Berlin: Springer-Verlag 2003. 601 p.
2. Korolyuk V.S., Korolyuk V.V. Stochastic models of systems. Kluwer: Dordrecht. 1999. 185 p.
3. Korolyuk V.S., Limnios N. Stochastic systems in merging phase space. World Scientific, 2005. 330 p.
4. Samoilenko A.M., Stanzhytskyi O.M. Qualitative and asymptotic analysis of differential equations with random perturbations. Singapore: World Scientific, 2011. 323 p.
5. Differential equations with small stochastic additions under poisson approximation conditions. I.V. Samoilenko, Y.M. Chabanyuk, A.V. Nikitin, U.T. Khimka. *Cybernetics and Systems analysis*. 2017. **53**. N 3. P. 410-416.
6. Samoilenko I.V., Nikitin A.V. Differential equations with small stochastic terms under the Levy approximating conditions. *Ukrainian Mathematical Journal*. 2018. **9**. N 69, P.1445–1454.
7. Chabanyuk Y.M., Nikitin A.V., Khimka U.T. Asymptotic properties of the impulse perturbation process with control function under Levy approximation conditions. Mat. Stud. 2019. **52**. P. 96–104.
8. Nikitin A.V. Asymptotic properties of a stochastic diffusion transfer process with an equilibrium point of a quality criterion. *Cybernetics and Systems analysis.* 2015. **51**. N 4. P. 650–656.
9. Nikitin A.V., Khimka U.T. Asymptotics of Normalized control with Markov switchings. *Ukrainian Mathematical Journal*. 2017. N 68, **8**. P. 1252–1262.
10. Nevelson M.B., Khas'minskii R.Z. Stochastic approximation and recursive estimation. M.: Nauka, 1972. 298 p.

Получено 28.11.2019
После доработки 10.02.2020