УДК 517.9

Ал.А. Чикрий, К.А. Чикрий

О ВЕРХНИХ И НИЖНИХ РАЗРЕШАЮЩИХ ФУНКЦИЯХ В ИГРОВЫХ ЗАДАЧАХ ДИНАМИКИ

Ключевые слова: конфликтно-управляемый процесс, многозначное отображение, функция сдвига, верхние и нижние разрешающие функции.

Введение

Наряду с классическими прямыми методами Л.С. Понтрягина [1], Н.Н. Красовского [2], Б.Н. Пшеничного [3] в теории конфликтно-управляемых процессов важную роль играет метод разрешающих функций [4, 5], обеспечивающий гарантированный результат для многих игровых задач, в том числе с группами участников. В развитие этого метода в работе [6] разработана техника верхних и нижних разрешающих функций, различные варианты этого подхода исследованы в [7–9].

Главная цель этой работы — рассмотреть игровые задачи, для которых не имеет места условие Понтрягина. Следует заметить, что существует ряд подходов, решающих упомянутые сложные задачи [4, 10], которые основаны на идеях, отличных от предлагаемой.

Далее результаты работы [6] перенесены на случай группы преследователей [11], интегральных ограничений [12] терминальной функции платы [13] и другие игровые задачи.

В большинстве работ, развивающих метод разрешающих функций, терминальное множество предполагается выпуклым. В данной статье это условие отсутствует за счет фиксации некоторой точки телесной части цилиндрического терминального множества — точки прицеливания. При этом терминальное множество превращается в аффинное многообразие.

Для обобщенной квазилинейной конфликтно-управляемой системы, включающей функционально-дифференциальные процессы и процессы с дробными производными, получим достаточные условия завершения игры за конечное время в классе квази- и стробоскопических стратегий.

Работа примыкает к исследованиям [4–13], касающимся развития метода разрешающих функций.

Постановка задачи

В конечномерном евклидовом пространстве R^n, $n \geq 2$, рассмотрим конфликтно-управляемый процесс

$$z(t) = g(t) + \int_0^t \Omega(t, \tau)\varphi(u(\tau), v(\tau))\, d\tau, \quad t \geq 0, \tag{1}$$

функция $g(t)$, $g : R_+ \to R^n$, $R_+ = \{t : t \ge 0\}$, измерима по Лебегу и ограничена по $t > 0$, матричная функция $\Omega(t, \tau)$, $t \ge \tau \ge 0$, почти везде ограничена, измерима по t и суммируема по τ для каждого $t \in R_+$`. Функция $\varphi(u, v)$ -блок управления, $\varphi : U \times V \to R^n$, непрерывна по совокупности переменных, U, V — компакты.

Допустимые управления $u(\tau)$, $u : R_+ \to U$, $v(\tau)$, $v : R_+ \to V$, — измеримые функции.

Терминальное множество имеет цилиндрический вид

$$M^* = M_0 + M, \tag{2}$$

где M_0 — линейное подпространство из R^n, а M — компакт из L, $L = M_0^{\perp}$, — ортогонального дополнения к M_0 в R^n.

Первый игрок (u) пытается вывести траекторию (1) на множество (2), цель второго (v) противоположна.

Рассмотрим игру (1), (2) с позиции первого игрока. Его управление выберем в виде измеримой функции

$$u(t) = u(g(T), v_t(\cdot)),\ u(t) \in U,\ t \in [0, T],\ v_t(\cdot) = \{v(s) : s \in [0, t]\} \tag{3}$$

или контруправления

$$u(t) = u(g(T), v(t)),\ u(t) \in U,\ t \in [0, T]. \tag{4}$$

В случае (3) говорят о квазистратегии [2], в случае (4) — о стробоскопической стратегии [14].

Схема метода

Обозначим π ортопроектор, действующий из R^n в L, и положим

$$\varphi(U, v) = \{\varphi(u, v) : u \in U\}.$$

Введем многозначное отображение

$$W(t, \tau, v) = \pi\Omega(t, \tau)\varphi(U, v)$$

на множестве $\Delta \times V$, где

$$\Delta = \{(t, \tau) : 0 \le \tau \le t < +\infty\}.$$

Полагая $W(t, \tau, v)$ замкнутозначным, рассмотрим

$$W(t, \tau) = \bigcap_{v \in V} W(t, \tau, v)$$

и обозначим

$$\mathrm{dom}\, W = \{(t, \tau) \in \Delta : W(t, \tau) \ne \varnothing\}.$$

Условие 1 (условие Понтрягина). $\mathrm{dom}\, W = \Delta$.

 ISSN 1028-0979

Непустота прямых образов отображения Понтрягина $W(t, \tau)$ лежит в основе его первого прямого метода, который дает достаточные условия завершения игры (1), (2) в классе стробоскопических стратегий. При этом важную роль играют измеримые по τ селекторы отображения $W(t, \tau)$.

Однако в ряде случаев условие Понтрягина не выполняется. Одним из способов, который приходит на помощь в этой ситуации, является техника верхних и нижних разрешающих функций, разработанная в [6].

В данной работе остановимся на одном из вариантов этой теории, позволяющем избавиться от условия выпуклости телесной части терминального множества.

Пусть $\gamma(t, \tau)$, $\gamma : \Delta \to L$, — некоторая, почти везде ограниченная, измеримая по t и суммируемая по τ, $\tau \in [0, t]$, функция, которую назовем функцией сдвига. Она будет играть роль селектора Понтрягина

Обозначим

$$\xi(t) = \pi g(t) + \int_0^t \gamma(t, \tau)\, d\tau, \ \ \eta(t, m) = m - \xi(t),$$

m — некоторая точка множества M, и рассмотрим многозначное отображение

$$\mathsf{A}(t, \tau, v, m) = \{\alpha \ge 0 : \alpha\eta(t, m) \in [\pi\Omega(t, \tau)\varphi(U, v) - \gamma(t, \tau) \ne \varnothing\}. \tag{5}$$

Назовем m точкой прицеливания. Предполагая, что отображение $\mathsf{A}(t, \tau, v, m)$ имеет непустые прямые образы на множестве $\Delta \times V \times M$, введем по аналогии с [6] верхнюю и нижнюю скалярные разрешающие функции первого типа

$$\alpha^*(t, \tau, v, m) = \sup\{\alpha : \alpha \in \mathsf{A}(t, \tau, v, m)\},$$

$$\alpha_*(t, \tau, v, m) = \inf\{\alpha : \alpha \in \mathsf{A}(t, \tau, v, m)\}.$$

По аналогии с работами [15, 6] можно утверждать, что многозначное отображение $\mathsf{A}(t, \tau, v, m)$ является $L \times B$-измеримым по совокупности (τ, v), $\tau \in [0, t]$, $v \in V$, а верхняя и нижняя разрешающие функции (5) $L \times B$-измеримы по совокупности (τ, v).

Пусть $V(\cdot)$ — совокупность измеримых функций $v(\tau)$, $v(\tau) \in V$, $\tau \in [0, +\infty)$. Функции $\alpha^*(t, \tau, v, m)$, $\alpha_*(t, \tau, v, m)$ суперпозиционно измеримы при фиксированных t, m [16].

Верхней разрешающей функции $\alpha^*(t, \tau, v)$ поставим в соответствие множество

$$T(g(\cdot), \gamma(\cdot,\cdot), m) = \left\{ t > 0 : \inf_{v(\cdot)\in V(\cdot)} \int_0^t \alpha^*(t, \tau, v(\tau), m)\, d\tau \ge 1 \right\}. \tag{6}$$

Если для некоторого t, $t > 0$, $m \in M$, $\alpha^*(t, \tau, v, m) = +\infty$ для $\tau \in [0, t]$, $v \in V$, то в этом случае положим значение интеграла в (6) равным $+\infty$ и $t \in T(g(\cdot), \gamma(\cdot,\cdot), m)$. Если неравенство в (6) не выполняется при всех $t > 0$, то положим $T(g(\cdot), \gamma(\cdot,\cdot), m) = \varnothing$.

Обозначим

$$\mathsf{A}(t, \tau, m) = \bigcap_{v \in V} \mathsf{A}(t, \tau, v, m), \ (t, \tau) \in \Delta, m \in M.$$

Условие 2. Существует такая точка $m \in M$, что многозначное отображение $\mathsf{A}(t, \tau)$ имеет непустые прямые образы на конусе Δ.

При этом условии введем верхнюю и нижнюю разрешающие функции второго типа

$$\alpha^*(t, \tau, m) = \sup\{\alpha : \alpha \in \mathsf{A}(t, \tau, m)\},$$

$$\alpha_*(t, \tau, m) = \inf\{\alpha : \alpha \in \mathsf{A}(t, \tau, m)\}$$

и интегральные числовые функции

$$\alpha^*(t, m) = \int_0^t \alpha^*(t, \tau, m)\, d\tau, \ \ \alpha_*(t, m) = \int_0^t \alpha_*(t, \tau, m)\, d\tau.$$

Заметим, что функции $\alpha^*(t, \tau, m)$, $\alpha_*(t, \tau, m)$ являются измеримыми по τ [16]. Предположим также, не оговаривая условий, что в определениях верхних и нижних разрешающих функций первого и второго типа достигаются точные верхние и нижние грани.

Основной результат

Имеет место утверждение.

Теорема. Пусть для конфликтно-управляемого процесса (1), (2) существует такая точка $m \in M$, что выполнено условие 2, для заданной функции $g(\cdot)$ и функции сдвига $\gamma(\cdot,\cdot)$

$$T \in T(g(\cdot), \gamma(\cdot,\cdot), m) \neq \varnothing.$$

Тогда при $\alpha_*(T, m) < 1$ траектория процесса (1) может быть приведена на аффинное многообразие $M_0 + m$ в момент T с помощью управления вида (3), если к тому же $\alpha^*(T, m) \geq 1$, то — в классе контруправлений при любых допустимых противодействиях второго игрока.

Доказательство. Пусть $v(\tau)$, $v : [0, T] \to V$, — произвольная измеримая функция, $\alpha^*(T, m) < 1$. Пусть $\eta(T, m) \neq 0$.

Рассмотрим контрольную функцию [6]

$$h(t, m) = 1 - \int_0^t \alpha^*(T, \tau, v(\tau), m)\, d\tau - \int_t^T \alpha_*(T, \tau, m)\, d\tau, \ \ \tau \in [0, T].$$

В силу свойств подынтегральных функций $h(t, m)$ является абсолютно непрерывной по t на интервале $[0, T]$.

Поскольку

$$h(0, m) = 1 - \int_0^T \alpha_*(T, \tau, m)\, d\tau = 1 - \alpha_*(T, m) > 0,$$

а

$$h(T, m) = 1 - \int_0^T \alpha^*(T, \tau, v(\tau), m)\, d\tau \leq 0,$$

 ISSN 1028-0979

то по известной теореме анализа существует такой момент времени t_*, $t_* \in [0, T]$, $t_* = t(v(\cdot))$, что $h(t_*, m) = 0$.

Промежутки времени $[0, t_*)$ и $[t_*, T]$ назовем активным и пассивным, следуя работе [6]. Опишем способы управления первым игроком на каждом из них.

Введем компактнозначные отображения

$$U_1(\tau, v, m) = \{u \in U : \alpha^*(T, \tau, v, m)\eta(T, m) \in \pi\Omega(T, \tau)\varphi(u, v) - \gamma(T, \tau)\},$$
$$U_2(\tau, v, m) = \{u \in U : \alpha_*(T, \tau, m)\eta(T, m) \in \pi\Omega(T, \tau)\varphi(u, v) - \gamma(T, \tau)\}. \tag{7}$$

Из построения отображений $\mathrm{A}(T, \tau, v, m)$, $\mathrm{A}(T, \tau, m)$ следует, что $U_i(\tau, v, m)$ имеют непустые прямые образы. Они являются $L \times B$-измеримыми и имеют $L \times B$-измеримые селекторы $u_1(\tau, v, m)$, $u_2(\tau, v, m)$, т.е. $u_1(\tau) = u_1(\tau, v(\tau), m)$, $u_2(\tau) = u_2(\tau, v(\tau), m)$ измеримы по τ [16].

Отметим особо, что многозначные отображения $\mathrm{A}(T, \tau, v, m)$, $\mathrm{A}(T, \tau, m)$ формируют разрешающие функции на активном и пассивном участках соответственно. Этот факт в равной степени относится и к основной схеме метода верхних и нижних разрешающих функций [6], причем на активном участке в выборе управления принимают участие верхние разрешающие функции первого типа, а на пассивном — нижние разрешающие функции второго типа, где наименьшей является функция $\alpha_*(t, \tau, m)$.

Положим управление первого игрока на активном участке равным $u_1(\tau)$, а на пассивном — $u_2(\tau)$. Заметим, что момент переключения t_* зависит от предыстории управления $v_{t_*}(\cdot)$, а управления первого игрока являются контруправлениями.

Из представления (1) следует, что

$$\pi z(T) = \pi g(T) + \int_0^T \pi\Omega(T, \tau)\varphi(u(\tau), v(\tau))\,d\tau =$$
$$= \pi g(T) + \int_0^{t_*} \pi\Omega(T, \tau)\varphi(u_1(\tau), v(\tau))\,d\tau + \int_{t_*}^T \pi\Omega(T, \tau)\varphi(u_2(\tau), v(\tau))\,d\tau. \tag{8}$$

С использованием соотношений (7) получим

$$\pi z(T) \in \pi g(T) + \int_0^{t_*} \alpha^*(T, \tau, v(\tau), m)\eta(T, m)\,d\tau + \int_{t_*}^T \alpha_*(T, \tau, m)\eta(T, m)\,d\tau +$$
$$+\int_0^T \gamma(T, \tau)\,d\tau = \xi(T)\left[1 - \int_0^{t_*} \alpha^*(T, \tau, v(\tau), m)d\tau - \int_{t_*}^T \alpha_*(T, \tau, m)d\tau\right] +$$
$$+\left[\int_0^{t_*} \alpha^*(T, \tau, v(\tau), m)\,d\tau + \int_{t_*}^T \alpha_*(T, \tau, m)\,d\tau)\right] m = m.$$

Здесь учтено равенство $h(t_*, m) = 0$.

Случай $\eta(T, m) = 0$ соответствует первому прямому методу Понтрягина [1]. Включение в (5) при $t = T$ превращается в следующее:

$$0 \in \Omega(T, \tau)\varphi(U, v) - \gamma(T, \tau),\ \tau \in [0, T],\ v \in V.$$

Последнее обеспечивает непустоту прямых образов отображения Понтрягина $W(T, \tau)$, $\tau \in [0, T]$, а функция сдвига $\gamma(T, \tau)$ является измеримым селектором отображения $W(T, \tau)$ -селектора Понтрягина.

Уравнение преследователя выбираем в виде измеримого $u_0(\tau, v)$, $\tau \in [0, T]$, $v \in V$, многозначного отображения

$$U_0(\tau, v) = \{u \in U : \pi\Omega(T, \tau)\varphi(u, v) - \gamma(T, \tau) = 0\}. \qquad (9)$$

Тогда из представления (7), учитывая равенство в (9) и $\eta(T, m) = 0$, получим

$$\pi z(T) = \pi g(T) + \int_0^T \gamma(T, \tau)\, d\tau = \xi(T) = m.$$

Отдельно рассмотрим случай $\alpha^*(T, m) \geq 1$, $\alpha_*(T, m) < 1$.

Введем контрольную функцию

$$h_1(t, m) = 1 - \int_0^t \alpha^*(T, \tau, m)\, d\tau - \int_t^T \alpha_*(T, \tau, m)\, d\tau.$$

Тогда

$$h_1(0, m) = 1 - \alpha_*(T, m) > 0,\ \ h_1(T, m) = 1 - \alpha^*(T, m) \leq 0.$$

Поскольку функция $h_1(t, m)$ абсолютно непрерывна по t, существует такой момент t_*^1, $t_*^1 \in [0, T]$, что $h_1(t_*^1, m) = 0$. При этом t_*^1 не зависит от $v_{t_*^1}(\cdot)$. На активном и пассивном участках $[0, t_*^1]$, $[t_*^1, T]$ соответственно рассмотрим многозначные отображения (7), где в выражении для $U_i(\tau, v, m)$ вместо верхней разрешающей функции первого типа $\alpha^*(T, \tau, v, m)$ фигурирует верхняя разрешающая функция второго типа. Учитывая топологические свойства отображений (7), выберем в них суперпозиционно измеримые селекторы по аналогии с предыдущим случаем $\eta(T, m) \neq 0$ в качестве управлений на обоих участках. При $\eta(T, m) = 0$ рассуждения аналогичны случаю $\alpha_*(T, m) < 1$ без условия $\alpha^*(T, m) \geq 1$.

Из непрерывности (8) с учетом законов выбора управлений следует равенство $\pi z(T) = m$.

В каждой из ситуаций равенство $\pi z(T) = m$ означает вывод траектории (1) в момент T на аффинное многообразие $M_0 + m$.

 ISSN 1028-0979

Замечание 1. Отметим следующее обстоятельство. В данной схеме методики, связанной с верхними и нижними разрешающими функциями, точка m телесной части терминального множества фиксирована, что избавляет от условия выпуклости множества M. В общей схеме [5, 6] эта точка меняется в процессе игры.

Замечание 2. Точка прицеливания m, $m \in M$, может выбираться в первом случае теоремы как элемент, на котором достигается максимум функции

$$\inf_{v(\cdot)\in V(\cdot)} \int_0^T \alpha^*(T, \tau, v(\tau), m)\, d\tau \ \text{ при } \ \alpha_*(T, m) < 1,$$

во втором — максимум функции

$$\int_0^T \alpha^*(T, \tau, m)\, d\tau \ \text{ при } \ \alpha_*(T, m) < 1.$$

Замечание 3. Результаты могут быть стандартным образом перенесены на случай группы преследователей и другие игровые ситуации, а также конкретизированы в случае импульсных, дифференциально-разностных систем, нестационарных процессов, систем с дробными и частными производными.

Заключение

В работе исследованы обобщенные квазилинейные конфликтно-управляемые процессы сближения. Использована методика верхних и нижних разрешающих функций в ситуации, когда условие Понтрягина не выполняется, а, кроме того, телесная часть цилиндрического терминального множества не выпукла. Предложена схема метода с фиксированной точкой прицеливания на множестве M.

В результате получены достаточные условия сближения за конечное время в классе как квази-, так и стробоскопических стратегий.

О.А. Чикрій, К.А. Чикрій

ПРО ВЕРХНІ ТА НИЖНІ РОЗВ'ЯЗУЮЧІ ФУНКЦІЇ В ІГРОВИХ ЗАДАЧАХ ДИНАМІКИ

Вивчаються квазілінійні конфліктно-керовані процеси загального виду на предмет зближення траєкторій з заданою циліндричною множиною. В основу досліджень покладено метод верхніх та нижніх розв'язуючих функцій. Основну увагу приділено ситуації, коли не має місця умова Понтрягіна, до того ж тілесна частина термінальної множини не є опуклою. Запропоновано схему методу, яка дозволяє у випадку неопуклості тілесної частини зафіксувати деяку точку в ній, точку прицілювання, та реалізувати процес зближення. Отримано достатні умови для розв'язування задачі зближення для різних класів стратегій. При цьому використано стробоскопічні стратегії Хайека, що визначають керування за М.М. Красовським. Процес зближення складається з двох етапів: активного та пасивного. На активному етапі накопичується верхня розв'язуюча функція першого типу, а після моменту переключення використовується нижня розв'язуюча функція другого типу. Ці функції дають можливість побудувати вимірне керування першого гравця на основі теорем про вимірний вибір, зокрема теореми Філіпова–Кастена. Отримані результати для узагальнених квазілінійних процесів дозволяють охопити широке коло функціонально-диференціальних систем, систем з дробовими та частинними похідними. Вказано можливості для розвитку запропонованої методики.

Ключові слова: конфліктно-керований процес, многозначне відображення, функція зсуву, верхні та нижні розв'язуючі функції.

Al.A. Chikrii, K.A. Chikrii

ON THE UPPER AND LOWER RESOLVING FUNCTIONS IN GAME PROBLEMS OF DYNAMICS

The quasi-linear conflict-controlled processes of general form are studied. The theme for investigation is the problem of the trajectories approaching a given cylindrical set. The research is based on the method of upper and lower resolving functions. The main attention is paid to the case when Pontryagin's condition does not hold, moreover, the bodily part of the terminal set is non-convex. A scheme of the method is proposed, which allows, in the case of non-convexity of the body part, to fix some point in it, namely the aiming point, and to realize the process of approach. Sufficient conditions are obtained for solving the problem of approach for different classes of strategies. In so doing, the Hayek stroboscopic strategies that prescribe control by N.N. Krasovskii are applied. The process of approach goes on in two stages — active and passive. On the active stage the upper resolving function of second type is accumulated and after the moment of switching the lower resolving function of second type is used. These functions allow constructing a measurable control of second player on the basis of the theorems on measurable choice, in particular, the Filippov-Castaing theorem. The obtained results for generalized quasi-linear processes make it possible to encompass a wide range of functional-differential systems as well as the systems with fractional and partial derivatives. Possibilities for development of the offered technique are specified.

Keywords: conflict-controlled process, set-valued mapping, shift function, upper and lower resolving functions.

1. Понтрягин Л.С. Избранные научные труды. М. : Наука, 1988. **2**. 576 с.
2. Красовский Н.Н. Игровые задачи о встрече движений. М. : Наука, 1970. 420 с.
3. Пшеничный Б.Н., Остапенко В.В. Дифференциальные игры. Киев : Наук. думка, 1992. 260 с.
4. Chikrii A.A. Conflict controlled processes. Dordrecht; Boston; London : Springer Science and Business Media. 2013. 424 p.
5. Chikrii A.A. An analytical method in dynamic pursuit games. *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*. Pleades Publishing, 2010. **271**. P. 69–85.
6. Chikrii A.A., Chikrii V.K. Image structure of multivalued mappings in game problems of motion control. *Journal of Automation and Information Sciences*. 2016. **48**, N 3. P. 20–35.
7. Чикрий А.А. Верхняя и нижняя разрешающие функции в игровых задачах динамики. *Труды Института математики и механики УрО РАН.* 2017. **23**, № 1. С. 293–305.
8. Chikrii A.A., Petryshyn R, Cherevko I., Bigun Y. Method of resolving functions in the theory of conflict-controlled processes. In book «Advanced Control Technique Systems: Theory and Applications», seria «Studies in Systems, Decision and Control», editors Yu. Kondratenko, V. Kuntsevich, A. Chikrii, V. Gubarev. Springer. 2019. **203**. P. 3–33.
9. Наконечный А.Г., Мащенко С.О., Чикрий В.К. Управление движением в условиях противодействия. *Международный научно-технический журнал «Проблемы управления и информатики»*. 2018. № 1. С. 53–71.
10. Chikrii G.Ts. Principle of time stretching in evolutionary games of approach. *Journal of Automation and Information Sciences.* 2016. **48**, N 5. P. 12–26.
11. Раппопорт И.С. Стратегии группового сближения в методах разрешающих функций для квазилинейных конфликтно-управляемых процессов. *Кибернетика и системный анализ.* 2019. **55**, № 1. С. 149–163.
12. Раппопорт И.С. Метод разрешающих функций для игровых задач с интегральными ограничениями. *Кибернетика и системный анализ.* 2018. **54**, № 5. С. 109–127.
13. Раппопорт И.С. Достаточные условия гарантированного результата в дифференциальной игре с терминальной функцией платы. *Международный научно-технический журнал «Проблемы управления и информатики»*. 2018. № 1. С. 72–84.
14. Hajek O. Pursuit games. New York : Academic Press, 1975. **12**. 266 p.
15. Чикрий А.А., Раппопорт И.С. Метод разрешающих функций в теории конфликтно-управляемых процессов. *Кибернетика и системный анализ.* 2012. **48**, № 5. С. 40–64.
16. Aubin J.-P., Frankowska H. Set-valued analysis. Boston; Basel; Berlin : Birkhauser, 1990. 461 p.

Получено 14.09.2021