УДК 517.9: 519.6

В.О. Богаєнко, В.М. Булавацький

ЧИСЕЛЬНО-АНАЛІТИЧНЕ РОЗВ'ЯЗАННЯ ОДНІЄЇ ЗАДАЧІ МОДЕЛЮВАННЯ ДРОБОВО-ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОЇ ДИНАМІКИ КОМП'ЮТЕРНИХ ВІРУСІВ

Ключові слова: динаміка поширення комп'ютерних вірусів, SIES-модель, математичне і комп'ютерне моделювання, дробово-диференціальні математичні моделі, метод Адамса.

Keywords: dynamics of computer viruses spreading, SIES-model, mathematical and computer modeling, fractional-differential mathematical models, Adams method.

Вступ

Через велику пропускну спроможність систем зв'язку та Інтернету поширення мережевих епідемій набуває все загрозливіших масштабів, призводячи, зокрема, і до суттєвого зростання матеріальних втрат. У зв'язку з цим важливою задачею є побудова ефективних систем антивірусного захисту комп'ютерних мереж, що базуються на результатах математичного моделювання поширення шкідливого програмного коду. При цьому за допомогою розроблених математичних моделей поширення комп'ютерних вірусів та дослідження на цій основі еволюції системи вивчається динаміка чисельності заражених вузлів та відповідні умови поширення шкідливого коду [1–4]. Численні дослідження показують, що часто поширення комп'ютерних вірусів адекватно описують моделі, в основі яких знаходяться математичні теорії біологічних епідемій (математична епідеміологія) [2, 4, 5]. Слід зазначити, що наразі з метою моделювання динаміки комп'ютерних вірусів використовуються математичні моделі типу SIR, SEIR, SIES та ін. [5–10]. Так, у SIR-моделі [5] розглядають три стани: S — susceptible (схильний до інфікування), I — infected (інфікований), R — recovered (той, що одужав). Таким чином, модель передбачає розгляд груп об'єктів, що знаходяться в одному із трьох станів, які описуються співвідношеннями [1, 3, 5, 8]

$$\dot{S} = -\beta IS,$$

$$\dot{I} = \beta IS - \gamma I,$$

$$\dot{R} = \gamma I,$$

де параметри β і γ характеризують швидкість передачі вірусу та швидкість одужання відповідно. Susceptible-Exposed-Infected-Removed (SEIR)-модель є модифікацією SIR-моделі. У ній враховується можливість наявності деякого «інкубаційного періоду», під час якого вірус не завдає шкоди інфікованому вузлу. Протягом латентного періоду (E) вузол є зараженим, але не поширює вірус. Через деякий час він стає здатним до зараження інших (I) і далі стає «таким, що одужав» (R) [3]. У SIES-моделі [11] вивчається динаміка поширення комп'ютерних вірусів за наявності ефекту дії зовнішніх комп'ютерів. Передбачається, що в будь-який момент часу комп'ютер є внутрішнім або зовнішнім залежно від того, чи доступний він у Інтернет. При побудові математичної моделі процесу використані такі змінні величини [11]:

© В.О. БОГАЄНКО, В.М. БУЛАВАЦЬКИЙ, 2022

$S(t)$ — кількість вразливих комп'ютерів на момент часу t;

$I(t)$ — кількість інфікованих комп'ютерів у момент t;

$E(t)$ — кількість зовнішніх комп'ютерів у момент t.

Загальна кількість комп'ютерів у мережі на момент часу t визначається співвідношенням $N(t) = S(t) + I(t) + E(t)$.

Процес деструктивних впливів вірусу на мережу описується модельною системою диференціальних рівнянь [11]:

$$\begin{cases} \dot{S} = \gamma_2 I + \eta_2 E - \mu S - \beta SI - \gamma_1 S, \\ \dot{I} = \beta SI - \mu I - \gamma_1 I - \gamma_2 I + \eta_1 E, \\ \dot{E} = \delta + \gamma_1 S + \gamma_1 I - \mu E - \eta_1 E - \eta_2 E \end{cases} \tag{1}$$

з початковими умовами $S(0) \ge 0,\ I(0) \ge 0,\ E(0) \ge 0.$

Функції $S(t), I(t), E(t)$ вважатимемо неперервними, а коефіцієнти $\beta, \delta, \mu, \gamma_1, \gamma_2, \eta_1, \eta_2$ — постійними та відомими параметрами моделі, характеристики яких наводяться у [11].

Як відомо, з метою врахування нелокальних ефектів, зокрема ефектів пам'яті, у процесі моделювання динаміки різних еволюційних процесів широкого поширення набув підхід, заснований на ідеях теорії інтегро-диференціювання дробового порядку [12–18]. У рамках даного підходу, дробово-диференціальний аналог системи (1) набуває вигляду

$$\begin{cases} D_t^{(\alpha)} S = \gamma_2' I + \eta_2' E - \mu' S - \beta' SI - \gamma_1' S, \\ D_t^{(\alpha)} I = \beta' SI - \mu' I - \gamma_1' I - \gamma_2' I + \eta_1' E, \\ D_t^{(\alpha)} E = \delta' + \gamma_1' S + \gamma_1' I - \mu' E - \eta_1' E - \eta_2' E, \end{cases} \tag{2}$$

де $D_t^{(\alpha)}$ — оператор дробового диференціювання Капуто порядку $\alpha\ (0 < \alpha \le 1)$ за змінною t [13–17]. Параметри $\beta', \delta', \mu', \gamma_1', \gamma_2', \eta_1', \eta_2'$ вводяться у модельну систему (2) задля забезпечення коректності розмірностей величин (надалі знак «штрих» над зазначеними параметрами опускається).

Необхідно відзначити, що вивчена в [11] SIES-модель є окремим випадком свого дробово-диференціального аналога, оскільки з (2) при $\alpha \to 1$ отримуємо систему рівнянь (1).

Таким чином, у розглядуваному випадку задача моделювання дробово-диференціальної динаміки комп'ютерних вірусів для дробового аналога SIES-моделі з урахуванням дії ефекту зовнішніх комп'ютерів, а також нелокальних ефектів зводиться до розв'язання задачі Коші для нелінійної модельної дробово-диференціальної системи (2) при таких початкових умовах:

$$S(0) = S^{(0)},\ I(0) = I^{(0)},\ E(0) = E^{(0)}\ \ (S^{(0)}, I^{(0)}, E^{(0)} \ge 0). \tag{3}$$

Нижче викладається методика отримання чисельно-аналітичного розв'язку зазначеної задачі та наводяться деякі результати комп'ютерного моделювання дробової динаміки розповсюдження комп'ютерних вірусів на основі дробово-диференціального аналога SIES-моделі.

Попередні відомості

Нижче наведено деякі основні визначення теорії дробового числення [13–17].

Визначення 1 [14–16]. Дробовий інтеграл Рімана–Ліувілля порядку $\alpha \ge 0$ від функції $f \in C_\mu\ (\mu \ge -1)$ визначається наступним чином:

$$J^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau \quad (\alpha > 0),$$
$$J^0 f(t) = f(t), \tag{4}$$

де $\Gamma(\cdot)$ — гамма-функція Ейлера [14, 15], C_{μ} — функціональний простір такий, що $f(t) = t^p h_1(t)$, де $h_1(t) \in C[0, \infty)$, $p > \mu$ [19].

Для $f \in C_{\mu}$ $(\mu \geq -1)$, $\alpha, \beta \geq 0$, $\gamma \geq -1$ мають місце такі властивості оператора J^{α}:

$$J^{\alpha} J^{\beta} f(t) = J^{\alpha+\beta} f(t);$$

$$J^{\alpha} J^{\beta} f(t) = J^{\beta} J^{\alpha} f(t);$$

$$J^{\alpha} t^{\gamma} = \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\alpha+\gamma+1)} t^{\alpha+\gamma}.$$

Визначення 2 [14–16]. Дробова похідна від функції $f(t)$ у сенсі Капуто визначається співвідношенням

$$D_t^{(\alpha)} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(\tau) d\tau \tag{5}$$

для $n-1 \leq \alpha \leq N$ $(n \in N)$, $t > 0$, $f \in C_{-1}^n$.

При цьому для $n-1 < \alpha \leq n$ $(n \in N)$ та $f \in C_{\mu}$ $(\mu \geq -1)$ має місце співвідношення

$$(J^{\alpha} D_t^{(\alpha)}) f(t) = f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} f^{(k)}(0+) \frac{t^k}{k!}.$$

Зокрема, при $0 < \alpha < 1$ маємо

$$(J^{\alpha} D_t^{(\alpha)}) f(t) = f(t) - f(0). \tag{6}$$

Визначення 3 [14, 15, 20]. Двопараметрична функція Міттаг–Лефлера визначається співвідношенням

$$E_{\alpha, \beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} \quad (\alpha > 0, \ \beta \in \mathbb{C}, \ z \in \mathbb{C}) \tag{7}$$

та є узагальненням класичної однопараметричної функції Міттаг–Лефлера

$$E_{\alpha}(z) = E_{\alpha,1}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} \quad (\alpha > 0). \tag{8}$$

Необхідно відзначити також наступне інтегральне співвідношення, наведене, наприклад, у [20]. Якщо $\alpha, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{C}$ та $\mathrm{Re}\,\alpha > 0, \mathrm{Re}\,\beta_1 > 0, \mathrm{Re}\,\beta_2 > 0,$ то має місце формула

$$\int_0^x \zeta^{\beta_1 - 1} E_{\alpha, \beta_1}(\lambda \zeta^{\alpha}) (x-\zeta)^{\beta_2 - 1} E_{\alpha, \beta_2}(\mu (x-\zeta)^{\alpha}) d\zeta =$$

$$= \frac{x^{\beta_1+\beta_2-1}}{\lambda-\mu}\left\{E_{\alpha,\,\beta_1+\beta_2}(\lambda x^{\alpha}) - E_{\alpha,\,\beta_1+\beta_2}(\mu x^{\alpha})\right\}, \tag{9}$$

де λ и $\mu\,(\lambda \neq \mu)$ — деякі комплексні параметри.

Методика отримання чисельно-аналітичного розв'язку задачі

У результаті елементарних перетворень (підсумовування всіх рівнянь системи (2) та подальшого виключення з отриманої системи функції $S(t)$) розглядувану задачу запишемо у вигляді

$$D_t^{(\alpha)} N(t) + \mu N(t) = \delta, \quad N(0) = N^{(0)}, \tag{10}$$

$$D_t^{(\alpha)} E(t) + \omega E(t) = \delta + \gamma_1 N(t),\ E(0) = E^{(0)}, \tag{11}$$

$$D_t^{(\alpha)} I(t) = A(E) + B(N, E) I(t) - \beta I^2(t),\ I(0) = I^{(0)}, \tag{12}$$

де введено позначення $A(E) = \eta_1 E$, $B(N, E) = \beta(N-E) - \mu - \gamma_1 - \gamma_2$, $\omega = \gamma_1 + \mu + \eta_1 + \eta_2$, $N = S + E + I$, $N^{(0)} \geq 0$, $E^{(0)} \geq 0$, $I^{(0)} \geq 0$, $D_t^{(\alpha)} f(t)$ — оператор дробової похідної Капуто [14–16] порядку $\alpha\,(0 < \alpha \leq 1)$, який визначається співвідношенням (5). Задача Коші (10) має точний розв'язок, який на підставі результатів робіт [14–16] можна записати у вигляді

$$N(t) = N^{(0)} E_{\alpha}(-\mu t^{\alpha}) + \delta t^{\alpha} E_{\alpha,\alpha+1}(-\mu t^{\alpha}), \tag{13}$$

де $E_{\alpha}(\cdot)$, $E_{\alpha,\,\beta}(\cdot)$ — відповідно одно- та двопараметрична функції Міттаг–Лефлера [20], що визначаються співвідношеннями (7), (8).

Аналогічно для задачі (11), на підставі [14–16] отримуємо

$$E(t) = E^{(0)} E_{\alpha}(-\omega t^{\alpha}) + \delta t^{\alpha} E_{\alpha,\alpha+1}(-\omega t^{\alpha}) + \gamma_1 \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}\left[-\omega(t-\tau)^{\alpha}\right] N(\tau)\, d\tau. \tag{14}$$

Враховуючи співвідношення (13) для $N(t)$, з (14) знаходимо

$$E(t) = E^{(0)} E_{\alpha}(-\omega\, t^{\alpha}) + \delta t^{\alpha} E_{\alpha,\,\alpha+1}(-\omega\, t^{\alpha}) +$$

$$+ \gamma_1 \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}\left[-\omega\,(t-\tau)^{\alpha}\right]\left\{N^{(0)} E_{\alpha}(-\mu\tau^{\alpha}) + \delta\tau^{\alpha} E_{\alpha,\alpha+1}(-\mu\tau^{\alpha})\right\} d\tau =$$

$$= E^{(0)} E_{\alpha}(-\omega\, t^{\alpha}) + \delta t^{\alpha} E_{\alpha,\alpha+1}(-\omega\, t^{\alpha}) + \gamma_1 \{N^{(0)} \times$$

$$\times \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha,\,\alpha}\left[-\omega\,(t-\tau)^{\alpha}\right] E_{\alpha}(-\mu\tau^{\alpha})\, d\tau +$$

$$+ \delta \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha,\,\alpha}\left[-\omega\,(t-\tau)^{\alpha}\right] E_{\alpha,\,\alpha+1}(-\mu\tau^{\alpha})\tau^{\alpha}\, d\tau\}. \tag{15}$$

Обчислюючи інтеграли у фігурних дужках співвідношення (15) та враховуючи (9), отримуємо

$$E(t) = E^{(0)} E_{\alpha}(-\omega\, t^{\alpha}) + t^{\alpha}\left\{\left(\delta + \frac{\omega\gamma_1}{\omega-\mu} N^{(0)}\right) E_{\alpha,\,\alpha+1}(-\omega\, t^{\alpha}) -\right.$$

$$\left. - \frac{\mu\gamma_1}{\omega-\mu} N^{(0)} E_{\alpha,\alpha+1}(-\mu t^{\alpha}) + \frac{\delta\gamma_1}{\omega-\mu}\left[\omega E_{\alpha,1+2\alpha}(-\omega\, t^{\alpha}) - \mu E_{\alpha,1+2\alpha}(-\mu t^{\alpha})\right]\right\}. \tag{16}$$

Таким чином, співвідношення (16) — це замкнена форма розв'язку задачі (11). Отже, після визначення функції $N(t)$ згідно з (13), а потім — функції $E(t)$ згідно з (16), розглядувана задача зводиться до розв'язання наступної задачі Коші для рівняння дробового порядку типу Ріккаті щодо невідомої функції $I(t)$:

$$D_t^{(\alpha)} I(t) = f(I(t)),\ I(0) = I^{(0)}, \tag{17}$$

де

$$\begin{aligned} f(I(t)) &= A(E) + B(N,E)I(t) - \beta I^2(t) = \\ &= \eta_1 E + \left[\beta(N-E) - \mu - \gamma_1 - \gamma_2\right] I(t) - \beta I^2(t), \end{aligned} \tag{18}$$

та $N = N(t)$, $E = E(t)$ — відомі функції, що визначаються співвідношеннями (13), (16) відповідно.

Розв'язок задачі (17), (18), зважаючи на її нелінійність, знаходиться чисельно. При цьому ефективно розв'язати цю задачу можна за допомогою дробового методу Адамса, запропонованого в роботі [21] (подальше вивчення та розвиток дробового методу Адамса проведено, зокрема, у [22]). Відповідний цьому методу алгоритм розрахунку на сітці $t_j = \tau j$ ($j = 0, 1, 2, \ldots$, $\tau > 0$ — крок сітки) згідно з [21, 22] запишемо як

$$\begin{cases} I_{j+1}^p = I^{(0)} + \dfrac{\tau^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \sum\limits_{k=0}^{j} b_{k,\,j+1} f(I_k) \quad (j = 0, 1, 2, \ldots), \\ I_{j+1} = I^{(0)} + \dfrac{\tau^\alpha}{\Gamma(\alpha+2)} \left[\sum\limits_{k=0}^{j} a_{k,\,j+1} f(I_k) + a_{j+1,\,j+1} f(I_{j+1}^p) \right] \quad (j = 0, 1, 2, \ldots), \end{cases} \tag{19}$$

де введено такі позначення:

$$a_{k,j+1} = \begin{cases} j^{\alpha+1} - (j-\alpha)(j+1)^\alpha \quad (k=0), \\ (j-k+2)^{\alpha+1} - 2(j-k+1)^{\alpha+1} + (j-k)^{\alpha+1} \ (1 \le k \le j), \\ 1 \quad (k = j+1), \end{cases}$$

$$b_{k,j+1} = (j-k+1)^\alpha - (j-k)^\alpha,$$

$$f(I_k) = \eta_1 E_k + \left[\beta(N_k - E_k) - \mu - \gamma_1 - \gamma_2\right] I_k - \beta I_k^2,$$

$$f(I_{j+1}^p) = \eta_1 E_{j+1} + \left[\beta(N_{j+1} - E_{j+1}) - \mu - \gamma_1 - \gamma_2\right] I_{j+1}^p - \beta (I_{j+1}^p)^2,$$

$$I(t_j) \approx I_j,\ I_0 = I^{(0)} \quad (j = 0, 1, 2, \ldots).$$

Ефективність даної обчислювальної схеми неодноразово підтверджена, зокрема, щодо динаміки хаотичних атракторів у дробово-диференціальних системах [22, 23]. Стосовно оцінки похибки схеми дробового методу Адамса необхідно зазначити, що, як показано в роботі [21], для $I(t) \in C^2[0, T]$ та $0 < \alpha < 1$ має місце співвідношення

$$\max_{0 \le j \le N} \left| I(t_j) - I_j \right| = \begin{cases} O(\tau^{2\alpha}) \ \ (0 < \alpha < \dfrac{1}{2}), \\ O(\tau) \ \ (\dfrac{1}{2} \le \alpha < 1). \end{cases}$$

У ряді випадків (зокрема, при малих значеннях часової змінної t) може бути корисною методика відшукання наближено-аналітичного розв'язку задачі (17), (18). Для цього можна скористатися, наприклад, декомпозиційним алгоритмом розв'язання дробового рівняння Ріккаті, описаним у [24]. Відповідно до зазначеного алгоритму, застосовуючи до обох частин (17) дробовий інтеграл Рімана–Ліувілля J^{α} $(0<\alpha\le 1)$, який визначається співвідношенням (4), з урахуванням співвідношення (6) отримуємо $I(t)=\Phi(t)+\Omega(I)$, де

$$\Phi(t)=I^{(0)}+\eta_1 J^{\alpha}\left[E\right],\ \Omega(I)=J^{\alpha}\left[B(N,E)I(t)-\beta I^2(t)\right]. \qquad (20)$$

Представляючи $I(t)$ та $\Omega(I)$ у вигляді [24]

$$I(t)=\sum_{n=0}^{\infty} I_n(t),\ \Omega(I)=\Omega(I_0)+\{\Omega(I_0+I_1)-\Omega(I_0)\}+\{\Omega(I_0+I_1+I_2)-\Omega(I_0+I_1)\}\ldots,$$

отримуємо

$$I_0=\Phi(t),\ I_1=\Omega(I_0),\ I_2=\Omega(I_0+I_1)-\Omega(I_0),\ldots.$$

Виконання наступних викладок щодо отримання аналітичних співвідношень для членів ряду $I_1, I_2, \ldots$ є ефективним із залученням пакетів програм символьних перетворень.

Результати комп'ютерної реалізації розв'язку

Комп'ютерна реалізація викладеної вище методики чисельно-аналітичного розв'язання задачі моделювання дробової динаміки комп'ютерних вірусів у рамках дробово-диференціального аналога розглядуваної SIES-моделі виконана для вихідних даних, наведених у [11].

Деякі з отриманих результатів графічно зображені на рис. 1–5. Так, на рис. 1 представлена загальна картина еволюції всіх шуканих функцій задачі $N(t)$, $E(t)$ та $I(t)$ при фіксованому значенні показника порядку похідних $\alpha=0,8$ та початкових умовах $N(0)=800,\ E(0)=200,\ I(0)=500.$

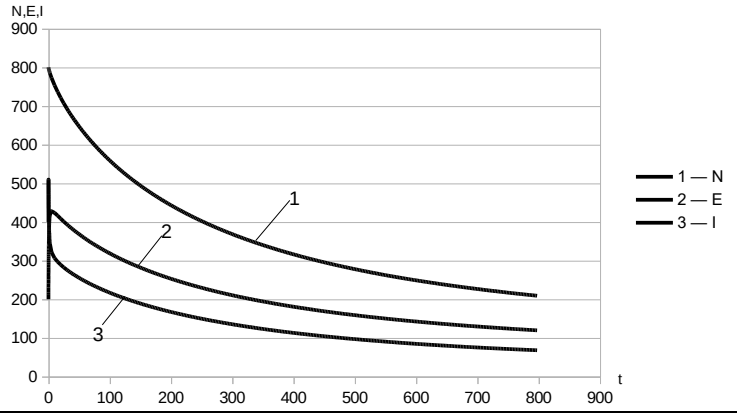

Рис. 1

На рис. 2 представлені графіки $N(t)$ (загальної кількості комп'ютерів) як функції часової змінної t для різних значень показника дробової похідної α $(1-\alpha=1,0;\ 2-\alpha=0,9;\ 3-\alpha=0,8;\ 4-\alpha=0,7;\ 5-\alpha=0,6;\ 6-\alpha=0,5;\ 7-\alpha=0,4;$ $N(0)=800)$, а на рис. 3 — графіки $E(t)$ (множини зовнішніх комп'ютерів у момент t) для тих же значень показника α: $(1-\alpha=1,0;\ 2-\alpha=0,9;$ $3-\alpha=0,8;\ 4-\alpha=0,7;\ 5-\alpha=0,6;\ 6-\alpha=0,5;\ 7-\alpha=0,4;\ E(0)=200).$

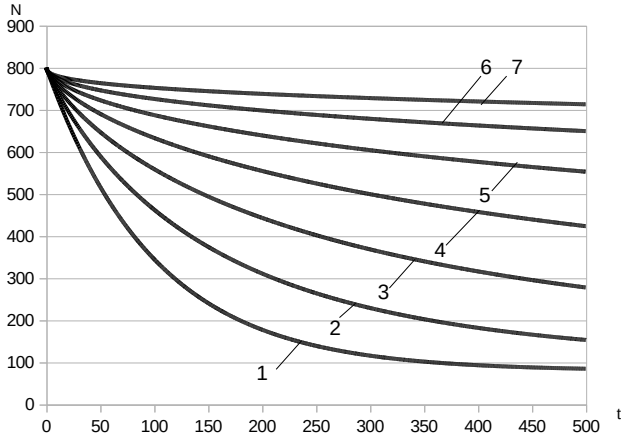

Рис. 2

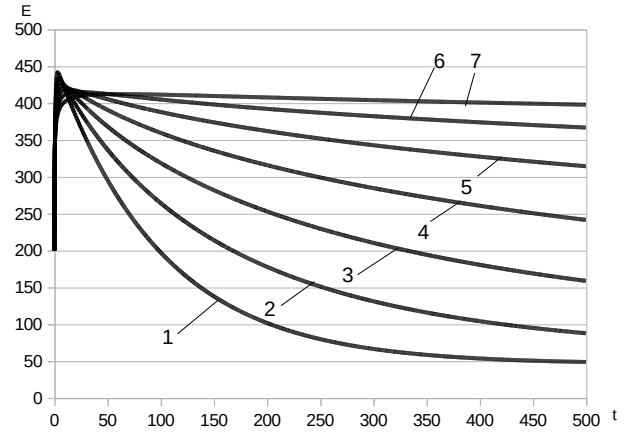

Рис. 3

Графіки еволюції кількості інфікованих комп'ютерів $I(t)$ до усталеного стану для різних значень показника порядку дробової похідної α $(1-\alpha=1,0;$ $2-\alpha=0,8; 3-\alpha=0,6; 4-\alpha=0,5; 5-\alpha=0,4;$ $I(0)=600)$ представлені на рис. 4. На рис. 5 наведені графіки функції $I(t)$ для малих значень часової змінної t та різних значень показника порядку дробової похідної α $(1-\alpha=1,0; 2-\alpha=$ $=0,8; 3-\alpha=0,6; 4-\alpha=0,5; 5-\alpha=0,4)$ за умов впливу перехідних процесів.

Наведений графічний матеріал дозволяє зробити такі висновки.

1. Спостерігається зменшення величини $N(t)$ з часом від початкового стану і субдифузійна еволюція до усталеного стану. При значенні $\alpha=0,4$ маємо найповільнішу еволюцію, а при $\alpha=1$ (випадок математичної моделі у класичній постановці [11]) — найшвидшу (див. рис. 2).

2. Динаміка зміни функції $E(t)$ може мати складніший характер: від початкового стану спостерігається швидке нетривале зростання даної функції, а потім — плавне і повільне її спадання до усталеного стану. Швидкість такого спадання $E(t)$ зменшується зі зменшенням показника порядку дробової похідної α (див. рис. 3).

3. Для середніх та великих значень часової змінної t еволюція числа $I(t)$ інфікованих комп'ютерів до усталеного стану відбувається у надповільному режимі (рис. 4). Величина $I(t)$ при фіксованому t приймає тим більше значення,

чим менший показник порядку дробової похідної α. Найменше значення $I(t)$, що спостерігається при $\alpha = 1$, відповідає випадку класичної математичної моделі [11] динамічної системи (крива 1, та 2–5 на рис. 4).

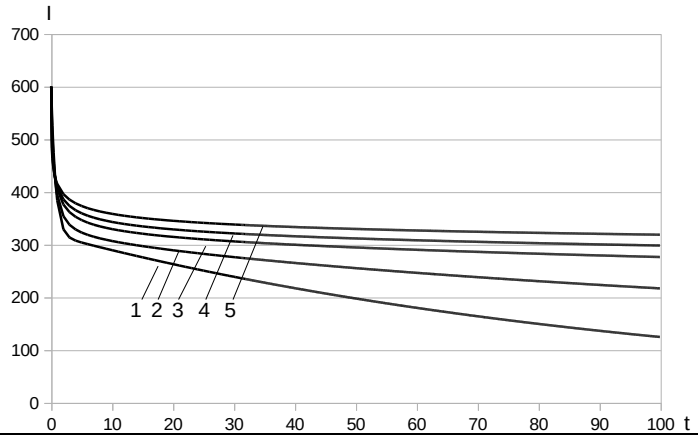

Рис. 4

4. Для малих значень часової змінної t має місце складніша картина еволюції $I(t)$. Зокрема, у цьому випадку спостерігаються різні динамічні реакції, включаючи швидкий початковий перехідний процес та надповільну збіжність до фінальної еволюції (див. рис. 5, криві 1 та 2–5). Слід зазначити, що така властивість має місце і для деяких інших дробово-диференціальних моделей динаміки комп'ютерних вірусів, наприклад для дробового аналога SIR-моделі [12].

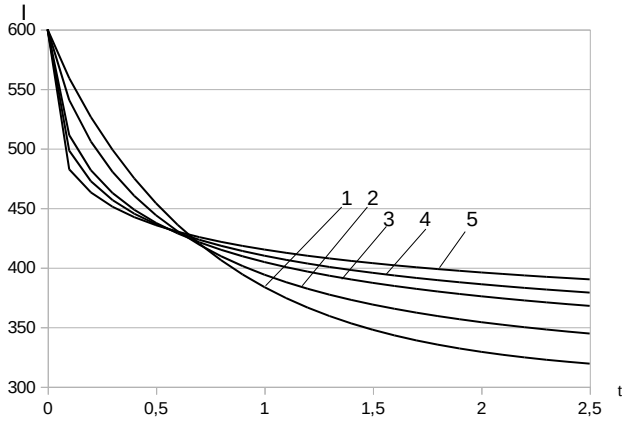

Рис. 5

Таким чином, моделюючи динаміку процесу поширення комп'ютерних вірусів у рамках аналізованого дробово-диференціального аналога відомої [11] SIES-моделі, отримано можливість вивчення сімейств різноманітних динамічних реакцій, що включають швидкі перехідні процеси та надповільну еволюцію систем з пам'яттю.

Висновок

Для дробово-диференціального аналога SIES-моделі [11] комп'ютерної вірусології розроблена методика отримання чисельно-аналітичного розв'язку відповідної задачі Коші для нелінійної системи рівнянь дробового порядку, заснована на наступному комбінованому підході: одна частина шуканих функціональних залежностей визначається аналітично, тоді як інша — на основі використання чисельних методів (зокрема, дробового методу Адамса [21]). Наведено результати комп'ютерної реалізації викладеного підходу та відповідні висновки якісного характеру щодо особливостей динамічних реакцій у процесі поширення комп'ютерних вірусів.

В.О. Богаєнко, В.М. Булавацький

ЧИСЕЛЬНО-АНАЛІТИЧНЕ РОЗВ'ЯЗАННЯ ОДНІЄЇ ЗАДАЧІ МОДЕЛЮВАННЯ ДРОБОВО-ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОЇ ДИНАМІКИ КОМП'ЮТЕРНИХ ВІРУСІВ

Розглядається задача моделювання динаміки поширення комп'ютерних вірусів на основі моделі, що базується на математичній теорії біологічних епідемій. Актуальність даної задачі обумовлена необхідністю побудови ефективних систем антивірусного захисту комп'ютерних мереж, що базуються на результатах математичного моделювання поширення шкідливого програмного коду. Розглядається SIES-модель (Gan C., Yang X., Zhu Q.), що вивчає динаміку поширення комп'ютерних вірусів, розділяючи ефекти дії комп'ютерів доступних і недоступних в мережі Інтернет. З метою врахування у даній моделі нелокальних ефектів, зокрема ефектів пам'яті, запропоновано її модифікацію, що грунтується на ідеях теорії інтегро-диференціювання дробового порядку. Викладено методику отримання чисельно-аналітичного розв'язку задачі моделювання динаміки поширення комп'ютерних вірусів на основі дробово-диференціального аналога SIES-моделі. Отримано замкнені форми розв'язків задач щодо функцій кількості вразливих і зовнішніх комп'ютерів, а також побудовано скінченно-різницеву схему дробового методу Адамса для задачі визначення кількості інфікованих комп'ютерів. Результати обчислювальних експериментів на основі розробленої методики чисельно-аналітичного розв'язання показують, що має місце субдифузійна еволюція системи до усталеного стану. При цьому для функції кількості зовнішніх комп'ютерів спостерігається швидке нетривале зростання на початкових стадіях розвитку процесу, а потім — плавне і повільне зменшення до сталого стану. Для середніх і великих значень часової змінної еволюція числа інфікованих комп'ютерів до усталеного стану відбувається в надповільному режимі. Таким чином, запропонована методика дає можливість вивчення сімейств динамічних реакцій у процесі поширення комп'ютерних вірусів, що включають швидкі перехідні процеси і надповільну еволюцію системи з пам'яттю.

V.O. Bohaienko, V.M. Bulavatsky

NUMERICAL-ANALYTIC SOLUTION OF ONE MODELING PROBLEM OF FRACTIONAL-DIFFERENTIAL DYNAMICS OF COMPUTER VIRUSES

The paper considers the problem of modeling the dynamics of computer viruses spreading using a model based on the mathematical theory of biological epidemics. The urgency of the considered problem arises from the need to build effective antivirus protection systems for computer networks based on the results of mathematical modeling of the spread of malicious software. We consider the SIES-model (Gan C., Yang X., Zhu Q.), that studies spread dynamics of computer viruses separating the influence of the action of computers accessible and unavailable on the Internet. In order to take into account non-local effects in this model, in particular memory effects, its modification on the ideas of the theory of fractional-order integro-differentiation is proposed. The technique of obtaining a numerical-analytical solution of the problem of modeling of computer viruses spread dynamics on the base of the fractional-differential counterpart of the SIES-model is presented. Closed forms solutions of the problems for the number of vulnerable and external computers are obtained, and a finite-difference scheme of the fractional Adams method for the problem of determining the number of infected computers is constructed. The results of computational experiments based on the developed technique of numerical-analytical solution show that there is a subdiffusion evolution of the system to the steady state. At the same time, for the number of external computers, a fast short-term growth is observed at the initial stages of process development with subsequent

 ISSN 1028-0979

smooth and slow decrease towards the steady state. For medium and large values of the time variable, the evolution of the number of infected computers to the steady state occurs in an ultra-slow mode. Thus, the proposed technique makes it possible to study the families of dynamic reactions in the process of computer viruses spreading, including fast transient processes and ultra-slow evolution of systems with memory.

1. Семыкина Н.А. Исследование устойчивости системы, моделирующей распространение вредоносного кода. *Вестник Кемеровского гос. университета.* 2014. **1**, № 3(59). С. 41–46.
2. Семыкина Н.А., Шавыкина Н.В. Математическая модель защиты компьютерной сети от вирусов. *Программные продукты и системы*. 2016. **29**, № 4. С. 125–128.
3. Котенко И.В., Воронцов В.В. Аналитические модели распространения сетевых червей. *Труды СПИИРАН*. 2007. Вып. 4. С. 208–224.
4. Семенов С.Г., Давыдов В.В. Математическая модель распространения компьютерных вирусов в гетерогенных компьютерных сетях автоматизированных систем управления технологическим процессом. *Вестник НТУ «ХПИ»*. 2012. № 38. С. 163–171.
5. Бейли Н. Математика в биологии и медицине. М.: Мир, 1970. 327с.
6. Gan C., Yang X., Zhu Q. Propagation of computer virus under the influences of infected external computers and removable storage media. Modeling and analysis. *Nonlinear Dynamics*. 2014. **78.** P. 1349–1356.
7. Gan C., Yang X., Liu W., Zhu Q. A propagation model of computer virus with nonlinear vaccination probability. *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat*. 2014. **19**. P. 92–100.
8. Yang L., Yang X., Liu J., Zhu Q., Gan C. Epidemics of computer viruses: A complex–network approach. *Applied Mathem. And Comput*. 2013**. 219**. P. 8705–8717.
9. Zhu Q., Yang X., Yang L., Zhang X. A mixing propagation model of computer viruses and countermeasures. *Nonlinear Dynamics.* 2013. **73**. P. 1433–1441.
10. Ren J., Yang X., Zhu Q., Yang L., Zhang C. A novel computer virus model and its dynamics. *Nonlin. Analysis: Real World Appl*. 2012. **13**. P. 376–384
11. Gan C., Yang X., Zhu Q. The spread of computer virus under the effect of external computers. *Nonlinear Dynamics.* 2013. **73**. P. 1615–1620.
12. Pinto C.M.A., Machado J.A. Fractional dynamics of computer virus propagation. *Mathematical problems in engineering*. 2014. **2014**, Article ID 476502.
13. Mainardi F. Fractional calculus and waves in linear viscoelasticity. London: Imperial College Press. 2010. 350 p.
14. Podlubny I. Fractional differential equations. New York : Academic Press, 1999. 341 p.
15. Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J. Theory and applications of fractional differential equations. Amsterdam: Elsevier, 2006. 523 p.
16. Sandev T., Tomovsky Z. Fractional equations and models. Theory and applications. Cham, Switzerland: Springer Nature Switzerland AG, 2019. 344 p.
17. Учайкин В.В. Метод дробных производных. Ульяновск: Артишок, 2008. 512 с.
18. Bulavatsky V.M. Some modeling problems of fractional-differential geofiltrational dynamics within the framework of generalized mathematical models. *Journal of Automation and Information Science*. 2016. **48**, N 5. P. 27–41.
19. Hilfer R., Luchko Y., Tomovski Z. Operational method for the solution of fractional differential equations with generalized Riemann–Liouville fractional derivatives. *Fract. Calc. Appl. Anal.* 2009. **12**. N 3. P. 299–318.
20. Gorenflo R., Kilbas A.A., Mainardi F., Rogosin S.V. Mittag–Leffler functions, related topics and applications. Berlin: Springer Verlag. 2014. 454 p.
21. Diethelm K., Ford N.J., Freed A.D. Detailed error analysis for a fractional Adams method. *Numer. Algorithms*. 2004. **3.** P. 31–52.
22. Li C., Tao C. On the fractional Adams method. *Comput. and Mathemat. With Applications.* 2009. **58**. P. 1573–1588.
23. Li C.P., Peng G.J., Chaos in Chen's system with a fractional order. Chaos, Solitons, Fractals. 2004. **22**. P. 443–450.
24. Odetunde O.S., Taiwo O.A. A decomposition algorithm for the solution of fractional quadratic Riccati differential equations with Caputo derivatives. *American Journal of Computational and Applied Mathematics*. 2014. **4(3)**. P. 83–91.

Отримано 10.12.2021