УДК 624.04:624.07:519.688

# ПОЛУОПРЕДЕЛЕННАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ И ВОЗМОЖНОСТИ ЕЕ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ЭФФЕКТИВНЫХ РЕШЕНИЙ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ В УСЛОВИЯХ СТОХАСТИЧЕСКОЙ СРЕДЫ

Предлагается алгоритм поиска оптимальной конфигурации стержневой системы, решающий двойственную проблему минимизации массы конструкции и максимизации ее прочностных параметров. Метод позволяет решать оптимизационную задачу при нагрузках, заданных с помощью вероятностных распределений.

The paper considers an algorithm for finding of the optimal configuration of a truss-like elastic system. The algorithm solves an ambivalent problem of structure mass minimizing and maximizing its strength parameters. The method allows to solve the optimization problem under loads specified by probabilistic distributions.

**Ключевые слова**: стержневая система, полуопределенная оптимизация, топология, граф, устойчивость, бутстрэп.

**Е.А. Егоров**
профессор Приднепровской государственной академии строительства и архитектуры, д.т.н.

**А.Е. Кучеренко**
соискатель Приднепровской государственной академии строительства и архитектуры

В современном мире вопросы оптимального проектирования различного рода конструкций, в том числе относящихся к сфере прерогатив строительной механики, являются чуть ли не самыми актуальными. В данной статье авторы рассматривают вопросы, связанные с поиском оптимальных конструктивных решений стержневых систем, включая их топологию. В пределах этого класса конструкций рассматриваются системы любой сложности и конфигурации, плоские и пространственные. Естественно, что сюда можно отнести и задачи стержневой аппроксимации континуальных систем. Из сказанного можно заключить, что область использования предлагаемых ниже алгоритмов весьма широка, и поэтому подобные разработки имеют очевидную актуальность.

Во многочисленных трудах, посвященных оптимальному проектированию строительных конструкций, как правило, либо исследуется сугубо математическая сторона оптимизационной задачи без учета прикладных вопросов, либо приводятся решения какой-либо частной инженерной проблемы.

Из первой группы можно выделить работы Баничука Н.В., Бен-Таля А., Валуйских В.П., имеющие больше математический уклон, но направленные на решение оптимизационной проблемы в задачах технической инженерии. Так, в [1] автор всесторонне рассматривает задачу оптимального проектирования в общей функциональной форме и приводит как аналитические, так и численные методы их решения. В [2] обосновывается и анализируется проблема оптимизации стержневых систем, представленная в виде задачи полуопределенного программирования. В [3] рассматривается задача оптимизации с позиций статистического эксперимента и приводится ряд эвристических алгоритмов, направленных на ее решение.

Из второй группы ближе всего по постановке работы Пермякова В.А., Гринева В.Б., Серпика И.Н., Бараненко В.А., Пичугина С.Ф. и др. В [4, 5] приводятся решения, обусловленные частными инженерно-техническими требованиями, в частности, рассматривается оптимизация предварительно напряженных металлических конструкций. В [6] рассматривается оптимизация элементов конструкций по спектру собственных значений, а в [7] задача оптимизации решается с помощью генетических алгоритмов. В [9] представлен гибридный метод оптимизации стержневых конструкций на базе генетического и градиентного алгоритмов; последний используется для уточнения оптимального решения.

Отдельно стоит упомянуть работы [10–12], в которых авторы используют методы динамического программирования для приведения оптимизационной задачи с множеством переменных к рекурсивной последовательности более простых задач. В [13] этот же алгоритм используется в условиях наличия нечеткой информации об оптимизируемой системе. В [14] авторы применяют вероятностные методы для подбора прочностных характеристик стальных балок в стохастической среде.

Перечисленные работы имеют характерные для оптимизации реальных конструкций недостатки, а именно: строгая математическая оптимизация плохо подходит для решения реальных технических задач, а частное инженерное решение обычно не обеспечивает оптимального в глобальном смысле разрешения проблемы. Это объясняется тем, что подавляющее большинство инженерно-оптимизационных задач не являются выпуклыми, и в таких случаях поиск нелокального оптимального решения весьма проблематичен. Поэтому авторы перечисленных работ, как правило, либо упрощают постановку проблемы, либо довольствуются некоторой неопределенностью при решении задач в строгой постановке. Применение генетических алгоритмов хотя и позволяет получать оптимальные в глобальном смысле решения, но из-за вычислительной сложности работа с системами, включающими большое количество конечных элементов, затруднена. В данной статье предлагается алгоритм, позволяющий избежать указанных недостатков.

**Нелинейная оптимизация топологии стержневой системы**. Ядром предлагаемого алгоритма является хорошо известная проблема оптимизации топологии стержневой системы, представленная в форме полуопределенной задачи математического программирования [2]:

$$
\begin{aligned}
&\text{minimize}_{W,v} W\\
&s.t. \sum_{i=1}^{m} v_i = 1\\
&v_i \geq 0,\ i = 1 \ldots m\\
&\begin{pmatrix} W & F^T \\ F & \sum_{i=1}^{m} \frac{E_i v_i}{L_i^2} p_i p_i^T \end{pmatrix} \geq 0\ ,
\end{aligned} \qquad (1)
$$

где $W$ – верхняя оценка величины энергии упругой деформации стержневой системы; $v_i$ – объем $i$-го стержня; $F$ – внешние силы, приложенные к узлам конструкции; $E_i$ – модуль Юнга; $L_i$ – длина $i$-го стержня; $p_i$ – $i$-й столбец матрицы уравнений системы $P$, которая входит в уравнение баланса сил $Pf = -F$.

Оптимизационная задача сводится к поиску минимальной величины $W$ при заданных ограничениях. Результатом решения задачи (1) будет соотношение объемов стержней $v_1{:}v_2{:}\ldots{:}v_m$. Конечные значения $v_i$ определяются из условий, которые обеспечивают выполнение технических требований к исследуемой системе. Среди них – проверка конструкции на прочность и устойчивость.

Проверка выполнения условия прочности, как правило, не вызывает проблем. Она осуществляется по формуле [8]

$$\frac{N\gamma_n}{A\gamma_c R} \leq 1\ , \qquad (2)$$

где $N$ – сила, действующая на стержень; $\gamma_c$ – коэффициент условий работы; $\gamma_n$ – коэффициент надежности по назначению; $R$ – расчетное сопротивление материала; $A$ – площадь сечения стержня.

Ключевым моментом в реализации алгоритма является построение системы, которая бы вписывалась в поле заданных генеральных размеров с определенными точками приложения внешних сил и расположения опор. В качестве такой исходной системы в общем случае понимается полный граф (см. рис. 1), который включает в себя все возможные соединения узлов. В дальнейшем на основании решения (1) и условия (2) «лишние» элементы отбрасываются; в итоге остаются стержни, обеспечивающие выполнение оптимизационных критериев. Решение (1) позволяет определять площади сечений стержней, что дает возможность для большинства общепринятых видов сечений легко находить основные их параметры.

Для растянутых стержней этого вполне достаточно, поскольку единственным прочностным ограничением является условие (2). Для сжатых стержней все оказывается значительно сложнее. Так, проверка условия устойчивости связана с необходимостью построения касательной матрицы жесткости. Эта матрица подвергается $LDL*$-декомпозиции:

$$K = LDL*\ , \qquad (3)$$

где $L$ – нижняя треугольная матрица; $D$ – диагональная матрица; $L*$ – сопряженно-транспонированная матрица $L$.

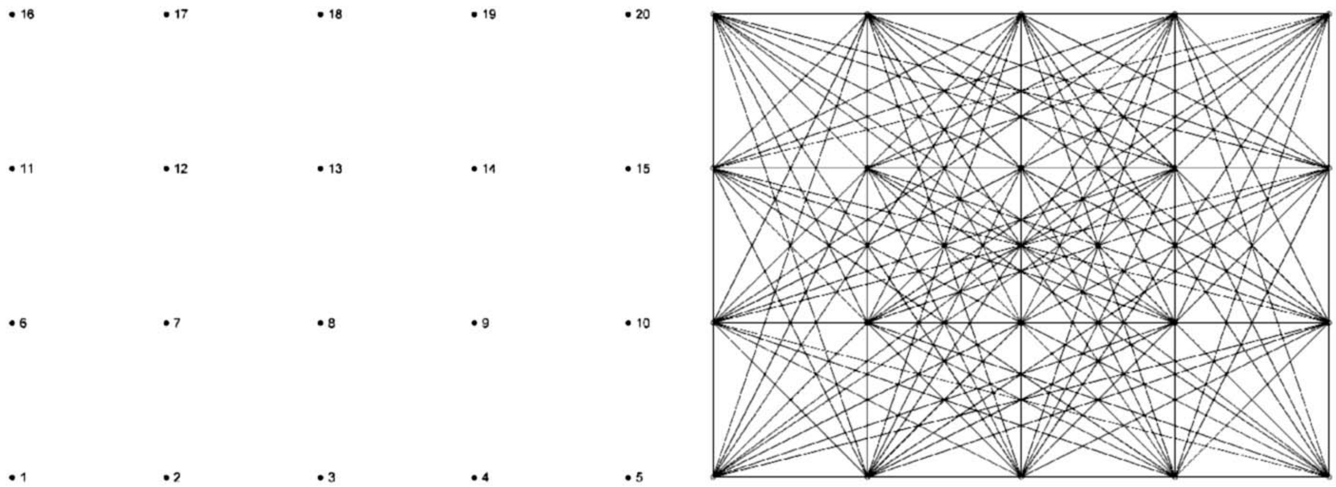


Рис. 1. Узлы и полный граф стержневой системы

Предполагается, что система будет находиться в устойчивом состоянии, если все диагональные элементы матрицы *D* положительны. Построение матрицы жесткости стержневой системы непосредственно связано с плоскими моментами инерции сечений стержней, вычисление которых сопряжено с определенными трудностями ввиду того, что не существует однозначного функционального отображения площади сечения стержня в его плоский момент инерции. Поэтому к предложенному алгоритму поиска оптимальной топологии авторами разработан вспомогательный блок оптимального подбора сечений конструкционных элементов.

Блок подбора оптимальных сечений построен по принципу определения функциональных зависимостей с использованием опорных (базовых) значений. Для металлических конструкций в качестве таких значений принимаются сортаментные данные (значения моментов инерции, соответствующие различным значениям площади сечения для того или иного прокатного профиля). Такие данные могут быть заранее заданы. По опорным точкам, используя кусочно-линейную интерполяцию, строится функция, определяющая геометрические характеристики (или другую требуемую величину) сечения стержня из какого-либо прокатного профиля. Решение оптимизационной задачи и подбор сечений, удовлетворяющих всем необходимым требованиям, будет приводить к таким геометрическим характеристикам, которыми не обладает ни один профиль в сортаменте. Но по этим значениям характеристик не составит труда определить параметры и номера профилей, обеспечивающие достижение поставленной цели

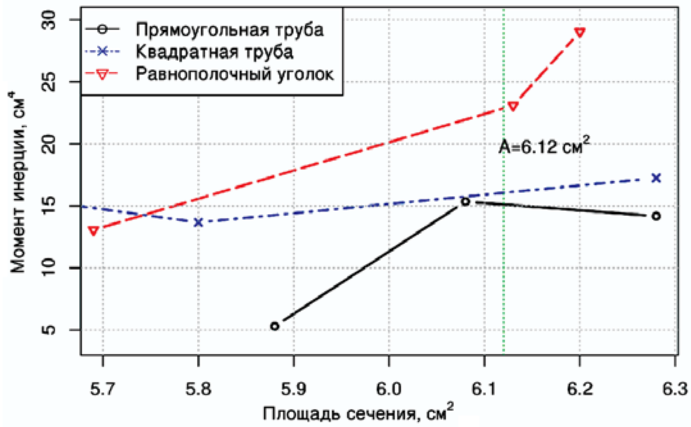


Рис. 2. Зависимость момента инерции плоского сечения от его площади

оптимизации. Для примера рассмотрим три сечения различной конфигурации с близкими значениями моментов инерции и площадями: прямоугольная труба, квадратная труба и равнополочный уголок.

Допустим, решение оптимизационной задачи (1) привело к значению площади сечения стержня в 6,12 см$^2$. В область этого значения попадают фрагменты кусочно-линейных функций, показанных на рис. 2, соответственно для прямоугольной трубы, квадратной трубы и равнополочного уголка. Очевидно, что в данной ситуации оптимальным сечением является равнополочный уголок, причем наиболее близкий сортаментный профиль имеет площадь 6,13 см$^2$ и момент инерции 23,10 см$^4$. Такой подход позволяет аппроксимировать моменты инерции сечений и строить касательную матрицу жесткости, которая в дальнейшем и используется для проверки общей устойчивости системы.

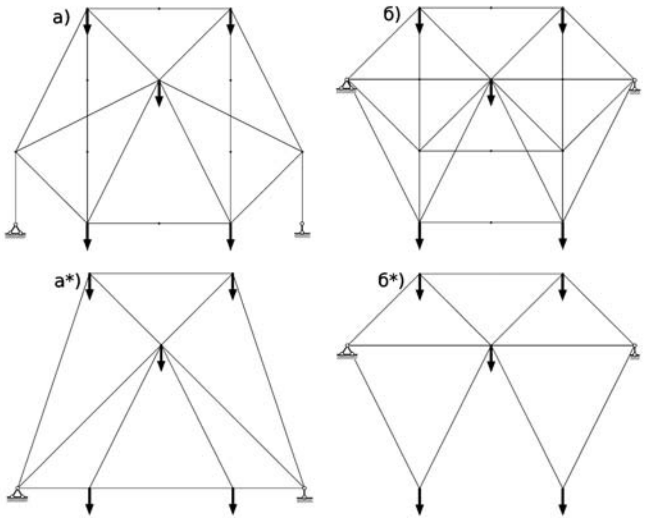


Рис. 3. Конструктивные схемы с различными расположениями опор. Вертикальными стрелками показаны направления внешних сил

Важно отметить, что при решении оптимизационных задач изменение практически любого начального условия может сопровождаться существенным изменением конечного результата. Для примера рассмотрим плоскую стержневую систему, узлы и полный граф которой изображены на рис. 1. На рис. 3 показаны два варианта конструктивной схемы (а и б), которые можно получить из исходного полного графа при решении задачи оптимизации (1): изменение только мест расположения опор приводит к существенной перестройке всей топологии стержневой системы при одних и тех же генеральных размерах и внешних нагрузках. Может показаться, что в полученных в процессе оптимизации схемах задействован целый ряд лишних стержней. Однако, переход, например, от схемы «а» к схеме «а*» приводит к увеличению материалоемкости на 23,6 %, а от схемы «б» к схеме «б*» – на 27,7 % излишних затрат материала. Все это получено для системы, стержни которой выполняются из круглых металлических труб.

В реальных условиях эксплуатации стержневых систем далеко не всегда удается представить внешние нагрузки в виде точных значений. Силы могут быть представлены как переменные величины, описываемые определенными статистическими распределениям. Задача (1) напрямую не может оперировать величинами, представленными в виде вероятностных распределений. Для решения этой проблемы авторами предложено использовать процедуру сэмплирования,

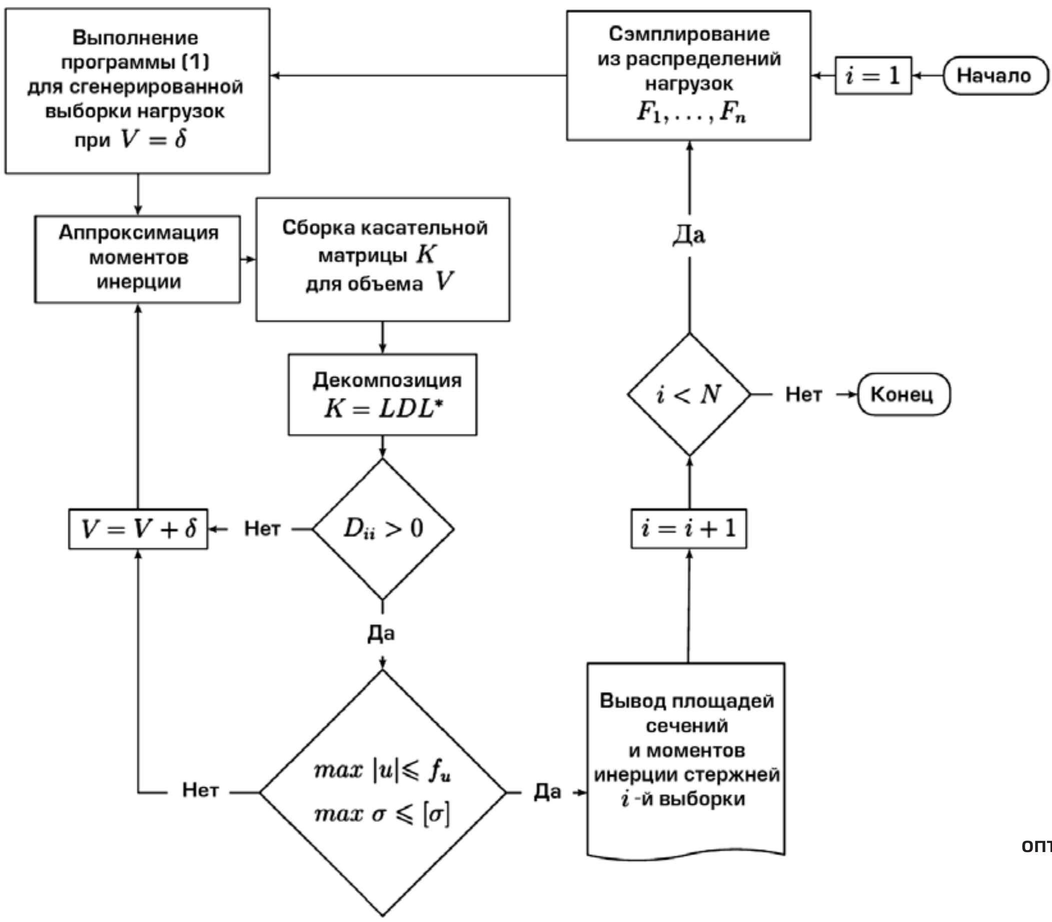


Рис. 4. Алгоритм решения оптимизационной задачи

**Результаты решения задачи**

| № выборки | Площади сечений | Моменты инерции |
|---|---|---|
| 1 | $A_{11}, A_{12}, \dots, A_{1m}$ | $(I_{1z}, I_{1y})_1, (I_{2z}, I_{2y})_1, \dots, (I_{mz}, I_{my})_1$ |
| 2<br>... | $A_{21}, A_{22}, \dots, A_{2m}$<br>... | $(I_{1z}, I_{1y})_2, (I_{2z}, I_{2y})_2, \dots, (I_{mz}, I_{my})_2$<br>... |
| N | $A_{N1}, A_{N2}, \dots, A_{Nm}$ | $(I_{1z}, I_{1y})_N, (I_{2z}, I_{2y})_N, \dots, (I_{mz}, I_{my})_N$ |

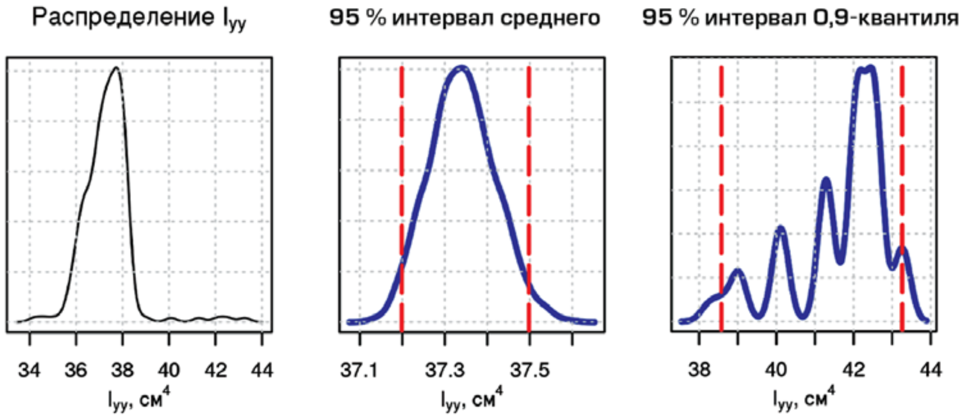


**Рис. 5. Распределение момента инерции стержня и доверительные интервалы**

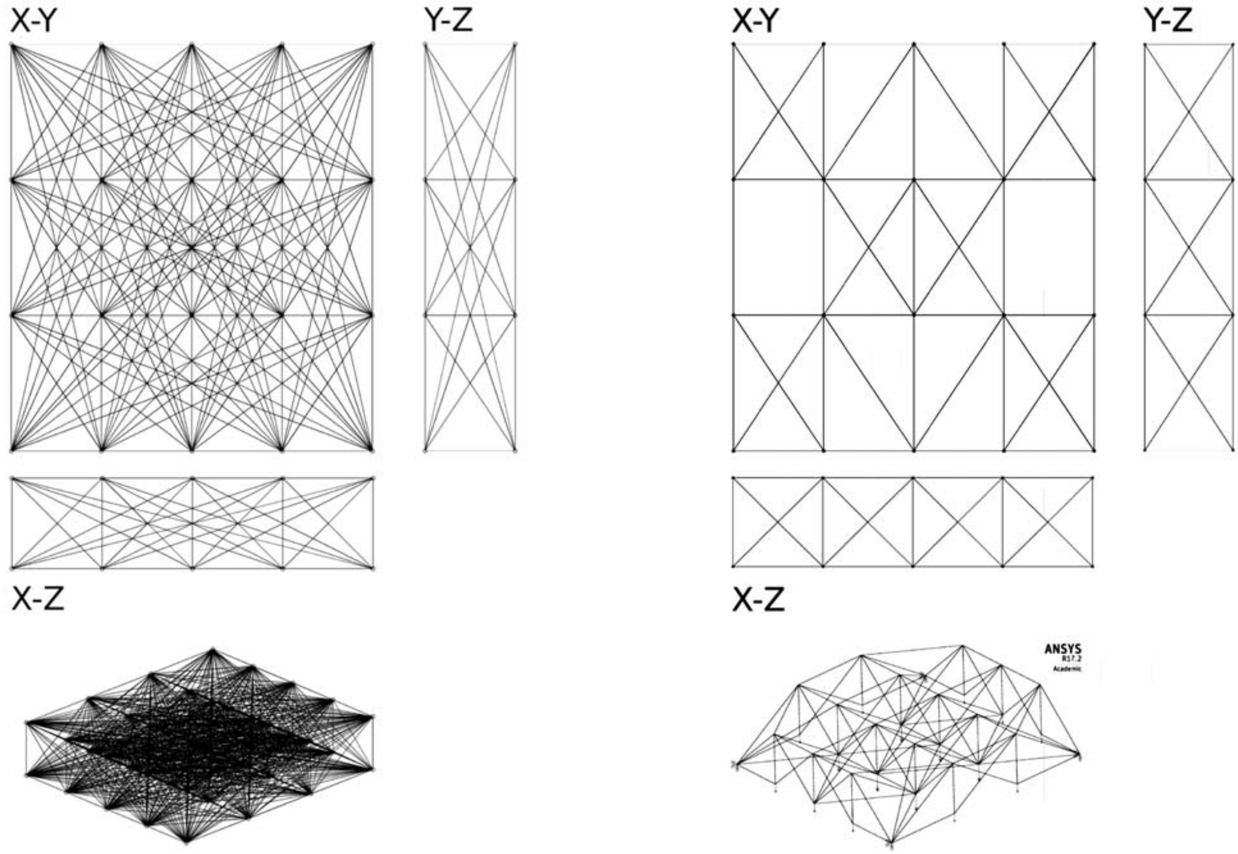


**Рис. 6. Структурная плита с ячейками 2 × 3 м. Слева показан полный граф системы и его проекции, справа – редуцированный граф**

которая позволяет генерировать из распределений ряд выборок. Тогда задача (1) решается для каждой выборки. Общий алгоритм решения приведен на рис. 4. Результатом выполнения представленного алгоритма будет множество наборов площадей сечений и моментов инерции стержней по каждой выборке (см. таблицу). Такое развернутое решение малоприменимо на практике. А так как формы распределений неизвестны, для нахождения доверительного интервала каждого параметра стержня предлагается использовать процедуру статистического бутстрэпа, применение которой позволяет представить приведенные выше данные в виде доверительного интервала. Например, среднее значение момента инерции относительно оси $Z$ $i$-го стержня будет иметь форму $(1 - \alpha)$ % доверительного интервала.

На рис. 5 проиллюстрирована эта идея: после сэмплирования и решения задачи (1) для стержня системы получено распределение одного из моментов инерции стержня; бутстрэп позволяет оценить статистику данного распределения, например, среднее или 0.9-квантиль.

**Выводы**.

В статье рассмотрен алгоритм, позволяющий решать задачу поиска эффективной топологии любых стержневых систем, в том числе при нагрузках, заданных в виде статистических распределений (эмпирических или теоретических). Предложенное решение дает возможность определить как саму топологию конструкции (конструктивную схему), так и параметры сечений стержней, входящих в ее состав; при этом гарантируется выполнение условий прочности и устойчивости. В целом же, круг решаемых задач весьма обширен: это и разнообразные ферменные системы, и пространственные конструкции типа куполов и структурных плит (рис. 6).


**[1]** *Баничук Н.В.* Введение в оптимизацию конструкций. – М.: Наука, 1986. – 303 с.

**[2]** *Ben-Tal A., Nemirovski A.* Robust truss topology design via semidefinite programming // SIAM Journal on optimization. – 1997. – Vol. 7, no. 4. – P. 991–1016.

**[3]** *Валуйских В.П.* Статистические методы оптимального проектирования конструкций. – Владимир: Владим. гос. ун-т, 2001. – 156 с.

**[4]** *Пермяков В.А.* Современное состояние проблемы оптимального проектирования стальных конструкций // Металеві конструкції. – 1998. – №1. – С. 17–20.

**[5]** *Трофимович В.В., Пермяков В.А.* Оптимизация металлических конструкций. – К.: Вища шк., 1983. – 199 с.

**[6]** *Гринев В.Б.* Оптимизация элементов конструкции по механическим характеристикам. – К.: Наук. думка, 1975. – 294 с.

**[7]** *Серпик И.Н., Алексейцев А.В., Лелетко А.А.* Генетические алгоритмы оптимизации металлических строительных конструкций. – Брянск: Изд-во БГИТА, 2010.

**[8]** ДБН В.2.6-163:2010. Сталеві конструкції. Норми проектування, виготовлення і монтажу. – К.: Мінрегіонбуд України, 2011. – 127 с.

**[9]** *Пермяков В.О., Юрченко В.В., Пелешко І.Д.* Оптимальне проектування металевих стержневих конструкцій на базі гібридного генетичного алгоритму // Ресурсоекономні матеріали, конструкції, будівлі та споруди: зб. наук. пр. – Рівне: НУВГП, 2008. – Вип. 16. Ч.2. – С. 303–310.

**[10]** *Бараненко В.О.* Багатокритеріальні задачі синтезу ШСС та динамічне програмування // Вісник ПДАБіА: Науковий та інформаційний бюлетень. Дніпропетровськ. – 2000. № 10. – С. 4–12.

**[11]** *Почтман Ю.М., Бараненко В.А.* Динамическое программирование в задачах строительной механики. – М.: Стройиздат, 1975. 110 с.

**[12]** *Бараненко В.А., Почтман Ю.М., Филатов Г.В.* О совместном использовании методов динамического программирования и случайного поиска в задачах оптимального проектирования//Строительная механика и расчет сооружений. – 1973. – № 2. – С. 3–6.

**[13]** *Бараненко В.* Оптимальне проектування ферм в умовах нечіткості завдання навантаження на основі моделей очікуваного значення і динамічного програмування // Theoretical Foundation of Civil Engineering. XIV Ed. by W. Szezses'niak, OP PW. – Warsaw, 2006. – P. 495–498.

**[14]** *Пічугін С.Ф., Махінько А.В.* Імовірнісна процедура підбору поперечного перерізу сталевих прогонів за критерієм міцності і жорсткості // Ресурсоекономні матеріали, конструкції, будівлі та споруди: зб. наук. пр. – Рівне: НУВГП, 2003. Вип. 10. – С. 155–163.


*Надійшла 10.05.2017 р.*