УДК 338.24; 519.86

Тадеєв Ю. П.

ЕКОЛОГО-ЕКОНОМІЧНА МОДЕЛЬ ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ З ЛІНІЙНОЮ ФУНКЦІЄЮ КОРИСНОСТІ

У роботі досліджена еколого-економічна модель оптимального керування з лінійною функцією корисності. Модель враховує інвестиції у виробничі фонди, в інтелектуальний капітал як складову частину людського капіталу та в охорону навколишнього середовища. Серед множини можливих стаціонарних станів рівноваги детально досліджено чотири стани, що задовольняють необхідні умови оптимальності: рівновага «золотого віку», рівновага «інтелектуального віку», рівновага «екологічного віку» та рівновага «темного віку».
Ключові слова: динамічна еколого-економічна модель, лінійна функція корисності, інвестиції у виробничий капітал, інвестиції в інтелектуальний капітал, інвестиції в охорону навколишнього середовища, модель оптимального керування, стани рівноваги диференціальних рівнянь
Формул: 26. *Бібл.*: 4.

Тадеєв Юрій Петрович – кандидат економічних наук, доцент, докторант, кафедра математичної інформатики, Київський національний університет ім. Т. Шевченка (вул. Володимирська, 60, Київ, 01601, Україна)

УДК 338.24; 519.86

Тадеев Ю. П.

ЭКОЛОГО-ЭКОНОМИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ С ЛИНЕЙНОЙ ФУНКЦИЕЙ ПОЛЕЗНОСТИ

В работе исследована эколого-экономическая модель оптимального управления с линейной функцией полезности. Модель учитывает инвестиции в производственные фонды, в интеллектуальный капитал как часть человеческого капитала и в охрану окружающей среды. Среди множества возможных стационарных состояний равновесия детально исследованы четыре состояния, удовлетворяющие необходимые условия оптимальности: равновесие «золотого века», равновесие «интеллектуального века», равновесие «экологического века» и равновесие «темного века».
Ключевые слова: динамическая эколого-экономическая модель, линейная функция полезности, инвестиции в производственный капитал, инвестиции в интеллектуальный капитал, инвестиции в охрану окружающей среды, модель оптимального управления, состояния равновесия дифференциальн
Формул: 26. *Библ.*: 4.

Тадеев Юрий Петрович – кандидат экономических наук, доцент, докторант, кафедра математической информатики, Киевский национальный университет им. Т. Шевченко (ул. Владимирская, 60, Киев, 01601, Украина)

UDC 338.24; 519.86

Tadeyev Y. P.

ECOLOGICAL AND ECONOMIC MODEL OF OPTIMAL MANAGEMENT WITH THE LINEAR FUNCTION OF USEFULNESS

The article studies an ecological and economic model of optimal management with the linear function of usefulness. The model takes into account investments into production funds, into intellectual capital as a part of human capital, and into protection of environment. Among a multitude of possible stationary equilibrium states the article studies in detail four states that satisfy necessary conditions of optimality: equilibrium of the golden age, equilibrium of the intellectual age, equilibrium of the ecological age and equilibrium of the dark age.
Key words: dynamic ecological and economic model, linear function of usefulness, investments into production capital, investments into intellectual capital, investments into protection of environment, model of optimal management, state of equilibrium of differential
Formulae: 26. *Bibl.*: 4.

Tadeyev Yuriy P. – Candidate of Sciences (Economics), Associate Professor, Candidate on Doctor Degree, Department of Mathematical Informatics, Kyiv National University named after T. Shevchenko (vul. Volodymyrska, 60, Kyiv, 01601, Ukraine)

Вступ. На шляху до сталого розвитку економіки моделювання процесів еколого-економічної взаємодії набуває особливо важливого значення, бо досягнення такого розвитку є принципово неможливим без певного компромісу між економічною то соціально-екологічною підсистемами. Будемо розглядати модель максимізації суспільної корисності, де процеси виробництва супроводжуються викидами у зовнішнє навколишнє середовище. Оскільки головним джерелом забруднення є сучасне виробництво, то вивчення можливостей контролю над забрудненням відбувається в рамках теорії виробничих функцій.

Постановка задачі. Візьмемо за основу модель еколого-економічної динаміки, запропоновану в роботі [1], та введемо додатково до розгляду інтелектуальну складову людського капіталу:

$$
\begin{aligned}
&W=\int_0^T u\big(c(t),p(t)\big)e^{-\delta t}dt \to \max,\\
&\dot{K}=(1-\alpha-\beta-\gamma)F(K,L)-\mu K,\quad K(0)=K_0,\\
&\dot{L}=\beta F(K,L)-\nu\big(L-\overline{L}\big),\quad L(0)=L_0,\quad \overline{L}=const>0,\\
&\dot{p}=(\varepsilon-r\gamma)F(K,L)-\varphi p,\quad p(0)=p_0,\\
&c=\alpha F(K,L),\\
&\alpha(t)\ge 0,\quad \beta(t)\ge 0,\quad \gamma(t)\ge 0,\\
&0\le\alpha(t)+\beta(t)+\gamma(t)\le 1.
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Наведемо необхідні пояснення щодо моделі (1):

- критерієм оптимальності в моделі є інтеграл від функції суспільної корисності з урахуванням дисконтування;
- виробництво описується двофакторною однопродуктовою виробничою функцією $Y=F(K,L)$;

- вироблена продукція Y використовується для споживання c; для інвестування виробничого капіталу K; для інвестування інтелектуального капіталу $(L-\bar{L})$, де L – загальний людський капітал, $\bar{L}$ – проста праця; а також для охорони навколишнього середовища, що має забруднення p;
- інвестування фізичного капіталу йде як на розширення виробництва $\dot{K}$, так і на відновлення зношеного капіталу μK, що описується нормою амортизації $\mu > 0$;
- інвестування інтелектуального капіталу йде як на розширення трудових ресурсів $\dot{L}$, так і на відновлення зношення інтелектуально активної частини трудових ресурсів $\nu(L-\bar{L}) \geq 0$, де $L_0 = const$, а $\nu > 0$ – норма амортизації;
- об'єм забруднення $p = \varepsilon Y$, $0 < \varepsilon < 1$ вимірюється в одиницях основної продукції при цьому частина відходів виробництва асимілюється середовищем з темпом $-\varphi(\varphi > 0)$, а для зменшення забруднення на одну одиницю витрачається $1/r(r > 1)$ одиниць продукції.

Модель (1) є задачею оптимального керування, яка полягає в належному виборі частин випуску, які використовуються на споживання (αY), на інвестування інтелектуального капіталу (βY), на боротьбу з забрудненням (γY) та на інвестування фізичного капіталу $((1-\alpha-\beta-\gamma)Y)$.

Конкретизуємо модель (1) і зробимо наступні припущення:

1) функція суспільної корисності лінійна:

$$u(c,p) = c - Ap,$$

де $A > 0$ – параметр, який характеризує відносну корисність від знищення одиниці забруднень у порівнянні з корисністю від споживання одиниці продукції;

2) виробничу функцію будемо вважати лінійно-однорідною, тобто такою, для якої виконується умова [2]:

$$F(\lambda K, \lambda L) = \lambda F(K,L), \quad \lambda > 0.$$

При даних припущенням одержуємо таку модель оптимального керування:

$$\begin{aligned}
&W = \int_0^T \left[\alpha F(K,L) - Ap(t)\right] e^{-\delta t} dt \to \max,\\
&\dot{K} = (1-\alpha-\beta-\gamma)F(K,L) - \mu K, \quad K(0) = K_0,\\
&\dot{L} = \beta F(K,L) - \nu\left(L-\bar{L}\right), \quad L(0) = L_0, \quad \bar{L} = const > 0,\\
&\dot{p} = (\varepsilon - r\gamma)F(K,L) - \varphi p, \quad p(0) = p_0,\\
&\alpha(t) \geq 0, \quad \beta(t) \geq 0, \quad \gamma(t) \geq 0, \quad 0 \leq \alpha(t) + \beta(t) + \gamma(t) \leq 1.
\end{aligned} \tag{2}$$

Результати дослідження. Для розв'язання поставленої задачі оптимального керування (2) використаємо принцип максимуму Понтрягіна. Для цього введемо спряжені змінні ψ_1, ψ_2, ψ_3 («тіньові» ціни або об'єктивно зумовлені оцінки основного капіталу $K(t)$, інтелектуального капіталу $L(t)$ та забруднення $p(t)$ відповідно).

Введемо замість ψ_1, ψ_2, ψ_3 нові змінні $q_1 = \psi_1 e^{\delta t}$, $q_1 = \psi_1 e^{\delta t}, q_2 = \psi_2 e^{\delta t}, q_3 = \psi_3 e^{\delta t}$. В цих змінних гамільтоніан запишеться у вигляді:

$$\begin{aligned}
H = e^{-\delta t}[&\alpha F(K,L) - Ap + q_1\left((1-\alpha-\beta-\gamma)F(K,L) - \mu K\right) +\\
&+ q_2\left(\beta F(K,L) - \nu\left(L-\bar{L}\right)\right) + q_3\left((\varepsilon - r\gamma)F(K,L) - \varphi p\right)]
\end{aligned}$$

або

$$\begin{aligned}
H = e^{-\delta t}[&\alpha(1-q_1)F(K,L) - \beta\left(q_1-q_2\right)F(K,L) - \gamma\left(q_1+q_3 r\right)F(K,L) - Ap +\\
&+ q_1\left[F(K,L) - \mu K\right] - q_2\nu\left(L-\bar{L}\right) + q_3\left(\varepsilon F(K,L) - \varphi p\right)].
\end{aligned} \tag{3}$$

Згідно з принципом максимуму, оптимальні керування $\alpha(t), \beta(t), \gamma(t)$ надають максимального значення гамільтоніану H, а функції $q_1(t), q_2(t), q_3(t)$ є розв'язками такої системи диференціальних рівнянь:

$$\begin{aligned}
&\dot{q}_1 = -\alpha\frac{\partial F}{\partial K} + q_1\left[\delta + \mu - (1-\alpha-\beta-\gamma)\frac{\partial F}{\partial K}\right] - q_2\beta\frac{\partial F}{\partial K} + q_3(r\gamma - \varepsilon)\frac{\partial F}{\partial K},\\
&\dot{q}_2 = -\alpha\frac{\partial F}{\partial L} - q_1(1-\alpha-\beta-\gamma)\frac{\partial F}{\partial L} + q_2\left(\delta + \nu - \beta\frac{\partial F}{\partial L}\right) + q_3(r\gamma - \varepsilon)\frac{\partial F}{\partial L},\\
&\dot{q}_3 = A + q_3(\delta + \varphi).
\end{aligned} \tag{4}$$

З виразу (3) бачимо, що функціонал H набуває максимального значення по α, β, γ разом з лінійною функцією

$$h(\alpha,\beta,\gamma) = \eta\alpha + \theta\beta + \omega\gamma, \tag{5}$$

де $\eta = (1-q_1)F(K,L)$, $\theta = -(q_1-q_2)F(K,L)$, $\omega = -(q_1+q_3 r)F(K,L)$.

При цьому α, β, γ змінюються в одиничному симплексі

$$\Delta = \{(\alpha,\beta,\gamma) : \alpha \geq 0, \beta \geq 0, \gamma \geq 0, \alpha+\beta+\gamma \leq 1\}.$$

Аналіз виразу (5) приводить до висновку щодо $\max\limits_{\Delta} h(\alpha,\beta,\gamma)$:

1) якщо $\eta > 0$, або $\theta > 0$ або $\omega > 0$, то $\max\limits_{\Delta} h(\alpha,\beta,\gamma)$ досягається при $\alpha+\beta+\gamma = 1$;
2) якщо $\eta < 0$, $\theta < 0$, $\omega < 0$ то $\max\limits_{\Delta} h(\alpha,\beta,\gamma)$ досягається при $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$ відповідно;
3) якщо $\eta = 0$, $\theta = 0$, $\omega = 0$, то максимум досягається при $\alpha \in [0,1]$, , $\beta \in [0,1]$, , $\gamma \in [0,1]$ відповідно.

Повний аналіз оптимальних траєкторій даної моделі провести досить складно. Тому, дослідимо стани рівноваги або траєкторії збалансованого зростання, які задовольняють необхідні умови оптимальності.

Стани рівноваги (стаціонарні розв'язки) знаходимо з умов $\dot{K} = 0, \dot{L} = 0, \dot{p} = 0$, тобто

$$\begin{aligned}
&(1-\alpha-\beta-\gamma)F(K,L) - \mu K = 0,\\
&\beta F(K,L) - \nu\left(L-\bar{L}\right) = 0,\\
&(\varepsilon - r\gamma)F(K,L) - \varphi p = 0.
\end{aligned} \tag{6}$$

Оскільки $K, L, \mu > 0$, то з першого рівняння системи (6) одержуємо: сума $\alpha+\beta+\gamma$ є сталою і $\alpha+\beta+\gamma < 1$.. Отже, $\alpha < 1$, $\beta < 1$, $\gamma < 1$ і можуть виконуватись лише випадки 2) та 3). Друге рівняння системи (6) дозволяє зробити висновок: в точці рівноваги або $\beta=0$ і $L^*=\overline{L}$, або $L^*>\overline{L}$ і $\beta>0$ є сталою величиною. Третє рівняння системи (6) дозволяє зробити висновок, що γ є сталою величиною, причому $\gamma<\varepsilon/r$, де $r>1, \varepsilon<1$. Отже з системи (6) випливає, що α, β, γ є сталими величинами, причому $\alpha+\beta+\gamma<1$.

Оскільки в подальшому нас цікавить лише випадок $0<\alpha<1$, то це можливо лише тоді, коли $\eta=(1-q_1)F(K,L)=0$, тобто коли $q_1(t)=1$. Тоді система диференціальних рівнянь (4) набуде вигляду

$$\begin{aligned} &0=\delta+\mu-(1-\beta-\gamma)\frac{\partial F}{\partial K}-q_2\beta\frac{\partial F}{\partial K}+q_3(r\gamma-\varepsilon)\frac{\partial F}{\partial K},\\ &\dot{q}_2=-(1-\beta-\gamma)\frac{\partial F}{\partial L}+q_2\left(\delta+\nu-\beta\frac{\partial F}{\partial L}\right)+q_3(r\gamma-\varepsilon)\frac{\partial F}{\partial L},\\ &\dot{q}_3=A+q_3(\delta+\varphi). \end{aligned} \quad (7)$$

Розглянемо тепер чотири цікаві можливі випадки.

1. Випадок рівноваги «золотого віку» (за термінологією роботи [1]), коли здійснюються витрати як на споживання так і на інвестування фізичного та інтелектуального капіталів, і на очищення навколишнього середовища ($\alpha\neq0, \beta\neq0, \gamma\neq0$). Відповідний стан рівноваги (K^*, L^*, p^*) характеризується помірними рівнями фізичного та інтелектуального капіталів, споживання та забруднення і можливий при $\theta=0$ та $\omega=0$.

При $\theta=0$ маємо $q_2(t)=q_1(t)$. Тоді з перших двох рівнянь системи (7) випливає, що $q_3(t)=const$, а з третього рівняння, що

$$q_3=-\frac{A}{\delta+\varphi}. \quad (8)$$

При $\omega=0$ маємо

$$q_3=-\frac{1}{r}, \quad (9)$$

тому з першого та другого рівнянь системи (7) випливає, що

$$\frac{\partial F}{\partial K}=\frac{\delta+\mu}{1-\varepsilon r^{-1}},\quad \frac{\partial F}{\partial L}=\frac{\delta+\nu}{1-\varepsilon r^{-1}}. \quad (10)$$

З рівностей (8) та (9) випливає

$$A=\frac{\delta+\varphi}{r}, \quad (11)$$

що свідчить про необхідну узгодженість між параметрами моделі (2) і дає значення для коефіцієнта відносної корисності від знищення одиниці забруднення порівняно з одиницею споживання продукції. Лише при такій умові може існувати оптимальний розв'язок, названий рівновагою «золотого віку».

Оскільки виробнича функція $F(K,L)$ є лінійно однорідною, то для неї виконується теорема Ейлера [2]:

$$F(K,L)=\frac{\partial F}{\partial K}K+\frac{\partial F}{\partial L}L. \quad (12)$$

Співвідношення (10) дають числові значення похідних $\frac{\partial F}{\partial K}$ та $\frac{\partial F}{\partial L}$ в точці оптимуму (K^*, L^*) Отже, для цієї точки маємо рівняння

$$F(K^*,L^*)=\frac{(\delta+\mu)K^*+(\delta+\nu)L^*}{1-\varepsilon r^{-1}}. \quad (13)$$

Звідси одержуємо

$$F(1,z^*)=\frac{\delta+\mu+(\delta+\nu)z^*}{1-\varepsilon r^{-1}},\quad z^*=\frac{L^*}{K^*}. \quad (14)$$

З неокласичних властивостей виробничої функції $F(K,L)$ випливає, що рівняння (14) може мати один розв'язок, два розв'язки або не мати розв'язку. В останньому випадку це означає, що рівноваги «золотого віку» не існує. Два розв'язки характеризують два режими «золотої» рівноваги – капіталомісткий та трудомісткий.

Звернемо увагу на систему (6). Це система для визначення числових параметрів α, β, γ при відомих значеннях (K^*, L^*, p^*). Особливістю є те, що величини K^*, L^* та p^* в системі (6) зустрічаються лише у вигляді L^*/K^* та p^*/K^*. Отже, оптимальний розв'язок якщо він існує, є магістраллю виду

$$\frac{L(t)}{K(t)}=\frac{L^*}{K^*}=const,\quad \frac{p(t)}{K(t)}=\frac{p^*}{K^*}=const. \quad (15)$$

2. Випадок рівноваги «інтелектуального віку», коли маємо витрати на споживання, на інвестування фізичного та інтелектуального капіталів, але витрати на очищення навколишнього середовища від забруднень не здійснюються $(\alpha\neq0, \beta\neq0, \gamma=0)$. Відповідний стан рівноваги (K^*, L^*, p^*) характеризується помірними рівнями фізичного та інтелектуального капіталів, споживання, але високим рівнем забруднення. Цей стан можливий при $\theta=0$ та $\omega<0$.

При $\theta=0$ маємо $q_2(t)=q_1(t)=1$. З системи (7) випливає, що $q_3(t)=const$. Отже, система (7) при $\gamma=0$ набуде вигляду

$$\frac{\partial F}{\partial K}=\frac{\delta+\mu}{1-\varepsilon r^{-1}(\delta+\varphi)},\quad \frac{\partial F}{\partial L}=\frac{\delta+\nu}{1-\varepsilon r^{-1}(\delta+\varphi)}, \quad (16)$$

$$q_3=-\frac{A}{\delta+\varphi}. \quad (17)$$

Умова $\omega<0$ набуде вигляду

$$A<\frac{\delta+\varphi}{r}, \quad (18)$$

що можна розглядати як необхідну умову існування оптимального розв'язку, названого рівновагою «інтелектуального віку».

Співвідношення (16) дають числові значення похідних $\frac{\partial F}{\partial K}$ та $\frac{\partial F}{\partial L}$ в точці оптимуму (K^*, L^*). Тоді маємо

$$F(K^*,L^*)=\frac{(\delta+\mu)K^*+(\delta+\nu)L^*}{1-\varepsilon r^{-1}(\delta+\varphi)},$$

звідки одержуємо

$$F(1,z^*)=\frac{\delta+\mu+(\delta+\nu)z^*}{1-\varepsilon r^{-1}(\delta+\varphi)},\quad z^*=\frac{L^*}{K^*}. \quad (19)$$

З неокласичних властивостей виробничої функції $F(K,L)$ випливає, що рівняння (19) може мати один розв'язок, два розв'язки або не мати розв'язку.

З системи (6) визначаються числові значення параметрів α та β, а також $p^*(t)$. При цьому всі змінні зустрічаються лише у вигляді L^*/K^* та p^*/K^*. Тоді оптимальний розв'язок якщо він існує, є магістраллю виду

$$\frac{L(t)}{K(t)}=\frac{L^*}{K^*}=const,\quad \frac{p(t)}{K(t)}=\frac{p^*}{K^*}=const. \qquad (20)$$

3. Випадок рівноваги «екологічного віку», коли маємо витрати на споживання, на інвестування фізичного капіталу та на очищення навколишнього середовища, але ніяких витрат на інвестування інтелектуального капіталу не здійснюються $(\alpha\neq 0,\beta=0,\gamma\neq 0)$. Відповідний стан рівноваги (K^*,L^*,p^*) характеризується помірними рівнями фізичного капіталу, споживання, забруднення навколишнього середовища, але нульовим рівнем інтелектуалізації праці. Цей стан можливий при $\theta<0$ та $\omega=0$.

При $\omega=0$ маємо $q_3(t)=-\frac{1}{r}$ і з системи (7) випливає, що $q_2(t)=const$. Тоді система (7) при $\beta=0$ набуде вигляду

$$\frac{\partial F}{\partial K}=\frac{\delta+\mu}{1-\varepsilon r^{-1}},\quad \frac{\partial F}{\partial L}=\frac{\delta+\nu}{1-\varepsilon r^{-1}}, \qquad (21)$$

$$A=\frac{\delta+\varphi}{r}. \qquad (22)$$

Умова $\theta<0$ набуде вигляду $q_2<1$ і безпосередньої участі в подальшому аналізі не бере.

Числові значення похідних $\frac{\partial F}{\partial K}$ та $\frac{\partial F}{\partial L}$ в точці оптимуму $(K^*,L^*=\bar{L})$ дозволяє одержати рівняння для визначення K^*, а саме

$$F(K^*,\bar{L})=\frac{(\delta+\mu)K^*+(\delta+\nu)\bar{L}}{1-\varepsilon r^{-1}},$$

звідки маємо

$$F(1,z^*)=\frac{\delta+\mu+(\delta+\nu)z^*}{1-\varepsilon r^{-1}},\quad z^*=\frac{\bar{L}}{K^*}. \qquad (23)$$

Рівняння (23) може мати один розв'язок, два розв'язки або не мати розв'язку.

З системи (6) визначаються числові значення параметрів α та γ, а також $p^*(t)$.

4. Випадок рівноваги «темного віку», коли ніяких витрат на інвестування інтелектуального капіталу та на боротьбу із забрудненням навколишнього середовища не здійснюються. Такий стан характеризується високим рівнем виробництва (великий обсяг фізичного капіталу), високим рівнем споживання, але й дуже високим рівнем забруднення. Рівень інтелектуального капіталу нульовий $(L^*=\bar{L})$, а рівень забруднення регулюється лише природними процесами із заданим темпом зниження $\varphi=-\dot{p}/p$. У нас $\alpha\neq 0,\beta=0,\gamma=0$. Цей стан можливий при $\theta<0$ та $\omega<0$.

З першого рівняння системи (7) при $\beta=0$ та $\gamma=0$ одержуємо співвідношення

$$\frac{\partial F}{\partial K}=\frac{\delta+\mu}{1+\varepsilon q_3(t)}, \qquad (24)$$

де $q_3(t)$ визначається як розв'язок диференціального рівняння

$$\dot{q}_3(t)=A+q_3(t)(\delta+\varphi), \qquad (25)$$

що задовольняє умову $\omega<0$, тобто $1+q_3r>0$.

Таким чином, для визначення числового параметра α, а також оптимальних значень K^*,L^* та p^* маємо систему рівнянь (24), (25) та рівняння

$$(1-\alpha)F(K,L)-\mu K=0,\quad L=\bar{L},\quad \varepsilon F(K,L)-\varphi p=0. \qquad (26)$$

Висновок. Таким чином, в роботі побудована нова модель оптимального керування, що враховує інвестиції у виробничі фонди, в інтелектуальний капітал та в охорону навколишнього середовища. Досліджені чотири важливі стани рівноваги, що задовольняють необхідні умови оптимальності. Показано, що у випадку лінійної функції корисності та лінійно однорідної виробничої функції оптимальні рівноваги «золотого віку», «інтелектуального віку», «екологічного віку» та «темного віку» існують не завжди,а лише при спеціальних комбінаціях числових параметрів моделі.

ЛІТЕРАТУРА

1. Keeler E. The optimal control of pollution / E. Keeler, M. Spence, R. Zeckhauser // Journal of Economic Theory. – 1972. – Vol. 4. – P. 13–34.
2. Пономаренко О. І. Сучасний економічний аналіз: у 2 ч. Ч. 2. Макроекономіка : [навч. посібник] / О. І Пономаренко, М. О. Перестюк, В. М. Бурим. – К. : Вища школа, 2004. – 207 с.
3. Барро Дж. Экономический рост / Р. Дж. Барро, Х. Сала-и-Мартин: [пер. с англ.] – М. : БИНОМ; Лаборатория знаний, 2010. – 824 с.
4. Григорків В. С. Оптимальне керування в економіці: [навч. посібник] / В. С. Григорків. – Чернівці : Чернівецький нац. ун-т, 2011. – 200 с.

REFERENCES

Barro, R. Dzh., and Sala-i-Martin, Kh. Ekonomicheskiy rost [Economic growth.]. Moscow: BINOM; Laboratoriia znaniy, 2010.

Hryhorkiv, V. S. Optymalne keruvannia v ekonomitsi [Optimal control of the economy]. Chernivtsi: Chernivetskyi nats. un-t, 2011.

Ponomarenko, O., Perestiuk, M. O., and Burym, V. M. Suchasnyi ekonomichnyi analiz [Modern economic analysis]. Kyiv: Vyshcha shkola, 2004.

Keeler, E., Spence, M., and Zeckhauser, R. «The optimal control of pollution» Journal of Economic Theory. vol. 4. (1972): 13–34.