

Особенности релаксации магнонов в легкоплоскостном антиферромагнетике в рамках сигма-модели

В.И. Бутрим

Таврический национальный университет им. В.И. Вернадского, г. Симферополь, 95007, Украина
E-mail: butrimv@mail.ru

Б.А. Иванов

Институт магнетизма НАН Украины, ул. Вернадского, 366, г. Киев, 03142, Украина
E-mail: bivanov@i.com.ua

Статья поступила в редакцию 17 апреля 2012 г.

Показано, что для анизотропной сигма-модели с анизотропией типа легкая плоскость имеет место аномальное поведение затухания квазичастиц (магнонов). Для безактивационных элементарных возбуждений с линейным законом дисперсии при малых волновых векторах затухание пропорционально четвертой степени частоты (а не квадрату, как для стандартных голдстоуновских квазичастиц, например для чисто изотропной сигма-модели), что можно назвать «сверхголдстоуновским» поведением затухания. Затухание второй ветви квазичастиц, обладающих конечной активацией, при малых волновых векторах имеет, как обычно, конечное значение, но также содержит особенность, так как при низких температурах зависит от температуры степенным образом и не содержит экспоненциально малого температурного множителя.

Показано, що для анізотропної сигма-моделі з анізотропією типу легка площина має місце аномальна поведінка загасання квазічастинок (магнінів). Для безактиваційних елементарних збуджень з лінійним законом дисперсії при малих хвильових векторах загасання пропорційно четвертій степені частоти (а ні квадрату, як для стандартних голдстоунівських квазічастинок, наприклад для чисто ізотропної сигма-моделі), що може бути названо «понадголдстоунівською» поведінкою загасання. Загасання другої гілки квазічастинок, які мають скінчену активацію, при малих хвильових векторах має, як звичайно, скінчене значення, але також має особливість, оскільки при малих температурах залежить від температури степенним чином і не містить експоненціально малого температурного множника.

PACS: 75.10.Jm Квантовые спиновые модели;
75.10.Hk Классические спиновые модели.

Ключевые слова: анизотропная сигма-модель, релаксация магнонов, голдстоуновские квазичастицы, антиферромагнетик, спиновый нематик.

1. Введение

Основой явления магнитного упорядочения является обменное взаимодействие спинов (локализованных атомных спинов или спинов коллективизированных электронов), и для теоретического описания статических и динамических свойств различных магнетиков (ферромагнетиков и антиферромагнетиков, ферритов) может использоваться микроскопический подход, основанный на соответствующем спиновом гамильтониане (см. оригинальные работы [1,2] и обзоры [3,4]).

Однако большая часть известных результатов в физике ферромагнетиков получена в рамках феноменологического подхода, основанного на использовании уравнения Ландау–Лифшица [5,6]. Оказалось, что это уравнение, эффективно используемое уже почти восемьдесят лет, обладает свойством универсальности, оно применимо как для магнетиков с локализованными спинами, так и для проводящих ферромагнетиков, в которых важен учет спинов коллективизированных электронов. Не менее важно, что это уравнение применимо и для опи-

сания низкочастотной динамики суммарного магнитного момента ферримагнетиков, материалов с несколькими неэквивалентными подрешетками [7]. Впоследствии выяснилось, что оно применимо и для описания низкочастотной динамики аморфных ферромагнетиков с неполным насыщением спинов [8]. В первых работах по описанию динамики антиферромагнетиков также была использована система уравнений Ландау–Лифшица, записанных для намагниченностей отдельных подрешеток [5,9–11]. Поскольку в этом подходе используются два сложных нелинейных уравнения, он оказался достаточно громоздким.

Существенный прогресс в описании динамических свойств антиферромагнетиков был достигнут на базе использования сигма-модели для единичного (нормированного) вектора антиферромагнетизма $\mathbf{I} = \mathbf{L}/|\mathbf{L}|$, где $\mathbf{L} = \mathbf{M}_1 - \mathbf{M}_2$, \mathbf{M}_1 , \mathbf{M}_2 — векторы намагниченностей подрешеток. Уравнения сигма-модели могут быть получены из системы уравнений Ландау–Лифшица для намагниченностей подрешеток [12,13] или непосредственно с использованием магнитной симметрии антиферромагнетика [8]. Возможность симметричного обоснования (фактически, столь же общего, как для уравнения Ландау–Лифшица для намагниченности ферромагнетика) демонстрирует универсальность сигма-модели [8]. Относительная простота анализа сигма-модели, обладающей (в отсутствие внешнего магнитного поля) формальной лоренц-инвариантностью, позволила провести полный анализ экспериментальных данных по нелинейной динамике доменных стенок, описать широкий класс магнитных солитонов [14–16] и исследовать эффекты макроскопического квантового туннелирования [11,16,17–19]. Далее выяснилось, что область применимости сигма-модели еще шире и включает другие примеры систем, для которых нет спонтанной намагниченности, в частности спиновых нематиков [20]. Поэтому исследование различных свойств сигма-модели представляет интерес для физики магнетиков.

В последние годы интерес к анализу динамических свойств антиферромагнетиков существенно вырос. Причина этого состоит, прежде всего, в развитии новой экспериментальной техники, дающей возможность нетеплового возбуждения спиновых колебаний (в том числе нелинейных колебаний) для прозрачных антиферромагнетиков под действием субпикосекундных лазерных импульсов [21]. Такое возбуждение реализовано как для антиферромагнетиков со слабым ферромагнетизмом [22], так и для материалов типа оксида никеля, в которых взаимодействие Дзялошинского отсутствует [23]. Возможно возбуждение как низкочастотных, так и высокочастотных колебаний в диапазоне терагерц, при этом надежно измеряются не только частоты, но и диссипативные характеристики спиновых колебаний [23]. Для антиферромагнетиков со слабым ферромагнетизмом на основе сигма-модели был

обоснован инерционный механизм динамической переориентации спинов, который характеризуется рекордно малым временем переключения [24]. С точки зрения приложений интересно, что характерные частоты антиферромагнетиков попадают в терагерцовый диапазон и можно реализовать «сверхбыструю» (по сравнению с ферромагнетиками) спиновую динамику и создать магнитные твердотельные СВЧ приборы терагерцового диапазона. Все это делает анализ спиновой динамики и релаксации антиферромагнетиков на основе сигма-модели актуальным для фундаментальной физики магнетиков и важной для приложений.

Настоящая работа посвящена исследованию затухания элементарных возбуждений для анизотропной сигма-модели с магнитной анизотропией типа «легкая плоскость». Для антиферромагнетиков, описываемых такой моделью, существует низкочастотная ветвь магнонов, которая хорошо исследована различными методами. Затухание магнонов для этой системы изучалось теоретически на основе представления Голдстейна–Примакова [25], примененного к различным подрешеткам, что эквивалентно использованию системы двух уравнений Ландау–Лифшица для намагниченностей подрешеток. Расчеты в рамках этой схемы достаточно громоздки, и их обобщение для учета реальной магнитной симметрии магнетика затруднительно. Сигма-модель допускает простое введение операторов рождения и уничтожения квазичастиц (для краткости будем далее называть их магнонами) и позволяет провести анализ релаксации как линейных, так и нелинейных спиновых возбуждений. Релаксация магнонов в изотропной сигма-модели исследована в работе [26], в которой также проведено сравнение результата с полученными ранее данными для гейзенберговского антиферромагнетика. Для изотропного случая характерно существование двух вырожденных по поляризации ветвей спектра магнонов с безактивационным законом дисперсии $\omega_k = ck$, c — фазовая скорость магнона, $k = |\mathbf{k}|$, \mathbf{k} — волновой вектор магнона. Показано, что в этом случае затухание обусловлено процессами рассеяния только с участием магнонов разных поляризаций, и при малых k декремент затухания ведет себя стандартным голдстоуновским образом, $\gamma_k \propto \omega_k^2$.

Анизотропная сигма-модель с двухосной анизотропией использовалась авторами [27] для описания ромбического антиферромагнетика типа ортоферрита. Для этой модели характерно наличие двух активационных ветвей спектра магнонов и, естественно, конечное значение затухания, $\gamma_k \rightarrow \text{const}$ при $k \rightarrow 0$. Результаты, полученные в рамках сигма-модели, идентичны тем, что известны для более громоздкого анализа динамики намагниченностей подрешеток. Однако, насколько нам известно, релаксация магнонов для сигма-модели с чисто одноосной симметрией и анизотропией типа «легкая плоскость» осталась неизученной. В этой мо-

дели существуют две ветви магнонов: активационная ветвь с активацией ε_0 и безактивационная ветвь, наличие которой обусловлено вырождением системы по азимутальному углу единичного вектора \mathbf{n} . Случай антиферромагнетиков с анизотропией типа «легкая плоскость» интересен для описания многих практически важных материалов типа бората железа. Возможность существования анизотропных спиновых нематиков отмечалась в работе [28], для их описания применима анизотропная сигма-модель [29]. Кроме того, интересен и чисто теоретический вопрос о сравнении динамики сигма-модели с полным (относительно произвольных поворотов) и частичным (относительно только поворотов вокруг избранной оси) спонтанным нарушением симметрии.

Цель настоящей работы — исследование затухания магнонов в сигма-модели с одноосной анизотропией типа «легкая плоскость». Показано, что наличие двух ветвей спектра с различным характером закона дисперсии приводит к интересным особенностям затухания магнонов, которые отсутствуют в исследованных ранее чисто изотропных и двухосных антиферромагнетиках. В отличие от изотропного случая, декремент затухания магнонов нижней ветви γ_k при $k \rightarrow 0$ убывает быстрее, чем ω_k^2 . Такое поведение уместно назвать «сверхголдстоуновским» поведением затухания безактивационных (голдстоуновских) квазичастиц. В отличие от двухосного антиферромагнетика, затухание магнонов верхней ветви с конечной активацией ε_0 при низких температурах $T \ll \varepsilon_0$ не содержит экспоненциальной малости типа $\exp(-\varepsilon_0/T)$ и зависит от температуры степенным образом. Поскольку лазерное возбуждение часто проводится при низких температурах, а значение щели ε_0 в антиферромагнетиках существенно выше, чем в стандартных ферромагнетиках, и достигает единиц или даже десятков кельвин, этот результат важен для описания упомянутых выше экспериментов по возбуждению магнонов в диапазоне терагерц.

2. Сигма-модель и гамильтониан взаимодействия магнонов

Лагранжиан сигма-модели $L\{\mathbf{n}\}$ для единичного вектора \mathbf{n} можно записать в следующем универсальном виде [30]:

$$L = \frac{A}{2c^2} \int d\mathbf{r} \left(\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial t} \right)^2 - W\{\mathbf{n}\}, \quad (1)$$

$$W\{\mathbf{n}\} = \int d\mathbf{r} \left\{ \frac{A}{2} (\nabla \mathbf{n})^2 + \frac{K}{2} n_z^2 \right\},$$

где $W\{\mathbf{n}\}$ — статическая энергия системы. Лагранжиан содержит три независимых параметра. Мы выбрали систему параметров, удобную для описания антиферромагнетиков: A — константа неоднородного обмена, c — характерная скорость элементарных возбуждений

— магнонов и K — константа анизотропии. Будем полагать $K > 0$, при этом в основном состоянии $n_z = 0$, что соответствует основному состоянию типа «легкая плоскость» и наличию спонтанного нарушения симметрии по направлению вектора \mathbf{n} в легкой плоскости xy . Единичный вектор \mathbf{n} удобно записать в угловых переменных, в качестве которых можно взять полярный θ и азимутальный φ углы, $n_z = \cos \theta$, $n_x + in_y = \sin \theta \exp(i\varphi)$. В угловых переменных лагранжиан приобретает вид

$$L = \int d\mathbf{r} \left\{ \frac{A}{2c^2} \left[\left(\frac{\partial \theta}{\partial t} \right)^2 + \sin^2 \theta \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 \right] - \frac{A}{2} \left[(\nabla \theta)^2 + \sin^2 \theta (\nabla \varphi)^2 \right] - \frac{K}{2} \cos^2 \theta \right\}. \quad (2)$$

Для построения неравновесной термодинамики системы удобно перейти к описанию в канонических переменных и записать функцию Гамильтона

$$H = \int d\mathbf{r} \left[\frac{p_\theta^2 c^2}{2A} + \frac{A}{2} (\nabla \theta)^2 + \frac{p_\varphi^2 c^2}{2A \sin^2 \theta} + \frac{A}{2} \sin^2 \theta (\nabla \varphi)^2 + \frac{K}{2} \cos^2 \theta \right]. \quad (3)$$

Здесь $p_\theta = (A/c^2) \partial \theta / \partial t$, $p_\varphi = (A/c^2) \sin^2 \theta \partial \varphi / \partial t$ — обобщенные импульсы, сопряженные обобщенным координатам θ и φ соответственно.

Рассмотрим малые колебания системы около равновесного состояния $\theta = \theta_0 = \pi/2$, $\varphi = \varphi_0$, значение φ_0 не определено, что соответствует вырождению основного состояния по азимутальному углу. Для этого представим θ и φ в виде $\theta = \theta_0 + \vartheta(\mathbf{r}, t)$ и $\varphi = \varphi_0 + \phi(\mathbf{r}, t)$. Далее разложим функцию Гамильтона в ряд по степеням канонических переменных. Это разложение содержит только четные степени ϑ , ϕ , p_θ , p_φ и имеет вид

$$H = H_2^\vartheta + H_2^\theta + H_4^\theta + H_4^{\theta, \varphi}. \quad (4)$$

Два первых слагаемых описывают линейные колебания вектора \mathbf{n} , поляризованные в легкой плоскости и в направлении, перпендикулярном легкой плоскости, что отвечает колебаниям только угла φ или только угла θ ,

$$H_2^\vartheta = \int d\mathbf{r} \left[\frac{p_\varphi^2 c^2}{2A} + \frac{A}{2} (\nabla \phi)^2 \right],$$

$$H_2^\theta = \int d\mathbf{r} \left[\frac{p_\theta^2 c^2}{2A} + \frac{A}{2} (\nabla \vartheta)^2 + \frac{K}{2} \vartheta^2 \right]. \quad (5)$$

Эти колебания соответствуют магнонам разных ветвей, безактивационных и активационных соответственно.

Два последних слагаемых в (4) описывают взаимодействие магнонов (нелинейную динамику) и имеют вид

$$H_4^0 = -\frac{K}{6} \int d\mathbf{r} \vartheta^4, \quad H_4^{\theta\varphi} = \int d\mathbf{r} \vartheta^2 \left[\frac{p_\varphi^2 c^2}{2A} - \frac{A}{2} (\nabla\phi)^2 \right]. \quad (6)$$

Отметим отсутствие процессов рассеяния безактивационных магнонов друг на друге, а также трехмагнонных процессов. Трехмагнонные процессы могут появиться только при наличии плоскостной анизотропии и (или) магнитного поля в плоскости магнетика [24]. Для диагонализации H_2^0 и $H_2^{\theta\varphi}$ можно перейти к состояниям с данным квазиимпульсом \mathbf{k} ,

$$\vartheta(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\mathbf{k}} \vartheta_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}, \quad \phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\mathbf{k}} \phi_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}, \\ p(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\mathbf{k}} p_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}},$$

для которых получается стандартная квадратичная функция Гамильтона невзаимодействующих осцилляторов

$$H_2^0 = \sum_{\mathbf{k}} \left[\frac{c^2}{2A} p_{\theta,\mathbf{k}} p_{\theta,-\mathbf{k}} + \frac{K + Ak^2}{2} \vartheta_{\mathbf{k}} \vartheta_{-\mathbf{k}} \right], \\ H_2^{\theta\varphi} = \sum_{\mathbf{k}} \left[\frac{c^2}{2A} p_{\varphi,\mathbf{k}} p_{\varphi,-\mathbf{k}} + \frac{Ak^2}{2} \phi_{\mathbf{k}} \phi_{-\mathbf{k}} \right]. \quad (7)$$

Переход к квантовому гамильтониану осуществим, заменяя ϑ, ϕ и p_θ, p_φ соответствующими операторами с обычными коммутационными соотношениями $[\hat{p}_{\theta,\mathbf{k}}, \hat{\vartheta}_{-\mathbf{k}}] = -i\hbar$, $[\hat{p}_{\varphi,\mathbf{k}}, \hat{\phi}_{-\mathbf{k}}] = -i\hbar$. Для стационарных колебаний $\hat{\phi}_{\mathbf{k}}, \hat{p}_{\varphi,\mathbf{k}} \propto \exp[i(\varepsilon_{\mathbf{k}}/\hbar)t]$, а $\hat{\vartheta}_{\mathbf{k}}, \hat{p}_{\theta,\mathbf{k}} \propto \exp[i(E_{\mathbf{k}}/\hbar)t]$, $\varepsilon_{\mathbf{k}}$ и $E_{\mathbf{k}}$ — энергии магнонов, отвечающих колебаниям переменных φ и θ соответственно.

Далее выразим динамические переменные $\hat{\phi}_{\mathbf{k}}, \hat{p}_{\varphi,\mathbf{k}}$ и $\hat{\vartheta}_{\mathbf{k}}, \hat{p}_{\theta,\mathbf{k}}$ через бозевские операторы: $a_{\mathbf{k}}^\dagger, a_{\mathbf{k}}$ и $A_{\mathbf{k}}^\dagger, A_{\mathbf{k}}$:

$$\hat{\phi}_{\mathbf{k}} = \sqrt{\frac{\hbar}{2\alpha_{\mathbf{k}}}} (a_{\mathbf{k}}^\dagger + a_{-\mathbf{k}}), \quad \hat{p}_{\varphi,\mathbf{k}} = i \frac{A\varepsilon_{\mathbf{k}}}{\hbar c^2} \sqrt{\frac{\hbar}{2\alpha_{\mathbf{k}}}} (a_{\mathbf{k}}^\dagger - a_{-\mathbf{k}}), \quad (8)$$

$$\hat{\vartheta}_{\mathbf{k}} = \sqrt{\frac{\hbar}{2\beta_{\mathbf{k}}}} (A_{\mathbf{k}}^\dagger + A_{-\mathbf{k}}), \quad \hat{p}_{\theta,\mathbf{k}} = i \frac{AE_{\mathbf{k}}}{\hbar c^2} \sqrt{\frac{\hbar}{2\beta_{\mathbf{k}}}} (A_{\mathbf{k}}^\dagger - A_{-\mathbf{k}}). \quad (9)$$

Здесь при любых значениях параметров $\alpha_{\mathbf{k}}$ и $\beta_{\mathbf{k}}$ обеспечиваются бозевские коммутационные соотношения для операторов $a_{\mathbf{k}}^\dagger, a_{\mathbf{k}}$ и $A_{\mathbf{k}}^\dagger, A_{\mathbf{k}}$, $[a_{\mathbf{k}}, a_{\mathbf{k}}^\dagger] = 1$, $[A_{\mathbf{k}}, A_{\mathbf{k}}^\dagger] = 1$. При выборе $\alpha_{\mathbf{k}} = A\varepsilon_{\mathbf{k}}/\hbar c^2$ и $\beta_{\mathbf{k}} = AE_{\mathbf{k}}/\hbar c^2$ гамильтониан приобретает стандартный диагональный вид и описывает две ветви спектра,

$$H_2 = \sum_{\mathbf{k}} (\varepsilon_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}} + E_{\mathbf{k}} A_{\mathbf{k}}^\dagger A_{\mathbf{k}}). \quad (10)$$

Операторы $a_{\mathbf{k}}^\dagger, a_{\mathbf{k}}$ являются операторами рождения и уничтожения поляризованных в легкой плоскости φ -магнонов с линейным законом дисперсии, $\varepsilon_{\mathbf{k}} = \hbar c k$, $k = |\mathbf{k}|$. Операторы $A_{\mathbf{k}}^\dagger, A_{\mathbf{k}}$ — операторы рождения и уничтожения магнонов, поляризованных перпендикулярно легкой плоскости (θ -магнонов) с законом дисперсии

$$E_{\mathbf{k}} = \sqrt{\varepsilon_0^2 + \hbar^2 c^2 k^2}, \quad \varepsilon_0 = \hbar c \sqrt{K/A}. \quad (11)$$

В нелинейной части гамильтониана первое слагаемое описывает взаимодействие четырех θ -поляризованных магнонов друг с другом

$$H_4^0 = -\frac{K}{6V} \sum_{1,2,3,4} \Delta(1+2+3+4) \hat{\vartheta}_1 \hat{\vartheta}_2 \hat{\vartheta}_3 \hat{\vartheta}_4, \quad (12)$$

а второе — взаимодействие магнонов разных поляризаций

$$H_4^{\theta\varphi} = \frac{1}{V} \sum_{1,2,3,4} \Delta(1+2+3+4) \times \\ \times \hat{\vartheta}_1 \hat{\vartheta}_2 \left(\frac{c^2}{2A} \hat{p}_{\varphi,3} \hat{p}_{\varphi,4} + \frac{A}{2} \mathbf{k}_3 \mathbf{k}_4 \hat{\phi}_3 \hat{\phi}_4 \right). \quad (13)$$

Здесь подразумевается симметризация всех выражений по перестановкам индексов 1, 2, 3, 4 и для сокращения записи использованы обозначения типа $\mathbf{1} = \mathbf{k}_1$.

Из структуры выражений (12) и (13) следует, что гамильтониан взаимодействия содержит процессы с участием четырех активационных θ -магнонов и процессы с участием двух активационных θ -магнонов и двух безактивационных φ -магнонов. Подчеркнем, что структура гамильтониана такая же, как и для изотропной сигма-модели, различие состоит только в поведении энергий магнона и амплитуд взаимодействия при малых импульсах. Принципиально важно, что процессы с участием четырех безактивационных (голдстоуновских) φ -магнонов отсутствуют. Такие процессы могут появиться или при выходе за рамки сигма-модели (они присутствуют в расчете на основе полного спинового гамильтониана антиферромагнетика [25] или спинового нематика [31]), или при обобщении мо-

дели, например при наличии плоскостной анизотропии и (или) магнитного поля в плоскости магнетика. В частности, такие процессы присутствуют в двухосном антиферромагнетике [27].

Как мы убедимся ниже, все возможные процессы важны для полного анализа релаксации. В низшем (втором) порядке теории возмущения по H_4 вклад в затухание дают только процессы рассеяния безактивационного магнона на активационном. Процессы распада магнона на три и процессы превращения двух активационных магнонов в два безактивационных (и наоборот) запрещены законами сохранения энергии и импульса. Однако при расчете затухания в следующих порядках теории возмущений все эти процессы существенны для построения эффективных вершин, необходимость учета которых будет аргументирована ниже. В результате, в гамильтониане взаимодействия надо учесть следующие слагаемые:

$$H_4 = \frac{1}{N} \sum_{1,2,3,4} \{ \Delta(1+2+3+4)\Phi_1(1234)a_1a_2A_3A_4 + \Delta(1+2-3-4)[(\Phi(1234)A_1^\dagger A_2^\dagger A_3A_4 + \Phi_1(1234)a_1^\dagger a_2^\dagger A_3A_4 + \Phi_2(1234)a_1^\dagger A_2^\dagger A_3a_4)] + \Delta(1-2-3-4)\Phi_3(1234)(a_1^\dagger a_2^\dagger A_3^\dagger A_4 - a_1^\dagger a_2 A_3A_4) \} + \text{э.с.}, \quad (14)$$

где амплитуды процессов определяются следующим образом

$$\begin{aligned} \Phi(1234) &= \Phi_0\varphi_0(12)\varphi_0(34), & \Phi_1(1234) &= -\varphi(12)\varphi_0(34), \\ \Phi_2(1234) &= 2\varphi(14)\varphi_0(23), & \Phi_3(1234) &= 2\varphi(12)\varphi_0(34). \end{aligned} \quad (15)$$

Для упрощения записи введены обозначения

$$\begin{aligned} \varphi(12) &= \Phi_0 x_0 \sqrt{k_1 k_2} (1 - \kappa_{12}), & \varphi_0(34) &= \frac{\varepsilon_0}{\sqrt{E_3 E_4}}, \\ x_0 &= \frac{\hbar c}{\varepsilon_0} = \sqrt{\frac{A}{K}}, \end{aligned} \quad (16)$$

где $\kappa_{ij} = \mathbf{k}_i \mathbf{k}_j / k_i k_j$, x_0 — стандартный параметр размерности длины, и введена характерная величина $\Phi_0 = \hbar^2 c^2 / 8A v_0$, имеющая размерность энергии. Эта величина, помимо параметров, входящих в лагранжиан, содержит объем элементарной ячейки $v_0 = V/N$, где V — объем образца. Для антиферромагнетиков параметры, входящие в лагранжиан сигма-модели, выражаются через микроскопические константы спинового гамильтониана следующим образом: $\hbar c \sim JSa$, $A \sim JS^2/a$, $a = v_0^{1/3}$, где J — обменный интеграл, S — значение атомного спина. При этом можно представить Φ_0 только через параметры спектра магнонов, $\Phi_0 = \sigma \hbar c / a$ или $\Phi_0 = \sigma(x_0/a)\varepsilon_0$, где $x_0 \varepsilon_0 / a \sim JS$ и

$\sigma = \hbar c / 8Aa^2$ порядка $1/S$. Для нематического состояния негеизенберговского магнетика величина $\sigma = \sqrt{(J_2 - J_1)/2J_2}$, где J_1 и J_2 — константы обменного взаимодействия, гейзенберговского и биквадратичного по операторам спина соответственно [20]. Поскольку нематическая фаза стабильна при $0 \leq J_1 \leq J_2$, в широкой области значений обменных интегралов $0 \leq J_2 - J_1 \sim J_2$, как и в случае антиферромагнетика со спином $S \sim 1$, величина $\sigma \sim 1$. Из этих оценок следует, что для реальных магнетиков величина Φ_0 может быть не малой, $\Phi_0 \sim J$. С другой стороны, в часто используемом в теории магнетиков приближении $S \gg 1$ величина σ является формальным малым параметром, определяющим малость взаимодействия магнонов. Такой параметр часто используется в теории ферромагнетиков и антиферромагнетиков, например для обоснования представления Голдстейна–Примакова или квантового вывода сигма-модели.

Для изотропной модели $\varepsilon_0 = 0$, обе ветви спектра безактивационные, $\varepsilon_{\mathbf{k}} = E_{\mathbf{k}} = \hbar c k$ и амплитуды Φ_2 и Φ_3 — однородные функции нулевого порядка по импульсам

$$\Phi_2 = 2\Phi_0 \sqrt{\frac{k_1 k_4}{k_2 k_3}} (1 - \kappa_{14}), \quad \Phi_3 = -\Phi_0 \sqrt{\frac{k_1 k_2}{k_3 k_4}} (1 - \kappa_{12}), \quad (17)$$

Для анизотропной модели амплитуды с участием двух активационных и двух безактивационных магнонов являются однородными функциями *первого* порядка по импульсам безактивационных магнонов.

В рамках стандартной теории затухания магнонов расчеты обычно проводятся в основном порядке теории возмущений. В этом приближении магنونный декремент $\gamma(k, T)$ определяется как мнимая часть массового оператора для одночастичной двухвременной функции Грина для свободных магнонов [32]. Для магнонов нижней ветви имеем

$$G_a(k, t - t') = -\langle \hat{T} \tilde{a}_k(t) \tilde{a}_k^\dagger(t') \rangle, \quad (18)$$

где \hat{T} — оператор хронологического произведения, $\tilde{a}_k(t), \tilde{a}_k^\dagger(t')$ — операторы в гейзенберговском представлении, усреднение проводится с гамильтонианом H_4 .

3. Затухание безактивационных магнонов

Простой анализ показывает, что в основном порядке теории возмущений процессы распада магнонов запрещены законами сохранения энергии и импульса. В соответствии с общим видом гамильтониана (14), затухание безактивационных магнонов в этом приближении определяется только процессами их рассеяния на активационных магнонах, амплитуда этого процесса Φ_2 .

Выражение для декремента $\gamma(k, T)$ может быть представлено в виде:

$$\gamma(k, T) = \frac{\pi}{2} \left(\frac{a}{2\pi} \right)^6 \eta(\mathbf{k}) \times \int d^3 p \int d^3 q \Phi_2^2 \frac{\delta(\varepsilon_{\mathbf{k} + \mathbf{p}} - E_{\mathbf{p}} - \varepsilon_{\mathbf{k} + \mathbf{p} - \mathbf{q}})}{\tilde{\eta}(\mathbf{p})\tilde{\eta}(\mathbf{q})\eta(\mathbf{k} + \mathbf{p} - \mathbf{q})}. \quad (19)$$

Здесь T — температура в энергетических единицах, интегрирование ведется в пределах первой зоны Бриллюэна и для сокращения формул обозначено $\eta(\mathbf{k}) = \text{sh}(\varepsilon_{\mathbf{k}}/2T)$, $\tilde{\eta}(\mathbf{k}) = \text{sh}(E_{\mathbf{k}}/2T)$.

Для малых импульсов входящего магнона $\hbar ck \ll \varepsilon_0$ легко показать, что $p - q \sim k$ при любых p и q . В связи с этим введем вектор

$$\Delta = \mathbf{p} - \mathbf{q}, \quad \Delta = |\Delta| \sim k. \quad (20)$$

Тогда $E_p - E_q \approx \hbar c(\mathbf{p}\Delta)/E_p = \hbar c(\mathbf{v}\Delta)$, где обозначено $\mathbf{v} = x_0 \mathbf{p} / \sqrt{1 + x_0^2 p^2}$, и уравнение массовой поверхности в этих переменных принимает вид

$$k - |\mathbf{k} - \Delta| + (\mathbf{v}\Delta) = 0. \quad (21)$$

Удобно представить уравнение массовой поверхности через компоненты вектора $\Delta = \mathbf{e}_1 \Delta_1 + \mathbf{e}_2 \Delta_2 + \mathbf{e}_3 \Delta_3$ в системе координат, в которой ось \mathbf{e}_3 направлена вдоль \mathbf{p} , а вектор \mathbf{k} лежит в плоскости $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3$. В этой системе массовая поверхность представляет собой эллипсоид вращения с полуосями $A_1 = A_2 \neq A_3$, зависящими от k и p :

$$A_1 = A_2 = k \sqrt{1 + x_0^2 p^2} - x_0 p k_3, \quad A_3 = A_1 \sqrt{1 + x_0^2 p^2}. \quad (22)$$

Центр эллипсоида задается вектором $\Delta_0 = (-k_1, 0, \Delta_{03})$, $\Delta_{03} = (vk - k_3)/(1 - v^2)$. При низких температурах ($T \ll \varepsilon_0$), когда импульсы тепловых активационных магнонов малы, $x_0 p \ll 1$, эллипсоид превращается в сферу радиуса k . При высоких температурах ($T \gg \varepsilon_0$), когда существенны тепловые магноны с немалыми импульсами, $x_0 p \gg 1$, величина $A_3 / A_1 \sim x_0 p \gg 1$ и эллипсоид становится вытянутым вдоль оси \mathbf{e}_3 . Однако важно, что при любых значениях $x_0 p$ размер всех осей эллипсоида мал в меру малости импульса входящего магнона k . Это свойство принципиально отличает задачу о релаксации безактивационных магнонов в изотропной модели и при наличии сколь угодно слабой анизотропии. Именно оно приводит к отмеченной выше аномалии, сверхголдстоуновскому поведению. Обсудим этот вопрос ниже.

В терминах векторов \mathbf{p} и Δ амплитуда процесса пропорциональна первой степени k ,

$$\Phi_2 = 2\Phi_0 \frac{x_0}{\sqrt{1 + x_0^2 p^2}} \frac{k|\mathbf{k} + \Delta| - \mathbf{k}(\mathbf{k} + \Delta)}{k|\mathbf{k} + \Delta|} \quad (23)$$

и формулу для декремента можно привести к виду

$$\gamma(k, T) = \frac{\sigma^2 \varepsilon_0}{16\pi^5} (ak)^4 \int \frac{x_0^3 d^3 p}{(1 + x_0^2 p^2) \text{sh}^2(E_p/2T)} I_{\Delta}, \quad (24)$$

где обозначено

$$I_{\Delta} = \frac{8\pi}{3} (1 + x_0^2 p^2)^3 \left(1 - v \frac{\mathbf{k}\mathbf{p}}{kp} \right)^5. \quad (25)$$

Уже в этой формуле выделяется множитель k^4 и видна отмеченная выше аномалия зависимости декремента затухания от импульса магнона. Для дальнейшего расчета $\gamma(k, T)$ удобно использовать сферическую систему координат для вектора \mathbf{p} , в которой полярная ось параллельна вектору \mathbf{k} . После интегрирования по углам выражение для декремента приводится к виду

$$\gamma(k, T) = \frac{\sigma^2 \varepsilon_0}{16\pi^5} (ak)^4 \int \frac{x_0^3 p^2 dp}{(1 + x_0^2 p^2) \text{sh}^2(E_p/2T)} I(p), \quad (26)$$

где

$$I(p) = \frac{32}{9} \pi^2 (1 + x_0^2 p^2) (3 + 16x_0^2 p^2 + 16x_0^4 p^4). \quad (27)$$

Этот интеграл легко найти численно при любых значениях температуры, но мы ограничимся анализом асимптотик при высоких и низких температурах, считая при этом, что энергия магнона является самой малой величиной, $\hbar ck \ll \max(\varepsilon_0, T)$. При низких температурах ($T \ll \varepsilon_0$) число активационных магнонов экспоненциально мало и декремент затухания содержит экспоненциально малый температурный множитель,

$$\gamma(k, T) = \frac{4\sqrt{2}}{3\pi^{5/2}} \sigma^2 (ak)^4 \left(\frac{T}{\varepsilon_0} \right)^{1/2} T \exp(-\varepsilon_0/T). \quad (28)$$

В наиболее интересном случае высоких температур ($T \gg \varepsilon_0$) температурная зависимость декремента степенная,

$$\gamma(k, T) = \frac{2^{11} \pi^3}{189} \sigma^2 (ak)^4 \left(\frac{T}{\varepsilon_0} \right)^6 T. \quad (29)$$

Важно отметить, что в обоих случаях декремент затухания имеет неаналитическую зависимость от энергии активации ε_0 , точнее, от параметра ε_0/T . При высоких температурах это проявляется в появлении высокой степени большого параметра T/ε_0 .

Таким образом, затухание безактивационных магнонов, обусловленное их взаимодействием с активационными магнонами, пропорционально четвертой степени импульса магнона. Здесь явно проявляется сверхголдстоуновское поведение затухания, отсутствующее для всех известных нам систем с непрерывным вырождением основного состояния. Вместо стандартной зависимости $\gamma_k \propto \varepsilon_k^2$, характерной для вклада процессов рассеяния голдстоуновских магнонов [32], тут получается значительно меньшая величина затухания $\gamma_k \propto \varepsilon_k^4$ или $\gamma_k \propto k^2 \varepsilon_k^2$. Величина γ_k/ε_k^2 , которая в стандартных голдстоуновских системах конечна, в нашем случае стремится к нулю при $k \rightarrow 0$ как $\gamma_k/\varepsilon_k^2 \propto k^2$. Понятно также, что при низких температурах присутствует дополнительно и экспоненциальная малость по температуре, характерная для процессов с участием активационных магнонов. Заметим, что для стандартных голдстоуновских систем, допускающих процессы рассеяния безактивационных квазичастиц друг на друге, такой малости нет. Таким образом, затухание безактивационных магнонов для сигма-модели существенно подавлено.

Такое сверхголдстоуновское поведение затухания объясняется только уменьшением фазового объема процесса по сравнению с объемом фазового пространства для рассеяния четырех голдстоуновских квазичастиц в стандартных моделях. Обсудим этот важный вопрос особо на примере изотропной сигма-модели, наиболее близкой к нашему случаю. Лагранжиан изотропной сигма-модели получается из нашего, если в нем положить $K=0$. Естественно, в этом случае $\varepsilon_0=0$ и обе магنونные моды безактивационные. Как и в нашем случае, в изотропной сигма-модели отсутствуют процессы рассеяния магнонов (безактивационных) одной ветви друг на друге и затухание определяется рассеянием магнонов различных ветвей. Однако для изотропной сигма-модели все магноны, участвующие в процессе, имеют линейный закон дисперсии, $\varepsilon_k = \hbar ck$. Известно, что линейный закон дисперсии является критическим в том смысле, что он разделяет спектры, для которых законы сохранения энергии и импульса допускают или не допускают процессы распада, т.е. существует или нет решение уравнения $\varepsilon(p) = \varepsilon(|\mathbf{p} - \mathbf{q}|) + \varepsilon(q)$ (для этого рассуждения не важно, отлична ли от нуля амплитуда соответствующего процесса). Для линейного закона такие процессы допустимы в вырожденном случае, когда все импульсы \mathbf{p} и \mathbf{q} параллельны, если же присутствует активация, то $\varepsilon_k > \hbar ck$, и процессы распада запрещены. Это можно пояснить более формально, рассмотрев фазовый объем $\Delta\Omega$ для соответствующего процесса,

$$\Delta\Omega \equiv \int d^3 p \int d^3 q \delta(\varepsilon_k + E_{\mathbf{p}} - E_{\mathbf{q}} - \varepsilon_{\mathbf{k}+\mathbf{p}-\mathbf{q}}).$$

При $k=0$ и $\varepsilon_k=0$ для линейного закона дисперсии, $E_{\mathbf{p}} = E_{\mathbf{p}} = \hbar cp$, при $k=0$ аргумент дельта-функции

содержит множитель $(pq - \mathbf{p}\mathbf{q})$, равный нулю при параллельных \mathbf{p} и \mathbf{q} , и интеграл для $\Delta\Omega|_{k=0}$ для случая $\varepsilon_0=0$ не равен нулю. При конечном ε_0 при $k=0$ аргумент дельта-функции приводится к виду $\left[\sqrt{(\varepsilon_0^2 + \hbar^2 c^2 \mathbf{p}^2)(\varepsilon_0^2 + \hbar^2 c^2 \mathbf{q}^2)} - \hbar^2 c^2 \mathbf{p}\mathbf{q} - \varepsilon_0^2 \right]$. Поскольку эта функция не имеет корней ни при каких конечных $p \neq q$, фазовый объем при $k=0$ равен нулю. Фактически это есть отражение того факта, что эллипсоид, определяющий массовую поверхность процесса (см. формулу (22)), при $k=0$ вырождается в точку. Расчет фазового объема дает $\Delta\Omega \propto k^2$ при $k \rightarrow 0$, что и объясняет появление дополнительного множителя k^2 в затухании (см. (28), (29)).

Важно отметить, что процессы рассеяния безактивационных магнонов друг на друге могут возникнуть и в случае гамильтониана (14) при учете следующих порядков теории возмущений. Вопрос о возможности рассеяния безактивационных магнонов имеет принципиальную важность, и будет рассмотрен в следующем разделе.

4. Эффективное затухание безактивационных магнонов

Характерной особенностью анизотропной сигма-модели является отсутствие процессов с участием четырех безактивационных (голдстоуновских) магнонов. Затухание безактивационных магнонов происходит только в результате их взаимодействия с активационными магнонами. Это процессы рассеяния безактивационных магнонов на активационных. Однако это не единственный механизм влияния активационной моды на затухание безактивационных магнонов.

Из вершин Φ_1, Φ_2, Φ_3 можно построить эффективную вершину рассеяния четырех голдстоуновских магнонов Γ (только такие процессы разрешены законами сохранения энергии и импульса). Вклад этих процессов можно описать гамильтонианом вида

$$H_{\text{eff}} = \frac{1}{N} \sum_{1,2,3,4} \Delta(1+2-3-4) \Gamma(\mathbf{12}|\mathbf{34}) a_1^\dagger a_2^\dagger a_3 a_4 + \text{э.с.}, \quad (30)$$

где эффективная амплитуда процессов рассеяния $\Gamma(\mathbf{12}|\mathbf{34}), \Gamma(\mathbf{12}|\mathbf{43}) = \Gamma(\mathbf{12}|\mathbf{43}) = \Gamma(\mathbf{21}|\mathbf{34})$, строится из пар одинаковых вершин Φ_1, Φ_2, Φ_3 . Во втором порядке по амплитудам Φ_1, Φ_2, Φ_3 величина $\Gamma(\mathbf{12}|\mathbf{34})$ представляется в виде суммы графиков, изображенных на рис. 1. Соответствующее аналитическое выражение имеет вид

$$\Gamma(\mathbf{12}|\mathbf{34}) = A_0(T) [\varphi(\mathbf{12})\varphi(\mathbf{34}) + 2\varphi(\mathbf{13})\varphi(\mathbf{24})] + 4B(T) [\varphi(\mathbf{12})\varphi(\mathbf{34}) + \varphi(\mathbf{13})\varphi(\mathbf{24})]. \quad (31)$$

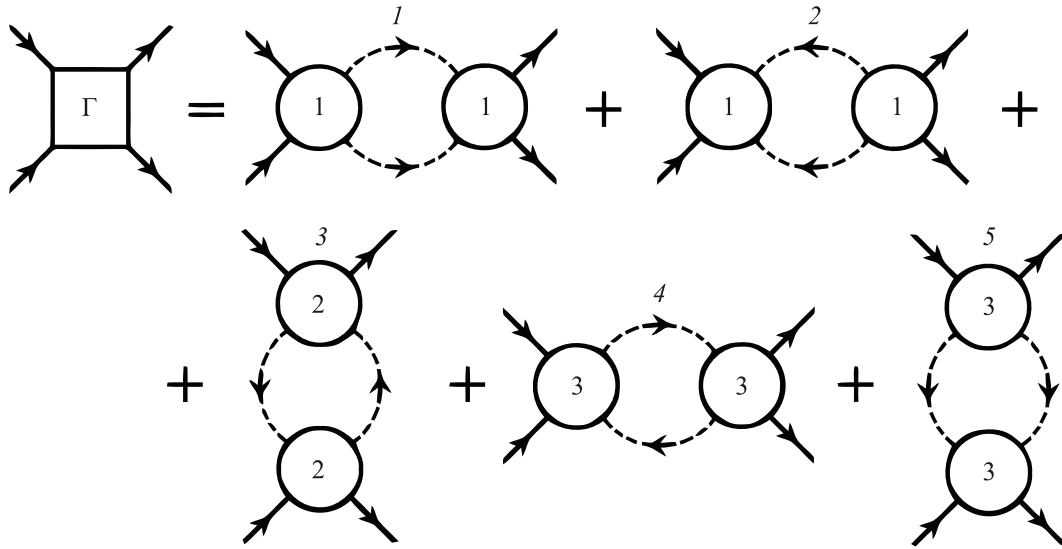


Рис. 1. Графическое представление выражения для эффективной вершины рассеяния. Сплошные линии — безактивационные магноны, штриховые линии — активационные магноны, кружки с цифрами 1, 2, 3 обозначают соответствующие амплитуды Φ_1, Φ_2, Φ_3 .

Здесь первое слагаемое соответствует лестничным графикам и $A_0(T)$ дает значение петли, у которой внутренние линии Грина активационных магнонов имеют одинаковое направление (графики 1,2,5 на рис 1.),

$$A_0(T) = \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{p}} \frac{[1+n(E_{1+2-\mathbf{p}})+n(E_{\mathbf{p}})]}{(E_{1+2-\mathbf{p}}+E_{\mathbf{p}}-\varepsilon_1-\varepsilon_2)} \frac{\varepsilon_0^2}{E_{\mathbf{p}}E_{1+2-\mathbf{p}}}, \quad (32)$$

а $B(T)$ — вклад петли, у которой внутренние линии Грина активационных магнонов направлены в разные стороны (графики 3,4 на рис. 1),

$$B(T) = \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{p}} \frac{[n(E_{\mathbf{p}+1-3})-n(E_{\mathbf{p}})]}{(\varepsilon_1-\varepsilon_3+E_{\mathbf{p}}-E_{\mathbf{p}+1-3})} \frac{\varepsilon_0^2}{E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{p}+1-3}}, \quad (33)$$

где $n(E_{\mathbf{p}})$ — бозевская функция распределения активационных магнонов. При переходе от суммирования к интегрированию в этих формулах интегралы берутся в смысле главного значения. При малых импульсах безактивационных магнонов величины $A_0(T)$ и $B(T)$ не зависят от импульсов, их температурная зависимость определяется выражениями

$$A_0(T) = \frac{\varepsilon_0^2}{N} \sum_{\mathbf{p}} \frac{1+2n(E_{\mathbf{p}})}{2E_{\mathbf{p}}^3},$$

$$B(T) = -\frac{1}{N} \frac{\varepsilon_0^2}{T} \sum_{\mathbf{p}} \frac{1}{E_{\mathbf{p}}^2} \frac{\partial n(E_{\mathbf{p}}+\Delta)}{\partial \Delta}. \quad (34)$$

При $T \ll \varepsilon_0$ числа заполнения $n(E_{\mathbf{p}})$ экспоненциально малы и основной вклад в суммы дают большие импульсы. При этом $A_0(T)$ не зависит от температуры

$$A_0 = \frac{1}{4\pi^2} \frac{\sigma}{\Phi_0} \left(\frac{a}{x_0} \right)^2 \left[\ln \left(\frac{x_0}{a} \right) + C \right], \quad T \ll \varepsilon_0, \quad (35)$$

$$C = (1/3) \ln 48\pi^2 - 1 \approx 1.05,$$

а $B(T)$ содержит экспоненциально малый температурный множитель

$$B(T) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \frac{\sigma}{\Phi_0} \left(\frac{a}{x_0} \right)^2 \sqrt{\frac{T}{\varepsilon_0}} \exp(-\varepsilon_0/T), \quad T \ll \varepsilon_0. \quad (36)$$

Следовательно, при низких температурах основной вклад в амплитуду дает первое слагаемое в (31), и на массовой поверхности амплитуда имеет вид

$$\Gamma(\mathbf{12} | \mathbf{34}) = \sigma_1 \Phi_0 \frac{x_0^2 k_1^{3/2}}{\sqrt{k_2 k_3 k_4}} \times$$

$$\times \left[k_2^2 (1-\kappa_{12})^2 + k_3^2 (1-\kappa_{13})^2 + k_4^2 (1-\kappa_{14})^2 \right], \quad T \ll \varepsilon_0, \quad (37)$$

где $\sigma_1 = A_0 \Phi_0$ содержит малый параметр a/x_0 .

При $T \gg \varepsilon_0$ зависимость A_0 и B от температуры степенная

$$A_0(T) = B(T) = \frac{1}{8\pi} \frac{\sigma}{\Phi_0} \left(\frac{a}{x_0} \right)^2 \frac{T}{\varepsilon_0}, \quad T \gg \varepsilon_0. \quad (38)$$

В этом случае оба типа графиков дают одинаковый вклад в амплитуду, которая определяется формулой

$$\Gamma(\mathbf{12} | \mathbf{34}) = \sigma_2(T) \Phi_0 \frac{x_0^2 k_1^{3/2}}{\sqrt{k_2 k_3 k_4}} \times$$

$$\times \left[5k_2^2 (1-\kappa_{12})^2 + 3k_3^2 (1-\kappa_{13})^2 + 3k_4^2 (1-\kappa_{14})^2 \right]. \quad (39)$$

Здесь возникает малый множитель

$$\sigma_2(T) = B(T) \Phi_0 = \frac{\sigma}{8\pi} \left(\frac{a}{x_0} \right) \frac{aT}{c\hbar} \ll 1.$$

Отметим, что амплитуда взаимодействия четырех активационных магнонов не имеет специфической малости (кроме формального малого параметра $1/S$) по отношению к исходными амплитудами Φ_1, Φ_2, Φ_3 . Поэтому, строго говоря, ее нужно учитывать точно при расчете эффективной вершины (кроме процессов $A^\dagger A^\dagger AA$ необходимо учитывать также и процессы $A^\dagger AAA$ и $A^\dagger A^\dagger A^\dagger A^\dagger$, которые не выписаны в гамильтониане (14)). Однако анализ показал, что каждое «включение» амплитуды Φ влечет за собой множитель $A_0(T)\Phi_0$, который мал в меру малости отношения a/x_0 . В силу этого достаточно ограничиться теми процессами, что представлены на рис. 1. Принципиально важно, что построенная амплитуда, в отличие от стандартной амплитуды в моделях, где изначально присутствуют процессы рассеяния голдстоуновских магнонов (например, антиферромагнетика [25] или спинового нематика [31]), содержит внешний импульс в степени $3/2$. В результате это опять приведет к аномально малому затуханию.

Декремент затухания безактивационных магнонов за счет их рассеяния друг на друге можно представить в стандартном виде

$$\gamma(k, T) = 8\pi \left(\frac{a}{2\pi}\right)^6 \eta(\mathbf{k}) \times \int \frac{d^3 p}{\eta(\mathbf{p})} \int d^3 q \frac{|\Gamma(\mathbf{k}, \mathbf{p} | \mathbf{q}, \mathbf{k} + \mathbf{p} - \mathbf{q})|^2}{\eta(\mathbf{q})\eta(\mathbf{k} + \mathbf{p} - \mathbf{q})} \delta(\varepsilon_{\mathbf{k} + \varepsilon_{\mathbf{p}} - \varepsilon_{\mathbf{q}} - \varepsilon_{\mathbf{k} + \mathbf{p} - \mathbf{q}}). \quad (40)$$

Вычисление этого интеграла может быть проведено в предельных случаях больших и малых волновых векторов магнонов, $\hbar ck \ll T$ или $\hbar ck \gg T$. Поскольку эффективная амплитуда процесса зависит от температуры, асимптотическая форма функции $\gamma(k, T)$, описывающей затухание, зависит от соотношения между T и активацией магнонов верхней ветви ε_0 . В результате для наиболее интересного случая предельно малых волновых векторов, $\hbar ck \ll \max(\varepsilon_0, T)$, получается та же зависимость $\gamma(k, T) \propto k^4$, что и для вклада процессов взаимодействия магнонов разных ветвей

$$\gamma(k, T) = \frac{64}{75\pi^3} F^2 \sigma^4 (ak)^4 \left(\frac{aT}{\hbar c}\right)^4 T \left(\ln \frac{T}{\hbar ck} + C_1 \right), \quad (41)$$

где множитель F^2 ($F = F(T)$) обусловлен температурной зависимостью эффективной амплитуды,

$$F(T) = \begin{cases} \ln(x_0/a) + C, & T \ll \varepsilon_0, \\ (5\pi T/2\varepsilon_0), & T \gg \varepsilon_0, \end{cases} \quad (42)$$

C_1 — численная константа, $C_1 = \ln 2 + 1/5 + C_0$, где C_0 — значение интеграла

$$C_0 = \frac{30}{\pi^4} \int_0^\infty \frac{x^4 \ln(\text{sh } x)}{\text{sh}^2 x} dx \approx 1,655.$$

Сравнивая эти результаты с найденным выше затуханием за счет рассеяния безактивационных магнонов на активационных, легко видеть, что при низких температурах наиболее важен вклад (41), не содержащий экспоненциальной малости по температуре. При высоких температурах оба вклада пропорциональны T^7 , однако основную роль играют процессы рассеяния безактивационных магнонов на активационных (см. (29)), вклад которых содержит большой параметр $(T/\varepsilon_0)^4$, а не малый параметр $(aT/\hbar c)^4 \sim (T/J)^4$, как в формуле (41).

В случае промежуточных значений волнового вектора $\hbar ck \gg T$ также имеет место степенная зависимость декремента затухания как от температуры, так и от волнового вектора

$$\gamma(k, T) = \frac{64}{5\pi} \sigma^4 F^2(T) (ak)^3 \left(\frac{aT}{\hbar c}\right)^5 T, \quad \hbar ck \gg T. \quad (43)$$

Отметим, что и в этом случае появляется более высокая степень волнового вектора магнона. Можно отметить эвристическую закономерность, состоящую в том, что в (41) и (43) суммарная степень малых параметров ak и $aT/\hbar c$ одинакова и равна 8.

5. Затухание активационных магнонов

Для расчета затухания активационных магнонов $\tilde{\gamma}(k, T)$ необходимо вычислить мнимую часть массового оператора их функции Грина,

$$G_A(k, t - t') = - \left\langle \hat{T} \tilde{A}_k(t) \tilde{A}_k^\dagger(t') \right\rangle. \quad (44)$$

Затухание активационных магнонов определяется двумя слагаемыми:

$$\tilde{\gamma}(T) = \tilde{\gamma}_1(T) + \tilde{\gamma}_2(T). \quad (45)$$

Слагаемое $\tilde{\gamma}_1(T)$ обусловлено процессами рассеяния активационных магнонов на безактивационных, описываемых амплитудой Φ_2 . Слагаемое $\tilde{\gamma}_2(T)$ обусловлено процессами рассеяния активационных магнонов друг на друге, которые определяются амплитудой Φ .

Рассчитаем вклад в затухание активационных магнонов, обусловленный процессами их взаимодействия с безактивационными. Этот декремент определяется формулой (19), в которой нужно провести формальную замену $E \rightleftharpoons \varepsilon$ для энергий всех магнонов, участвующих в процессе

$$\tilde{\gamma}_1(T) = \pi \left(\frac{a}{2\pi}\right)^6 \tilde{\eta}(\mathbf{k}) \times \int d^3 p \int d^3 q \Phi_2^2 \frac{\delta(E_{\mathbf{k} + \varepsilon_{\mathbf{p}} - \varepsilon_{\mathbf{q}} - E_{\mathbf{k} + \mathbf{p} - \mathbf{q}})}{\eta(\mathbf{p})\eta(\mathbf{q})\tilde{\eta}(\mathbf{k} + \mathbf{p} - \mathbf{q})}. \quad (46)$$

Для малых импульсов входящего магнона, $\hbar ck \ll \varepsilon_0$, значение декремента конечное, и мы ограничимся расчетом при нулевом k . При $k = 0$ амплитуда Φ_2 на массовой поверхности принимает вид

$$\Phi_2 = \frac{2\Phi_0}{\sqrt{1+x_0(p-q)}} \frac{p-q}{\sqrt{pq}}. \quad (47)$$

Интеграл (46) может быть вычислен для случаев низких и высоких температур. Опуская детали расчета, приведем лишь ответы в предельных случаях.

При $T \ll \varepsilon_0$ энергии тепловых безактивационных магнонов малы по сравнению с энергией активации $\varepsilon_0 \gg \varepsilon_p, \varepsilon_q$. Это в свою очередь означает, что импульсы безактивационных магнонов также малы, $x_0 p \ll 1$, $x_0 q \ll 1$. Далее получаем

$$\tilde{\gamma}_1(T) = \frac{2^8 \pi^3}{189} \sigma^2 \left(\frac{a}{x_0}\right)^4 \left(\frac{T}{\varepsilon_0}\right)^6 T, \quad T \ll \varepsilon_0. \quad (48)$$

Отметим степенную зависимость $\tilde{\gamma}_1(T)$ от температуры при низких температурах, т.е. отсутствие экспоненциальной малости, которая характерна для затухания активационных магнонов друг на друге при $T \ll \varepsilon_0$.

Для предельного случая высоких температур ($T \gg \varepsilon_0$) основную роль играют большие импульсы магнонов нижней ветви, $x_0 p \gg 1$, $x_0 q \gg 1$, и для затухания получается

$$\tilde{\gamma}_1(T) = \frac{2}{3\pi} \sigma^2 \left(\frac{a}{x_0}\right)^4 \left(\frac{T}{\varepsilon_0}\right)^2 T \ln\left(\frac{8T}{\varepsilon_0}\right), \quad T \gg \varepsilon_0. \quad (49)$$

Можно отметить, что в затухании активационных магнонов на безактивационных малый параметр a/x_0 в (48), (49) играет ту же роль, что и ak в затухании безактивационных магонов (см. (28) и (29)).

Декремент затухания, обусловленный рассеянием активационных магнонов друг на друге, определяется интегралом

$$\tilde{\gamma}_2(k, T) = \left(\frac{\pi}{2}\right) \left(\frac{a}{2\pi}\right)^6 \tilde{\eta}(\mathbf{k}) \times \int d^3 p \int d^3 q \Phi^2 \frac{\delta(E_{\mathbf{k}} + E_{\mathbf{p}} - E_{\mathbf{q}} - E_{\mathbf{k}+\mathbf{p}-\mathbf{q}})}{\tilde{\eta}(\mathbf{p})\tilde{\eta}(\mathbf{q})\tilde{\eta}(\mathbf{k}+\mathbf{p}-\mathbf{q})}, \quad (50)$$

где амплитуда $\Phi(\mathbf{k}, \mathbf{p}, \mathbf{q})$ определена формулой (15). Приведем значения этого интеграла для предельных случаев низких и высоких температур:

$$\tilde{\gamma}_2(T) = \frac{\sigma^2 T^2}{4\pi^3 \varepsilon_0} \left(\frac{a}{x_0}\right)^4 \begin{cases} \exp(-\varepsilon_0/T) & T \ll \varepsilon_0 \\ 32/3, & T \gg \varepsilon_0. \end{cases} \quad (51)$$

Эти результаты качественно совпадают с данными расчета затухания магнонов для сигма-модели с двух-

осной анизотропией [27], для которой обе ветви имеют конечную активацию.

Сравнивая вклады различных процессов в декремент затухания активационных магнонов, можно заметить, что характерные величины $\tilde{\gamma}_1(T)$ и $\tilde{\gamma}_2(T)$ содержат одинаковые степени множителей σ и a/x_0 , но имеют существенно различную температурную зависимость. Очевидно, что при низких температурах вклад в затухание активационных магнонов за счет их рассеяния друг на друге пренебрежимо мал из-за наличия экспоненциально малого температурного множителя $\exp(-\varepsilon_0/T)$. Менее тривиальным является сравнение вкладов при высоких температурах. При $T \gg \varepsilon_0$ для легкоплоскостной сигма-модели получается, что величины $\tilde{\gamma}_1(T)$ и $\tilde{\gamma}_2(T)$ зависят от температуры степенным образом. Однако если для двухосной модели стандартной является зависимость $\tilde{\gamma}_{1,2}(T) \propto T^2/\varepsilon_0$, то в нашем случае $\tilde{\gamma}_1(T)$ содержит более высокую степень большого параметра T/ε_0 . Этот факт обусловлен тем, что фазовый объем процессов с участием безактивационных магнонов больше, чем для активационных. Таким образом, для чисто одноосной сигма-модели затухание активационных магнонов при всех температурах определяется их рассеянием на безактивационных магнонах, декремент затухания $\tilde{\gamma} \approx \tilde{\gamma}_1(T)$ и имеет степенную зависимость от температуры при любых температурах.

6. Обсуждение результатов и заключение

Полезно сравнить полученные результаты с теми, что известны для изотропной или двухосной сигма-модели, а также обсудить вопрос о применимости полученных результатов для описания реальных магнитных систем, антиферромагнетиков или спиновых немагнетиков. Отметим, что вклад рассеяния активационных магнонов друг на друге в их затухание качественно совпадает с тем, что имеет место для затухания магнонов в сигма-модели с двухосной анизотропией, для которой обе ветви имеют конечную активацию. Однако оказывается, что для чисто одноосной сигма-модели указанный выше вклад мал, и при всех значениях температуры затухание активационных магнонов определяется их рассеянием на безактивационных магнонах, в силу чего декремент имеет степенную зависимость от температуры при любых температурах (см. (48) или (49)). Этот факт обусловлен тем, что фазовый объем процессов с участием безактивационных магнонов больше, чем для активационных. Поскольку лазерное возбуждение часто проводится при низких температурах, а значение щели ε_0 в антиферромагнетиках существенно выше, чем в стандартных ферромагнетиках и достигает единиц или даже десятков кельвин, этот результат важен для описания упомянутых выше экспериментов по возбуждению магнонов в диапазоне терагерц.

Наибольшие различия легкоплоскостного и изотропного случаев возникают для безактивационных магнонов. В чисто легкоплоскостной сигма-модели при $\varepsilon_0 \neq 0$ и $k \rightarrow 0$ зависимость затухания магнонов от их частоты сверхголдстоуновская, т.е. $\gamma(k, T) \propto k^4$. Этот результат универсальный, он имеет место как для вклада процессов рассеяния безактивационных магнонов на активационных магнонах, найденного в низшем порядке теории возмущений, так и для вклада следующих порядков теории возмущений, что эквивалентно появлению рассеяния безактивационных магнонов друг на друге. Важно, что эта зависимость не может быть получена предельным переходом из выражения, найденного для изотропной версии сигма-модели при $\varepsilon_0 = 0$ и малом k [31],

$$\gamma_{\text{isotr}}(k, T) = \frac{4}{3\pi} \sigma^2 \left(\frac{aT}{\hbar c} \right)^2 T (ak)^2 \left[\ln \left(\frac{T}{\hbar ck} \right) + \bar{C} \right],$$

$$\hbar ck \ll T, \quad (52)$$

где \bar{C} — численный коэффициент. Фактически величины $\gamma_{\text{isotr}}(k, T)$ и $\gamma(k, T)$ различаются множителем типа $(ak)^2/\varepsilon_0^n$, где показатель степени n зависит от температуры. Таким образом, формулы для анизотропной модели (28) и (29) не допускают перехода к изотропному результату (52), поскольку они содержат неаналитическую зависимость от ε_0 .

Таким образом, в случае чисто одноосной симметрии и анизотропии типа «легкая плоскость» возникает редкая ситуация, когда поведение антиферромагнетика и системы, описываемой канонической формой сигма-модели (1), существенно отличаются. Для антиферромагнетика с анизотропией типа «легкая плоскость» при полном анализе динамики подрешеток присутствуют процессы рассеяния безактивационных магнонов, их вклад в затухание отличен от нуля и имеет стандартный вид $\gamma_k \propto \varepsilon_k^2$ [25]. Такие слагаемые можно получить и при переходе от намагнитченностей подрешеток к лагранжиану только для вектора \mathbf{n} , но при этом надо учитывать следующие степени естественного малого параметра, отношения энергии анизотропии к обменной энергии. При последовательной записи таких слагаемых структура получающегося лагранжиана для вектора \mathbf{n} усложняется по сравнению с (1) [19]. Подобное обобщение модели возникает, в частности, при учете в энергии антиферромагнетика, наряду со стандартным $\int A(\nabla \mathbf{n})^2 d\mathbf{r}$, слагаемых типа $\int A'(\nabla \mathbf{m})^2 d\mathbf{r}$, $\mathbf{m} = \mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2$. В лагранжиане, описывающем динамику вектора \mathbf{n} , это дает вклад типа $A'(\nabla[\mathbf{n}, \partial \mathbf{n} / \partial t])^2$, который содержит следующую (четвертую) степень производных. При стандартном выводе сигма-модели такие слагаемые в силу их малости опускаются, но в нашем случае они являются источником существенных процессов рассеяния безактивационных магнонов.

Подчеркнем, что для антиферромагнетиков стандартное поведение $\gamma_k = C(T)\varepsilon_k^2$ получается только при выходе за рамки канонической версии сигма-модели (1). Поэтому можно ожидать, что величина $C(T)$ будет различной, например при описании антиферромагнетиков или спиновых нематиков. Более того, в случае антиферромагнетиков для анализа таких слагаемых нужно учитывать детали обменного взаимодействия спинов, например их различие для атомов из разных подрешеток и внутри подрешеток, которые определяют коэффициенты A и A' . В результате универсальность сигма-модели теряется, и анализ таких слагаемых выходит за рамки нашей работы, посвященной анализу канонической формы сигма-модели.

Мы благодарны В.Г. Барьяхтару за полезные обсуждения работы.

1. F. Bloch, *Zs. Phys.* **61**, 206 (1930).
2. H. Bethe, *Zs. Phys.* **71**, 205 (1931).
3. А.М. Косевич, Б.А. Иванов, А.С. Ковалев, *Нелинейные волны намагнитченности. Динамические и топологические солитоны*, Наукова думка, Киев (1983).
4. А.М. Kosevich, В.А. Ivanov and А.С. Kovalev, *Phys. Rep.* **194**, 117 (1990).
5. L.D. Landau and E.M. Lifschitz, *Phys. Zs. Sow.* **8**, 135 (1934); Л.Д. Ландау, Собр. тр., Наука, Москва (1969), т. 1, с. 128.
6. А.И. Ахиезер, В.Г. Барьяхтар, С.В. Пелетминский, *Спиновые волны*, Наука, Москва (1967).
7. А.Г. Гуревич, *Магнитный резонанс в ферритах и антиферромагнетиках*, Наука, Москва (1973).
8. А.Ф. Андреев, В. И. Марченко, *УФН* **130**, 29 (1980).
9. Е.А. Туров, А.В. Колчанов, В.В. Меньшенин, И.Ф. Мирсаев, В.В. Николаев, *Симметрия и физические свойства антиферромагнетиков*, Физматлит, Москва (2001).
10. H.J. Mikeska and M. Steiner, *Adv. Phys.* **40**, 191 (1991).
11. Б.А. Иванов, *ФНТ* **31**, 841 (2005) [*Low Temp. Phys.* **31**, 635 (2005)].
12. И.В. Барьяхтар, Б.А. Иванов, *ФНТ* **5**, 759 (1979) [*Sov. J. Low Temp. Phys.* **5**, 361 (1979)].
13. H-J. Mikeska, *J. Phys. C* **13**, 2913 (1980).
14. В.Г. Барьяхтар, Б.А. Иванов, М.В. Четкин, *УФН* **146**, 417 (1985).
15. В.А. Ivanov and А.К. Kolezhuk, *Phys. Rev. Lett.* **74**, 1859 (1995).
16. V.G. Bar'yakhtar, M.V. Chetkin, В.А. Ivanov, and S.N. Gadetskii, *Springer Tracts in Modern Physics*, Springer-Verlag (1994).
17. Б.А. Иванов, В.Е. Киреев, *ЖЭТФ* **121**, 320 (2002).
18. В.А. Ivanov and V.E. Kireev, *Phys. Rev. B* **70**, 214430 (2004).
19. Б.А. Иванов, В.Е. Киреев, *ЖЭТФ* **134**, 525 (2008).
20. В.А. Ivanov and А.К. Kolezhuk, *Phys. Rev. B* **68**, 052401 (2003).

21. A. Kirilyuk, A.V. Kimel, and Th. Rasing, *Rev. Mod. Phys.* **82**, 2731 (2010).
22. A.V. Kimel, B.A. Ivanov, R.V. Pisarev, P.A. Usachev, A. Kirilyuk, and Th. Rasing, *Nature Phys.* **5**, 727 (2009).
23. T. Satoh, S.-J. Cho, R. Iida, T. Shimura, K. Kuroda, H. Ueda, Y. Ueda, B.A. Ivanov, F. Nori, and M. Fiebig, *Phys. Rev. Lett.* **105**, 077402 (2010).
24. A.V. Kimel, A. Kirilyuk, P.A. Usachev, R.V. Pisarev, A.M. Balbashov, and Th. Rasing, *Nature (London)* **435**, 655 (2005).
25. В.Г. Барьяхтар, В.Л. Соболев, А.Г. Квирикадзе, *ЖЭТФ* **65**, 790 (1973).
26. S. Tyc and V.I. Halperin, *Phys. Rev. B* **42**, 2096 (1990).
27. B.A. Ivanov and A.L. Sukstanskii, *J. Magn. Magn. Mater.* **117**, 102 (1992).
28. А.Ф. Андреев, И.А. Грищук, *ЖЭТФ* **87**, 467 (1984).
29. В.И. Бутрим, А.С. Кузнецов, *Уч. Зан. ТНУ* **22**, 74 (2009).
30. S. Chakravarty, V.I. Halperin, and D.R. Nelson, *Phys. Rev. B* **39**, 2433 (1989).
31. В.И. Бутрим, Б.А. Иванов, А.С. Кузнецов, Р.С. Химин, *ФНТ* **34**, 1266 (2008) [*Low Temp. Phys.* **34**, 997 (2008)].
32. В.Г. Барьяхтар, В.Н. Криворучко, Д.А. Яблонский, *Функции Грина в теории магнетизма*, Наукова думка, Киев (1984).

Specific features of relaxation of magnons in an easy-plane antiferromagnet in the framework of sigma-model

V.I. Butrim and B.A. Ivanov

It is shown that for the anisotropic sigma-model with an easy-plane anisotropy an abnormal behavior of damping of quasi-particles (magnons) take place. For gapless elementary excitations with linear dispersion law at small wave vectors, the damping decrement is proportional of the forth power of frequency (not quadratic over frequency, as for standard goldstone quasi-particles, for example, for purely isotropic sigma-model), that can noted as a “supergoldstone” behavior of damping. As usually, the damping decrement for the second branch of quasi-particles, having finite activation, has finite value at small wave vectors. But this damping decrement has peculiarities too, namely, at low temperatures it has a power dependence on the temperature, and not contains the standard exponentially small temperature multiplier.

PACS: 75.10.Jm Quantized spin models;
75.10.Hk Classical spin models.

Keywords: anisotropic sigma-model, relaxation of magnons, goldstone quasiparticles, antiferromagnet, spin nematic.