

## О термодинамике квантовых жидкостей

Е.В. Лебедева<sup>1</sup>, А.М. Дюгаев<sup>2,3</sup>, П.Д. Григорьев<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Институт физики твердого тела РАН, Черноголовка, Московская обл., 142432, Россия

E-mail: lebedeva@issp.ac.ru

<sup>2</sup>Институт теоретической физики им. Л.Д. Ландау РАН, Черноголовка, Московская обл., 142432, Россия

<sup>3</sup>Max-Planck-Institut for the Physics of Complex Systems, Dresden D-01187, Germany

Статья поступила в редакцию 23 сентября 2013 г., опубликована онлайн 21 апреля 2014 г.

Определены термодинамические характеристики жидких  $^4\text{He}$  и  $^3\text{He}$  в той области температур, где эффектами статистики частиц можно пренебречь. С точностью до малых обменных эффектов на основе опытных данных найдена зависимость кинетических энергий  $K_4^0(n)$  и  $K_3^0(n)$  жидких  $^4\text{He}$  и  $^3\text{He}$  от плотности  $n$  при  $T=0$ . Потенциальные энергии  $V_4^0(n)$  и  $V_3^0(n)$  с большой точностью неразличимы и линейно зависят от плотности  $n$ . Кинетические энергии  $K$  обратно пропорциональны массе атома  $M$ :  $K_4^0(n) \cong (3/4)K_3^0(n)$ . Предложена диффузионная модель квантовых невырожденных жидкостей в применении к жидкому  $^4\text{He}$ . Детальное сравнение теории и опыта выявило наличие квантового скейлинга. Выбором масштаба температуры оказалось возможным найти приведенные термодинамические характеристики квантовых невырожденных жидкостей, которые слабо зависят от плотности среды и статистики частиц.

Визначено термодинамічні характеристики рідких  $^4\text{He}$  і  $^3\text{He}$  в тій області температур, де ефектами статистики частинок можна знехтувати. З точністю до малих обмінних ефектів на основі дослідних даних знайдено залежність кінетичних енергій  $K_4^0(n)$  і  $K_3^0(n)$  рідких  $^4\text{He}$  та  $^3\text{He}$  від щільності  $n$  при  $T=0$ . Потенційні енергії  $V_4^0(n)$  та  $V_3^0(n)$  з великою точністю нерозрізненні і лінійно залежать від щільності  $n$ . Кінетичні енергії  $K$  обернено пропорційні масі атома  $M$ :  $K_4^0(n) \cong (3/4)K_3^0(n)$ . Запропоновано дифузійну модель квантових невинроджених рідин в застосуванні до рідкого  $^4\text{He}$ . Детальне порівняння теорії і досвіду виявило наявність квантового скейлінга. Вибором масштабу температури виявилось можливим знайти наведені термодинамічні характеристики квантових невинроджених рідин, які слабо залежать від щільності середовища і статистики частинок.

PACS: 67.10.-j Квантовые жидкости: основные свойства.

Ключевые слова: диффузионная модель, квантовые невырожденные жидкости, квантовый скейлинг.

### 1. Введение

Одной из важнейших характеристик любой конденсированной среды является кинетическая энергия одного атома  $K(n, T)$ , где  $n$  — плотность, а  $T$  — температура. Связь параметра  $K$  с импульсным распределением атомов  $n_p = n_p(n, T)$  дается известным соотношением [1]

$$K = \frac{\hbar^2}{2M} \overline{p^2}; \quad \overline{p^2} = \frac{1}{n} \int \frac{n_p p^2}{(2\pi)^3} d^3 \mathbf{p}; \quad n = \int \frac{n_p}{(2\pi)^3} d^3 \mathbf{p}. \quad (1)$$

Для классического одноатомного газа или жидкости  $K \cong \frac{3}{2}T$  с точностью до малых квантовых поправок. Такой классической средой является, например, жидкий

Ne [2]. Квантовость среды определяется величиной параметра де Буря  $\Lambda^2$  [3]:

$$\Lambda^2 = \frac{\hbar^2}{Mr_0^2 \epsilon_0}, \quad (2)$$

где  $M$  — масса атома,  $r_0$  и  $\epsilon_0$  — масштаб и глубина потенциала взаимодействия атомов  $v(r)$ . Только для конденсированных гелия и водорода параметр  $\Lambda^2$  велик:

$$\Lambda^2 = 9,5 \text{ (} ^3\text{He)}, \quad \Lambda^2 = 7,2 \text{ (} ^4\text{He)}, \\ \Lambda^2 = 3 \text{ (H}_2\text{)} \text{ и } \Lambda^2 = 1,5 \text{ (D}_2\text{)}.$$

Для жидкого Ne параметр  $\Lambda^2 = 0,36$  мал и при вычислении  $K$  из (1) применимо классическое приближение

$$n_p \sim \exp\left(-\frac{\hbar^2 p^2}{2MT}\right). \quad (3)$$

Для жидкого гелия при низких температурах выражение (3) не имеет места, поэтому импульсное распределение атомов  $n_p$  определяется на опыте через значение структурного фактора в импульсном приближении [4]:

$$S(k, \omega) = \frac{1}{n} \int \frac{n_p}{(2\pi)^3} \delta\left(\omega - \frac{k^2}{2M} + \frac{\mathbf{k}\mathbf{p}}{M}\right) d^3\mathbf{p}. \quad (4)$$

Интегральная связь  $S(k, \omega)$  и  $n_p$  (4) плохо определяет импульсное распределение частиц  $n_p$  при больших  $p$ , т.е. в области, которая дает главный вклад в значение  $p^2$  (1). В работе [5] мы предложили метод определения параметра  $K$ , применимый для конденсированных сред с большим параметром де Буря ( $\Lambda^2 \gg 1$ ). Ниже мы определяем основные термодинамические величины жидкого  ${}^4\text{He}$ , основываясь на этом методе. Предлагаемая нами работа, по своей сути, дает обобщение теории квантовых невырожденных жидкостей, предложенной в серии статей [6–8].

## 2. Энергия основного состояния квантовых жидкостей

Для определения значений основных энергетических параметров квантовых невырожденных жидкостей мы используем самые общие выражения для полной энергии на один атом  $E$

$$E(n, T) = K(n, T) + V(n, T), \\ V(n, T) = \frac{n}{2} \int v(r) g(r, n, T) d^3\mathbf{r}. \quad (5)$$

Здесь  $K$  (1) — кинетическая,  $V$  — потенциальная энергия. Слабая зависимость парной корреляционной функции  $g$  от массы атома и статистики частиц была установлена в экспериментах по рассеянию рентгеновских лучей на атомах  ${}^4\text{He}$  и  ${}^3\text{He}$  при низких температурах [9]. Она подтверждается также результатами, полученными численными методами [10,11]. Согласно теории квантовых невырожденных жидкостей [6–8], при условии  $\Lambda^2 \gg 1$  корреляционная функция  $g$  слабо зависит от плотности  $n$ , при этом  $V(n, 0) \equiv V^0(n) \sim n$ . Вследствие этого с точностью до малых эффектов статистики частиц имеют место соотношения между параметрами  $V_4^0(n)$ ,  $V_3^0(n)$ ,  $K_4^0(n)$  и  $K_3^0(n)$  — потенциальной и кинетической энергий атомов  ${}^4\text{He}$  и  ${}^3\text{He}$  при  $T = 0$ .

$$V_3^0(n) = V_4^0(n); \quad (6)$$

$$K_3^0(n) = \frac{4}{3} K_4^0(n). \quad (7)$$

В пределе  $\Lambda^2 \rightarrow \infty$  выражения (6), (7) становятся точными. Соотношение (7) есть следствие независимости импульсного распределения  $n_p$  и  $p^2$  (1) от массы атома

$M$  и постоянной Планка  $\hbar$ . Эта независимость видна и в газовом приближении [12,13]. Таким образом, параметр  $K$  (1) обратно пропорционален массе атома  $M$ .

С помощью (5), (6) и (7) можно выразить  $K_4^0$ ,  $K_3^0$  и  $V^0$  через энергии основного состояния  $E_4^0(n)$  и  $E_3^0(n)$ :

$$V^0(n) = 4E_4^0(n) - 3E_3^0(n); \\ K_4^0(n) = 3[E_3^0(n) - E_4^0(n)]; \\ K_3^0(n) = 4[E_3^0(n) - E_4^0(n)]. \quad (8)$$

## 3. Зависимость энергии основного состояния от плотности

Далее мы будем определять теоретически зависимость энергий основных состояний изотопов гелия  $E_4^0(n)$ ,  $E_3^0(n)$  от плотности жидкости при  $T = 0$ . Эти энергии получены на опыте по зависимости давления  $p$  и скорости звука  $u$  от плотности  $n$  [14–16]:

$$p = n^2 \frac{\partial E^0}{\partial n}; \quad Mu^2 = \frac{\partial p}{\partial n}. \quad (9)$$

Скорости звука  $u_4$  и  $u_3$  для  ${}^4\text{He}$  и  ${}^3\text{He}$  измерены с точностью до пятого знака, что позволяет найти 5 коэффициентов разложения  $E_4^0(n)$  и  $E_3^0(n)$  вблизи равновесных плотностей  $n_4^0$  и  $n_3^0$ . Это разложение удовлетворяет физическому требованию  $E(n=0) = 0$ .

$$E_4^0(n) = -7,17 + 13,67x_4^2(1 + 0,560x_4 + 0,037x_4^2 - 0,048x_4^3); \\ x_4 = n/n_4^0 - 1; \\ E_3^0(n) = -2,47 + 6,07x_3^2(1 + 0,530x_3 + 0,0140x_3^2 + 0,202x_3^3); \\ x_3 = n/n_3^0 - 1. \quad (10)$$

Равновесные плотности  ${}^4\text{He}$  и  ${}^3\text{He}$  в (10) равны

$$n_4^0 = 0,021836 \text{ \AA}^{-3}; \quad n_3^0 = 0,016355 \text{ \AA}^{-3}. \quad (11)$$

Приведем значения энергий основного состояния атомов  ${}^4\text{He}$  и  ${}^3\text{He}$ , а также значения их потенциальной и кинетической энергий при равновесных плотностях:

$$E_4^0(n_0) = -\mu_4^0 = -7,17 \text{ К}; \quad E_3^0(n_0) = -\mu_3^0 = -2,47 \text{ К}; \\ V^0(n_4^0) = -23,7 \text{ К}; \quad V^0(n_3^0) = -18,3 \text{ К}; \\ K_4^0(n_0) = 16,5 \text{ К}; \quad K_3^0(n_0) = 15,8 \text{ К}. \quad (12)$$

Заметим, что разложение (10) позволяет получить более точное с точки зрения теории выражение для энергий основных состояний в области высоких плотностей по сравнению с разложением третьего порядка по плотности, выполненным в [5].

Графики  $E_4^0(n)$ ,  $E_3^0(n)$  (10) и потенциальной энергии  $V^0(n)$  приведены на рис. 1. Видно, что, согласно (8),  $V^0$  почти линейно зависит от  $n$ . Для сравнения приведены также результаты работы [5].

Выражения (8), (10) позволяют сравнить теорию с результатами экспериментов по рассеянию нейтронов.

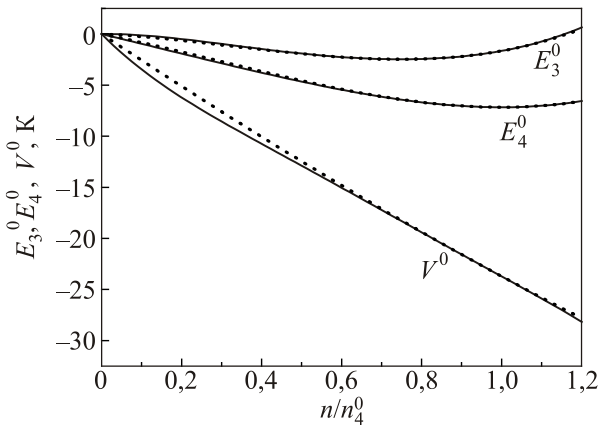


Рис. 1. Зависимость энергии  $E_3^0(n)$  и  $E_4^0(n)$  (см. формулу (10)) жидких  $^3\text{He}$  и  $^4\text{He}$  на один атом. Потенциальная энергия  $V^0(n)$  определена формулой (8),  $n_4^0$  — равновесная плотность жидкого  $^4\text{He}$ . Пунктиром изображены кривые, соответствующие представлению энергий основного состояния в виде полинома третьей степени [5].

Это сделано на рис. 2. На рис. 2(а) показан график функции  $K_4^0(n)$  (8) и экспериментальные значения кинетической энергии для атома  $^4\text{He}$  из работы [17]. Эти значения были получены в результате обработки данных по рассеянию нейтронов при температуре  $T = 0,05$  К в узкой области плотностей жидкого  $^4\text{He}$  вблизи  $n_4^0$ . Экспериментальные значения  $K_4^0(n)$  оказываются ниже теоретических на 15–20%. На рис. 2(б) значения кинетической энергии атома  $^3\text{He}$ , вычисленные по формуле (8), сравниваются с экспериментальными результатами [18], полученными при  $T = 2$  К для жидкого и твердого  $^3\text{He}$ . Видно, что экспериментальные точки также лежат ниже кривой  $K_3^0(n)$  (8).

#### 4. Зависимость энергии основного состояния от массы атома

Из (12) следует, что для жидкого  $^3\text{He}$  выполнено сильное неравенство  $\mu_3^0 \ll K_3^0(n_3^0)$ . Малая отрицательная энергия на один атом равновесного ( $n = n_3^0$ ) жидкого  $^3\text{He}$  есть результат сокращения двух больших величин разного знака:  $K_3^0(n_3^0) = 15,8$  К и  $V^0(n_3^0) = -18,3$  К. Так как  $K \sim 1/M$ , а  $V$  не зависит от  $M$ , должна существовать область параметра  $M$ , в которой энергия на один атом становится положительной. Определим зависимость энергии  $E^0(n)$  от массы атома  $M$ , рассмотрев функцию двух переменных  $E_M(n)$ . Это можно сделать на основе (5), (6), (7):

$$E_M(n) = 4E_4(n) \left(1 - \frac{3}{M}\right) + 3E_3(n) \left(\frac{4}{M} - 1\right). \quad (13)$$

Зависимость  $E_M(n)$  для характерных значений  $M$  представлена на рис. 3. Имеется три области  $M$ : нестабильная ( $M < 2,3$ ), где жидкая фаза гелия не реализуется и функция  $E_M(n)$  имеет только один газовый

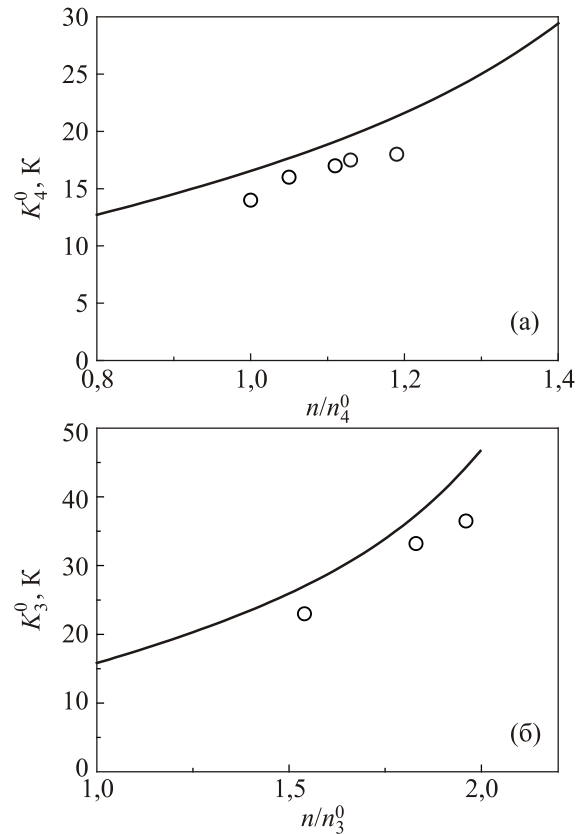


Рис. 2. Сравнение кинетических энергий атомов жидких  $^3\text{He}$  и  $^4\text{He}$  с результатами экспериментов [17,18].

минимум при  $n = 0$ ; метастабильная ( $2,3 < M < 2,55$ ), где минимальное жидкостное значение  $E_M(n_M^0)$  больше нуля; и область  $M > M_c = 2,55$ , где жидкая фаза гелия становится стабильной:  $E_M(n_M^0) < 0$  (рис. 4). Критическое значение  $M_c$  близко к 3, и термодинамические величины жидкого  $^3\text{He}$  весьма близки к метастабильной области параметров. В более общем виде

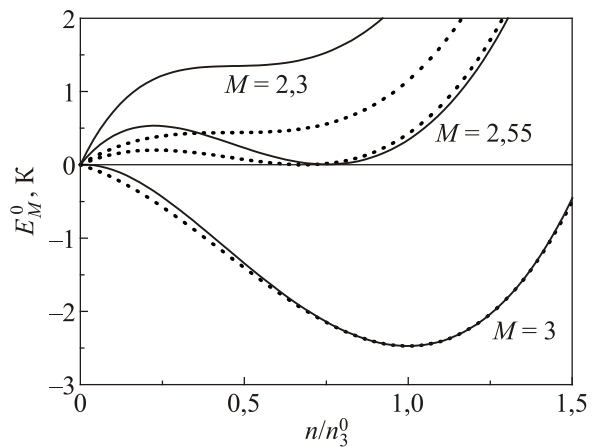


Рис. 3. Зависимость энергии  $E_M(n)$  на один атом от приведенной плотности  $n/n_3^0$  для нескольких значений массы атома  $M$ . Расчет на основе (13). Для сравнения приведены пунктирные кривые из работы [5].

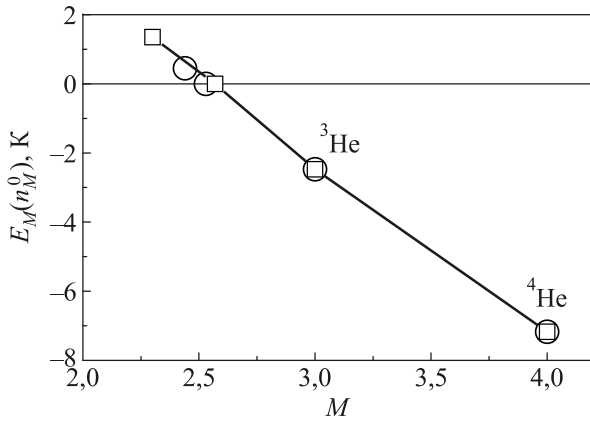


Рис. 4. Минимальное значение энергии на один атом жидкого гелия  $E_M(n_M^0)$  как функция массы  $M$ . Область  $M > 2,55$  отвечает стабильной жидкости. В области  $2,3 < M < 2,55$  жидкость метастабильна. Кружками обозначены результаты расчетов [5], где  $E_3^0(n)$  и  $E_4^0(n)$  аппроксимированы полиномом третьей степени.

закон соответственных состояний для квантовых жидкостей обоснован в [7,8] в применении к жидкому гелию и конденсированным спин-ориентированным изотопам водорода  $H_\uparrow$ ,  $D_\uparrow$ ,  $T_\uparrow$ . В этих работах показано, что жидкая фаза квантовых жидкостей существует, если параметр де Бюра (2) меньше критического значения  $\Lambda_c^2 \cong 11,2$ . Значит, существует широкий интервал значений параметра де Бюра (2)  $1 < \Lambda^2 < \Lambda_c^2$ , где конденсированная среда является квантовой жидкостью. Жидкий гелий находится вблизи верхней границы этого интервала.

### 5. Работа Хилла и Лоунасмая

В 1960 году вышла работа Хилла и Лоунасмая [19], в которой было проведено детальное исследование термодинамических свойств жидкого  $^4\text{He}$  в широком интервале плотностей  $n_4 < 1,4n_4^0$  и температур  $3\text{ K} < T < 20\text{ K}$ . Мы обработали весь массив опытных данных об энтропии  $S_4$ , теплоемкости  $C_4$  и температурной части энергии  $E^-$  жидкого  $^4\text{He}$  на основе теории квантовых невырожденных жидкостей, предложенной одним из авторов в работе [7].

Высокотемпературная зависимость энтропии  $S_4(\rho, T)$  и теплоемкости  $C_4(\rho, T)$  на одну частицу в классической области температур  $T$  характеризуется асимптотиками:

$$S_4(\rho, T) = (1 + \nu) \left( \frac{3}{2} \ln \frac{T}{T_S} + \frac{T_C}{T} \right);$$

$$C_4(\rho, T) = (1 + \nu) \left( \frac{3}{2} - \frac{T_C}{T} \right). \quad (14)$$

Параметры  $\nu$ ,  $T_C$ ,  $T_S$  зависят от плотности. По асимптотикам (14) мы определили эти параметры для девяти значений приведенной плотности (см. табл. 1). Табли-

ца 1 также содержит значения  $K_4^0$ , рассчитанные по формулам (8), (10).

Таблица 1. Параметры, определяющие зависимость термодинамических функций жидкого  $^4\text{He}$  от температуры и плотности

$\rho$	$\nu$	$T_S$	$T_C$	$K_4^0$
1,4	0,036	1,35	1,13	10,5
1,6	0,055	1,65	1,51	12,0
1,8	0,063	1,92	1,75	13,6
2,0	0,064	2,19	1,90	15,5
2,2	0,056	2,44	2,13	17,7
2,4	0,077	2,88	2,40	19,7
2,6	0,087	3,30	2,72	22,5
2,8	0,089	3,68	2,95	26,3
3,0	0,133	4,42	3,55	30,5

Характерно, что при изменении плотности в два раза параметры  $T_C$ ,  $T_S$  и  $K_4^0$  меняются почти в три раза, однако отношения  $T_C/T_S$  и  $K_4^0/T_S$  почти постоянны (рис. 5). Это означает, что для жидкого  $^4\text{He}$  нет другого энергетического масштаба, кроме нулевой кинетической энергии  $K_4^0$ . Этот масштаб с точностью до большого числа  $K_4^0/T_S \approx 2\pi$  может быть найден не только при  $T = 0$ , но и по классическому пределу энтропии жидкости (14). Отметим, что в классическом пределе энтропия конденсированной среды или газа определена только с точностью до константы. Выбор этой константы и есть определение характерного масштаба температуры.

Приведенная плотность  $\rho$  в табл. 1 связана с молярным объемом  $\nu$  жидкого гелия соотношением

$$\nu = \frac{58,18}{\rho} \text{ см}^3,$$

равновесная плотность  $n_4^0$  в этих единицах  $\rho_0 = 2,11$ .

Согласно теории [7], температурные зависимости  $S(\rho, T)$  и  $C(\rho, T)$  во всей области температур, где проводились измерения, являются универсальными (однопараметрическими), что видно на рис. 6, 7. Приведенные энтропия  $S^*(\rho, T)$  и теплоемкость  $C^*(\rho, T)$  определены выражениями

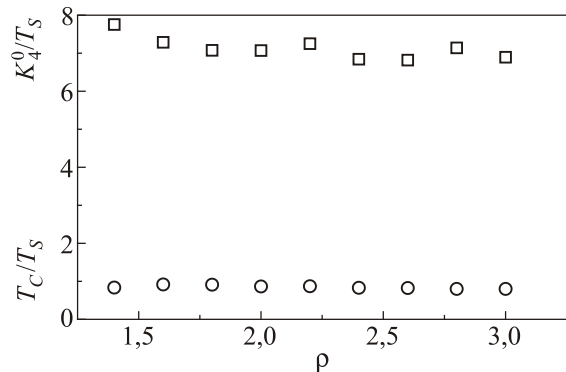


Рис. 5. Зависимости  $T_C/T_S$  (○) и  $K_4^0/T_S$  (□) от плотности  $\rho$ .  $T_C/T_S \cong 1$ ,  $K_4^0/T_S \cong 2\pi$ .

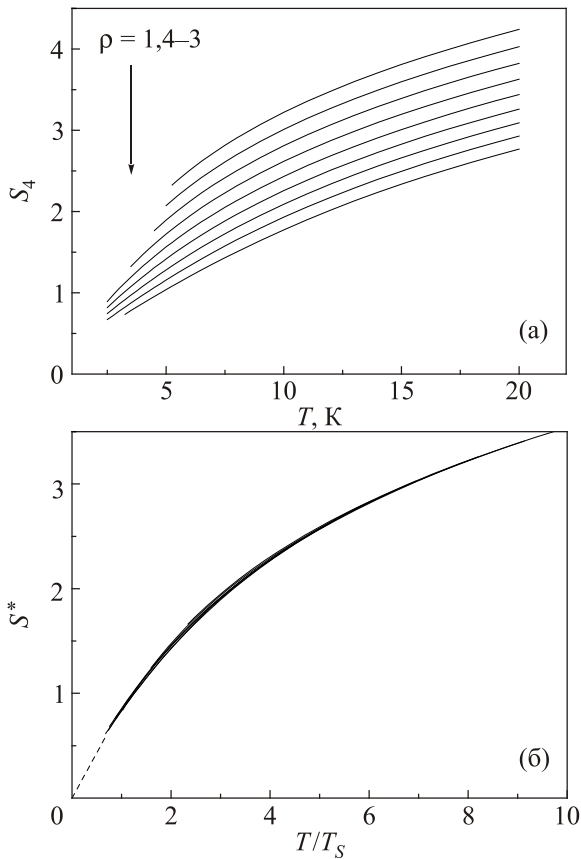


Рис. 6. Температурная зависимость энтропии жидкого  ${}^4\text{He}$   $S_4(\rho, T)$  (а) и зависимость приведенной энтропии  $S^*(\rho, T)$  (б) от приведенной температуры (15) при разных значениях приведенной плотности  $\rho = n_4 / n_K$ , данные работы [19].

$$S(\rho, T) = (1 + \nu) S^* \left( \rho, \frac{T}{T_S} \right); \quad (15)$$

$$C(\rho, T) = (1 + \nu) C^* \left( \rho, \frac{T}{T_S} \right). \quad (16)$$

Как видно из табл. 1, параметр  $\nu$  в (14) настолько мал, что он трудно определяется из опытных данных работы [19]. Согласно теории [7,8], малость  $\nu$  связана со слабым ближним порядком в жидком гелии. Для истинно дебаевской жидкости  $\nu = 1$ .

Температурная часть энергии жидкого  ${}^4\text{He}$  выражается формулой

$$E^-(\rho, T) = E(\rho, T) - E(\rho, 0^+),$$

где  $E(n, 0^+)$  есть предел  $E(n, T)$  при  $T \rightarrow 0$ , но при условии, что  $T > T_\lambda$ . Зависимость  $E^-(T)$  также оказалась однопараметрической. Температурная зависимость приведенной энергии  $E_*^-$ , определенной выражением

$$E^-(\rho, T) = (1 + \nu) T_S E_*^- \left( \rho, \frac{T}{T_S} \right), \quad (17)$$

изображена на рис. 8.

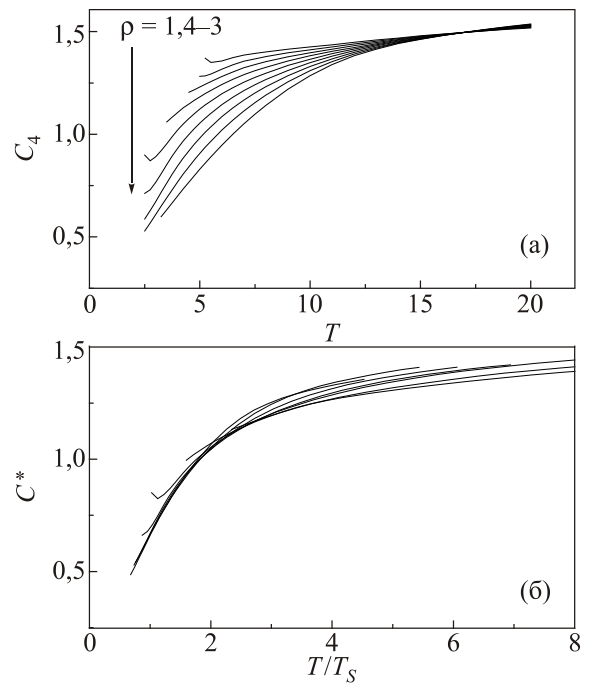


Рис. 7. Температурная зависимость теплоемкости жидкого  ${}^4\text{He}$   $C_4(\rho, T)$  (а) и зависимость приведенной теплоемкости  $C^*(\rho, T)$  (б) от приведенной температуры (16) жидкого  ${}^4\text{He}$  при разных значениях приведенной плотности.

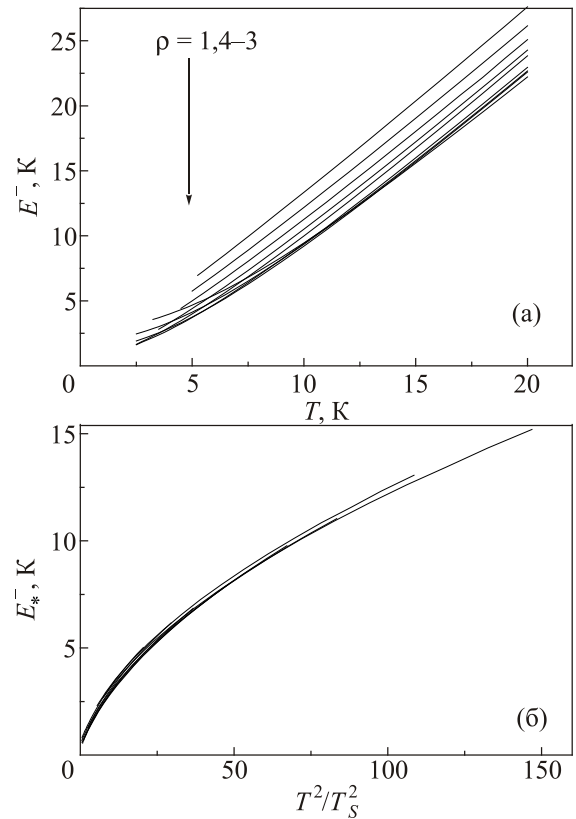


Рис. 8. Температурные зависимости энергии  $E^-(T)$  (а) и приведенной энергии  $E_*^-$  (б) жидкого  ${}^4\text{He}$  при разных значениях приведенной плотности.

**6. Диффузионная модель квантовых жидкостей**

Вклад диффузионных возбуждений в свободную энергию конденсированных сред определен нами в работе [8]. Напомним основные положения теории. Предполагается, что динамическая восприимчивость любого вида  $\chi(k, \omega)$  имеет диффузионный полюс при  $\omega = i\omega_k$

$$\chi(k, \omega) = \chi(k, 0) \frac{\omega_k}{\omega_k - i|\omega|}, \quad (18)$$

здесь  $k$  — импульс,  $\omega$  — энергия,  $\omega_k$  — спектр диффузионных возбуждений. Из (18), согласно [8], находится вклад диффузионных возбуждений в свободную энергию одного атома  $F$ . Тепловая часть  $F^- = F(T) - F(0)$  связана интегрально с плотностью состояний диффузионных возбуждений  $g(\omega)$ :

$$F^-(T) = T \int_0^\infty g(\omega) \ln(1 - e^{-\omega/T}) d\omega, \quad (19)$$

$$g(\omega) = \frac{1}{n} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{\omega_k}{\omega_k^2 + \omega^2}.$$

Из (19) и термодинамических тождеств определяются энтропия  $S(T)$  и тепловая энергия  $E^-(T) = E(T) - E(0)$  на один атом жидкости:

$$S(T) = \int_0^\infty g(\omega) [(1 + n_B) \ln(1 + n_B) - n_B \ln n_B] d\omega,$$

$$E^-(T) = \int_0^\infty g(\omega) n_B(\omega) \omega d\omega; \quad n_B(\omega) = \frac{1}{e^{\omega/T} - 1},$$

$$C(T) = \int_0^\infty g(\omega) \frac{\omega^2 d\omega}{4T^2 \sinh^2(\omega/2T)}. \quad (20)$$

Далее, поставив цель описать термодинамику жидкого  $^4\text{He}$ , следует определить функцию частотного распределения для кинетической энергии  $K^-(T) = K(T) - K(0)$ :

$$K^-(T) = \int_0^\infty g_k(\omega) n_B(\omega) \omega d\omega;$$

$$g(\omega) = (1 + \nu) g_k(\omega), \quad (21)$$

где  $\nu$  (см. табл. 1) — плохо определенный на опыте малый параметр  $\nu \ll 1$ . Поэтому далее пользуемся приближением  $g(\omega) = g_k(\omega)$ .

Функция  $g_k(\omega)$  нормирована на классический предел  $K(T)$ :

$$K^-(T \rightarrow \infty) = \frac{3}{2} T \rightarrow \int g_k(\omega) d\omega = \frac{3}{2}. \quad (22)$$

Рассмотрим две диффузионные модели. Первая — эйнштейновская модель:

$$g_k(\omega) = \frac{3}{\pi} \frac{\omega_E}{\omega_E^2 + \omega^2}. \quad (23)$$

Она отвечает приближению  $\omega_k = \omega_E$  в (19), а параметр обрезания  $k_E$  в (19) определяется условием нормировки (22). Сравнение с опытом для приведенных функций  $S^*$ ,  $C^*$  и  $E^*$  (рис. 9) определяет характерную энергию  $\omega_E = (2,7 \pm 0,1)T_S$ .

Вторая — дебаевская модель:

$$\omega_k = \omega_D k / k_D,$$

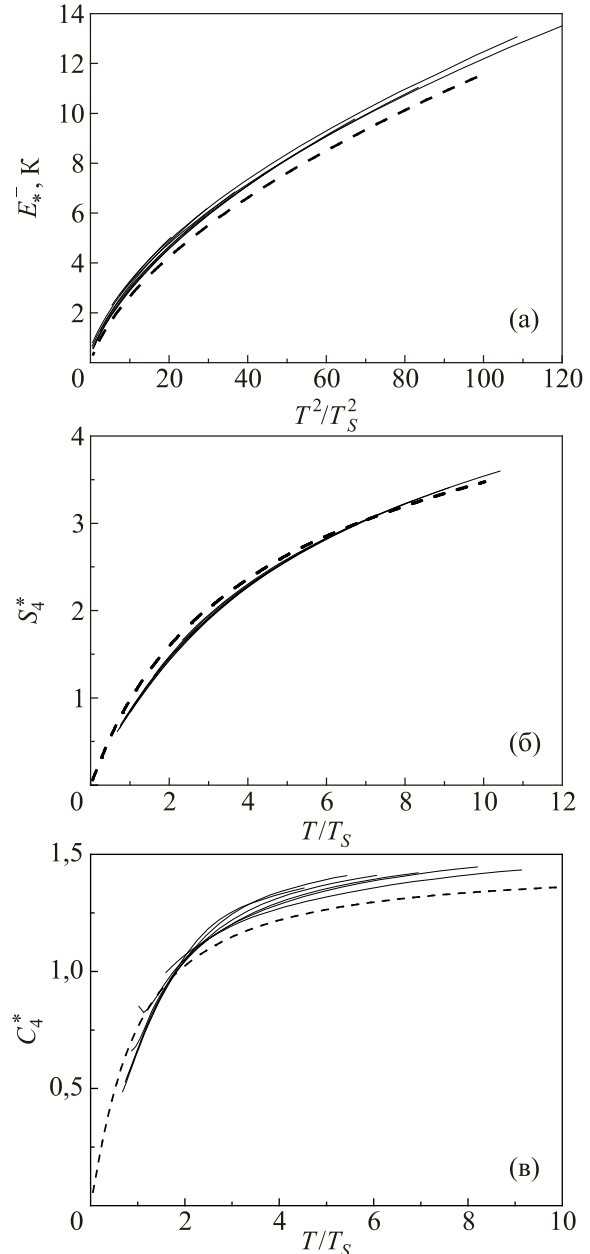


Рис. 9. Сравнение расчетных значений энергии  $E^*$  (а), энтропии  $S^*(p, T)$  (б) и теплоемкости  $C^*(p, T)$  (в) для диффузионной эйнштейновской модели с опытными данными [19]. Пунктирные линии — расчет по формулам (20), (23) при  $\omega_E = (2,7 \pm 0,1)T_S$ .

где  $k_D$ , так же как и  $k_E$ , фиксируется нормировкой (22):

$$g_k(\omega) = \frac{9}{2\pi\omega_D} \left[ 1 - \frac{\omega^2}{\omega_D^2} \ln \left( 1 + \frac{\omega_D^2}{\omega^2} \right) \right]. \quad (24)$$

Сравнение с опытом, показанное на рис. 10, определяет  $\omega_D = (4 \pm 0,1)T_S$ .

Интересно сопоставить результаты вычислений для двух диффузионных моделей в пределе  $T \rightarrow 0$ . Найдем

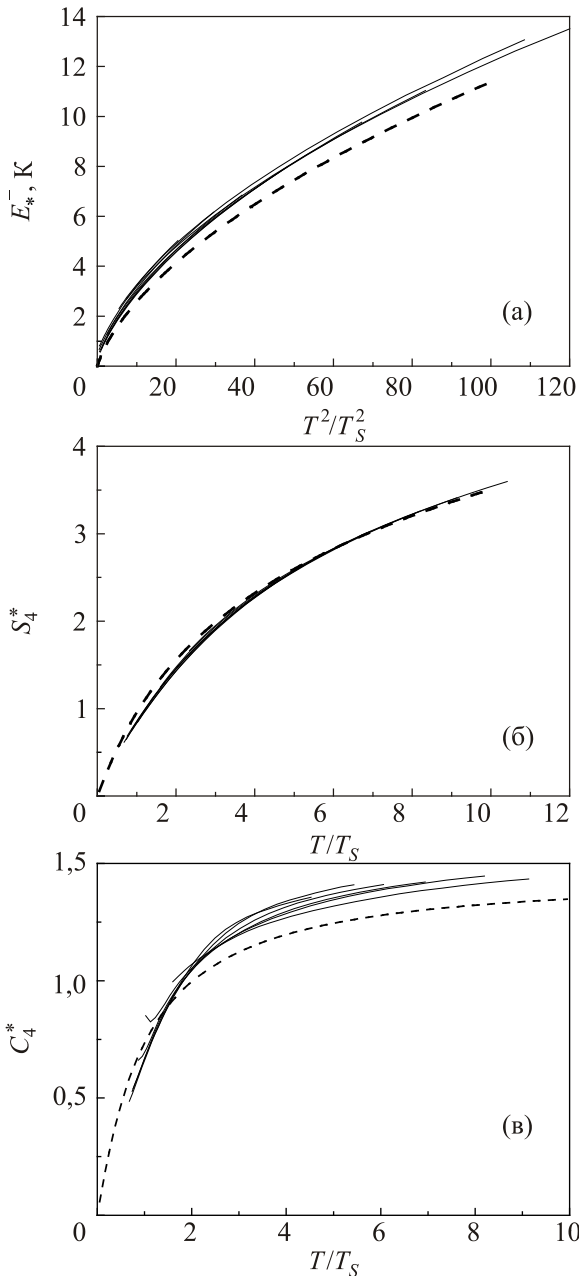


Рис. 10. Сравнение расчетных значений энергии  $E^*$  (а), энтропии  $S^*(\rho, T)$  (б) и теплоемкости  $C^*(\rho, T)$  (в) для диффузионной дебаевской модели с опытными данными [19]. Пунктирные линии — расчет по формулам (20), (24) при  $\omega_D = (4 \pm 0,1)T_S$ .

первый коэффициент разложения кинетической энергии  $K(T)$  по степеням  $T^2$ .

$$K^-(T \rightarrow 0) \approx g(0) \int_0^\infty n_B(\omega) \omega d\omega = g(0) T^2 \int_0^\infty \frac{x}{e^x - 1} dx = \frac{\pi^2}{6} g(0) T^2.$$

Для эйнштейновской модели  $g(0) = 3/\pi\omega_E \approx 0,35/T_S$ , для дебаевской модели  $g(0) = 9/2\pi\omega_D \approx 0,36/T_S$ . Совпадение результатов означает, что определяющую роль в вычислениях (18)–(24) играет условие нормировки (22), а не вид функции  $g_k(\omega)$ .

### 7. Заключение

Итак, детальное сравнение теории и опыта на примере жидкого  $^4\text{He}$  прекрасно подтверждает диффузионную модель квантовых невырожденных жидкостей, предложенную нами ранее в работах [7,8]. Для конденсированных сред с большим параметром де Буря  $\Lambda^2 \gg 1$  действует закон соответственных состояний [7], позволяющий связать свойства невырожденных жидких  $^3\text{He}$  и  $^4\text{He}$ . Квантовость гелия проявляется в слабо представленном ближнем порядке, имеющем место при  $\Lambda^2 \gg 1$ , что и определило успех диффузионной модели жидкости. Для альтернативных кристаллической и стекольной моделей жидкого гелия [20–23] детального сравнения теории и опыта не проводилось.

Мы планируем применить нашу теорию и к конденсированным изотопам водорода, которые, так же как и гелий, следует отнести к типу квантовых невырожденных жидкостей. Исследования в этом направлении мы уже начали работой [24].

Авторы выражают благодарность Л.П. Межову-Деглину за полезные обсуждения работы.

Работа поддержана грантом РФФИ № 13-02-00178.

1. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц, *Статистическая физика*, ч. 1, Наука, Москва (1976).
2. V.F. Sears, *Can. J. Phys.* **59**, 555 (1981).
3. J. de Boer, *Physica* **14**, 139 (1948).
4. P.C. Hohenberg and P.M. Platzman, *Phys. Rev.* **152**, 198 (1966).
5. А.М. Дюгаев, П.Д. Григорьев, Е.В. Лебедева *Письма ЖЭТФ* **98**, 38 (2013).
6. А.М. Дюгаев, *ЖЭТФ* **89**, 1220 (1985).
7. А.М. Дюгаев, *Письма ЖЭТФ* **42**, 442 (1985); *ЖЭТФ* **95**, 838 (1989).
8. А.М. Dyugaev, *J. Low. Temp. Phys.* **78**, 79 (1990).
9. F.K. Achter and L. Meyer, *Phys. Rev.* **188**, 291 (1969).
10. W.E. Massey, *Phys. Rev.* **151**, 153 (1966).
11. C.W. Woo, *Phys. Rev.* **151**, 138 (1966).
12. С.Т. Беляев, *ЖЭТФ* **34**, 433 (1958).
13. В.А. Беляков, *ЖЭТФ* **40**, 1210 (1961).

14. R. de Bruynouboter and C.N. Yang, *Physica B* **144**, 127 (1987).
15. R.A. Aziz and R.K. Pathria, *Phys. Rev. A* **7**, 809 (1973).
16. B.M. Abraham, Y. Eckstein, J.B. Ketterson, M. Kuchnir, and P.R. Roach, *Phys. Rev. A* **1**, 250 (1970).
17. H.R. Glyde, S.O. Diallo, R.T. Azuah, O. Kirichek, and J.W. Taylor, *Phys. Rev. B* **84**, 184506 (2011).
18. R. Senesi, C. Andreani, D. Colognesi, A. Cunsolo, and M. Nardone, *Phys. Rev. Lett.* **64**, 4584 (2001).
19. R.W. Hill and O.V. Lounasmaa, *Philos. Trans. R. Soc. London, Ser. A* **252**, 357 (1960).
20. А.Ф. Андреев, *Письма ЖЭТФ* **28**, 603 (1978); *УФН* **127**, 724 (1979).
21. А.Ф. Андреев, Ю.А. Косевич, *ЖЭТФ* **77**, 2518 (1979).
22. B. Castaing and P. Nozieres, *J. Phys.* **40**, 257 (1979).
23. D. Vollhardt, *Rev. Mod. Phys.* **56**, 99 (1984).
24. П.Д. Григорьев, А.М. Дюгаев, Е.В. Лебедева, *Письма ЖЭТФ* **87**, 114 (2008).

### About thermodynamic of quantum liquids

E.V. Lebedeva, A.M. Dyugaev, and P.D. Grigor'ev

The thermodynamic characteristics of liquid  ${}^4\text{He}$  and  ${}^3\text{He}$  are determined in the range of temperatures where the effects of particle statistics are negligible. Based on experimental data the dependence of kinetic energies of  ${}^4\text{He}$  and  ${}^3\text{He}$  on density  $n$  at  $T=0$  is found within an accuracy of small exchange effects. Potential energies  $V_4^0(n)$  and  $V_3^0(n)$  are comparable to a high accuracy and have a linear dependence on density  $n$ . Kinetic energies  $K$  are in inverse proportion to atomic mass  $M$ :  $K_4^0(n) \cong (3/4)K_3^0(n)$ . A diffusion model of quantum nondegenerate liquid is proposed for liquid  ${}^4\text{He}$ . The detailed comparison of theory and experiment shows the existence of quantum scaling. An appropriate choice of temperature scale made it possible to obtain reduced thermodynamic characteristics of quantum nondegenerate liquids, which weakly depend on density of medium and statistics of particles.

PACS: **67.10.-j** Quantum fluids: general properties.

Keywords: diffusion model, quantum nondegenerated liquid, quantum scaling.