

Плазмон–поляритоны на границе с флуктуирующим импедансом: рассеяние, локализация, устойчивость

Ю.В. Тарасов, О.В. Усатенко, Д.А. Якушев

*Институт радиофизики и электроники НАН Украины
ул. Акад. Проскуры, 12, г. Харьков, 61085, Украина
E-mail: yuriy.tarasov@gmail.com*

Статья поступила в редакцию 1 марта 2016 г., опубликована онлайн 24 июня 2016 г.

Изучается рассеяние поверхностных ТМ поляризованных плазмон-поляритонных волн (ППВ) конечным участком плоской границы металл–вакуум со случайно флуктуирующим импедансом. Анализируется решение интегрального уравнения, связывающего рассеянное поле с полем падающей ППВ, справедливое для произвольной интенсивности рассеяния и произвольных диссипативных свойств проводящей среды. В качестве меры рассеяния ППВ используется гильбертова норма рассеивающего интегрального оператора. Показано, что интенсивность рассеяния определяется не только параметрами флуктуирующего импеданса (дисперсия, корреляционный радиус, длина участка неоднородности), но также критически зависит от величины проводимости металла. При малой норме интегрального оператора ППВ рассеивается в основном в вакуум, теряя энергию на возбуждение над проводящей поверхностью квазиизотропных волн нортоновского типа. Интенсивность рассеянного поля выражается в терминах парной корреляционной функции импеданса, зависимость которой от волновых чисел налетающей и рассеянных волн демонстрирует возможность наблюдать при рассеянии ППВ на случайных флуктуациях импеданса явление, аналогичное вудовским аномалиям рассеяния волн на периодических решетках. При сильном рассеянии, когда норма рассеивающего оператора становится большой по сравнению с единицей, излучение в объем подавляется, и в пределе ППВ зеркально отражается от неоднородного участка поверхности. Поэтому в модели бездиссипативной проводящей среды поверхностный поляритон неустойчив по отношению к сколь угодно малым флуктуациям поляризуемости проводника. Зеркализация рассеяния при сильных флуктуациях импеданса интерпретируется в терминах локализации Андерсона.

Вивчається розсіяння поверхневих ТМ поляризованих плазмон-поляритонних хвиль (ППХ) кінцевою ділянкою плоскої межі метал–вакуум з імпедансом, що випадково флюктує. Аналізується рішення інтегрального рівняння, що пов'язує розсіяне поле з полем падаючої ППХ, яке є справедливим для довільної інтенсивності розсіяння і довільних дисипативних властивостей середовища, що проводить. В якості міри розсіяння ППХ використовується гільбертова норма інтегрального оператора розсіяння. Показано, що інтенсивність розсіяння визначається не тільки параметрами імпедансу, що флюктує (дисперсія, кореляційний радіус, довжина ділянки неоднорідності), але також критично залежить від величини провідності металу. При малій нормі інтегрального оператора ППХ розсіюється в основному в вакуум, втрачаючи енергію на збудження над провідною поверхнею квазіізотропних хвиль нортоновського типу. Інтенсивність розсіяного поля виражається в термінах парної кореляційної функції імпедансу, залежність якої від хвильових чисел хвиль, що налітають і розсіюються, демонструє можливість спостерігати при розсіянні ППХ на випадкових флуктуаціях імпедансу явище, аналогічне вудовським аномаліям розсіяння хвиль на періодичних ґратках. При сильному розсіянні, коли норма оператора, що розсіює, стає великою в порівнянні з одиницею, випромінювання в об'єм пригнічується, і в межі нескінченної норми ППХ дзеркально відбивається від неоднорідної ділянки поверхні. Тому в моделі бездисипативного провідного середовища поверхневий поляритон є нестійким по відношенню до скільки завгодно малих флуктуацій поляризуємості провідника. Дзеркалізація розсіяння при сильних флуктуаціях імпедансу інтерпретується в термінах локалізації Андерсона.

PACS: 73.20.Mf Коллективные возбуждения;
81.05.Xj Метаматериалы.

Ключевые слова: поверхностный плазмон–поляритон; поверхностный импеданс; поверхность металл–вакуум.

1. Введение

Современная оптика в последние десятилетия в связи с развитием нанотехнологий, лазерной и голографической техник пополнилась новым перспективным разделом — оптикой поверхностных электромагнитных волн (плазмоникой). Предметом плазмоники является изучение и практическое использование резонансного взаимодействия электромагнитных волн (света) со свободными электронами в благородных (хорошо проводящих) металлах. Эти волны существуют только в ТМ поляризации и связаны с коллективными колебаниями электронов в металле. Появление плазмоники как отдельной науки обязано, прежде всего, открытию вудовских аномалий [1] в металлических дифракционных решетках, а также резонансов Фано [2]. Именно последние и явились решающим фактором в объяснении вудовских аномалий и их связи с поверхностными плазмон-поляритонными волнами (ППВ). Существенный прогресс в понимании свойств ППВ был достигнут в работах Хесселя и Олинера [3], и в настоящее время плазмоника стала обширным полем исследований, нашедших свое отображение в многочисленных книгах и обзорах (см., например, обзоры [4–6] и цитируемую там литературу).

Интерес к исследованию плазмон-поляритонов обусловлен их уникальными свойствами, связанными с высокой степенью пространственной локализации и возможностью значительного усиления напряженности поля в электромагнитной волне. Они могут эффективно возбуждаться светом на реальной поверхности и существенно влиять на разнообразные явления в проводящих средах. Поверхностные электромагнитные моды, поддерживаемые металлической поверхностью, имеют также большой потенциал для миниатюризации различных оптических устройств. В частности, многообразие приложений привело к необходимости изучения ППВ не только на плоских поверхностях, но и на множестве иных поверхностных геометрий, таких как металлические полосы и волноводы, ребра на плоской поверхности, проволоки, плоские и неплоские одиночные и множественные поверхности и многие другие.

Важность изучения ППВ и их рассеяния на неоднородных поверхностях связана также с предполагаемой [7] возможностью существования их локализованных состояний, аналогичных состояниям, реализующимся в одномерной локализации Андерсона и связанной с многократным рассеянием [8]. Этот интерес частично может быть объяснен потенциальным применением ППВ для ультраплотной записи информации и ультрабыстрой ее обработки оптическими устройствами, в

которых делокализованные моды служили бы переносчиком энергии, в то время как локализованные позволили бы концентрировать и сохранять энергию в малых областях системы [9]. Важным обстоятельством является также то, что ППВ могут переносить информацию быстрее и с меньшими потерями энергии, чем это происходит в обычных электрических цепях.

Изучение рассеяния поверхностных возбуждений неидеальными поверхностями, активно проводившееся начиная с 80-х годов прошлого столетия, связано с необходимостью решения ряда научных и технических проблем, возникших в процессе развития плазмоники и потребовавших детального изучения механизмов ППВ рассеяния. Начиная с работы Мандельштамма 1913 года по рассеянию света на поверхности жидкостей [10] и до середины 80-х годов прошлого столетия рассеяние ППВ изучалось преимущественно в приближении однократного рассеяния. Это приближение использует либо малоамплитудную теорию возмущений, предполагающую малость отклонения поверхности от плоскости, либо приближение Кирхгофа, в котором малым параметром является кривизна поверхности (работы по градиентному рассеянию, не использующие приближение Кирхгофа, читатель может найти в [11,12]).

С момента открытия обратного когерентного отражения света — явления, тесно связанного со слабой локализацией, — интерес исследователей переместился к изучению явлений, связанных с многократным рассеянием. В этой связи был открыт ряд новых явлений, таких как подавление отражения, трансформация поляризации, возникновение запрещенных брегговских полос спектра ППВ и другие интересные явления плазмоники. Интересы исследователей постепенно переместились от изучения ППВ в простых конфигурациях проводников (сравнение подходов, а также их комбинаций и методов расчета в этой ситуации читатель может найти в работах [13,14]) к изучению рассеяния на случайных поверхностях. Наиболее интересным вопросом стало явление многократного рассеяния волн на флуктуациях рельефа поверхности и импеданса металла. Стали популярными такие методы расчета рассеяния ППВ, как метод функций Грина, импедансного граничного условия, гипотеза Рэлея, метод редуцированного уравнения Рэлея, «точного» численного интегрирования и другие [14].

Сложность электромагнитных явлений (ЭМ) при изучении ППВ привела к необходимости введения простых параметров, которые позволили легко моделировать, рассчитывать и конструировать ЭМ устройства. Среди таких простых и надежных параметров наиболее часто используется импеданс. Он позволяет

существенно упростить решение задачи и избежать необходимости рассматривать решение электродинамических уравнений в металле. Краткий обзор работ по развитию концепции импеданса, отличной от подхода Леонтовича, читатель может найти в работе [15].

Вне зависимости от метода решения задачи — точный учет рельефа поверхности или его моделирование импедансным условием — возникает необходимость изучения интегрального уравнения, описывающего процессы рассеяния ППВ. В частности, интегральное уравнение возникает в результате использования граничного условия Леонтовича (функционального уравнения) после подстановки решения уравнения Гельмгольца в виде разложения по собственным (в простейшем случае, плоским) волнам и перехода к импульсному представлению, см. ниже уравнение (17) или работу Дипайна [16].

Анализ интегрального уравнения зависит от модели металла, используемой при решении задачи. Так, в [6] (см. раздел 1.2.5) сообщается о расхождении теоретических (полученных в модели идеально проводящих металлов) и экспериментально наблюдаемых результатов по дифракции p -поляризованного света на металлических решетках, в то время как для s -поляризованного света такое расхождение не наблюдалось. Среди прочих причин такого расхождения указывалось на несоответствие модели идеального металла и реальному металлу с конечной проводимостью.

В работе [7] изучалась возможность сильной локализации ППВ, распространяющихся вдоль металлической поверхности, конечная часть которой является случайно-шероховатой — задача весьма близкая к нашей постановке. Анонсированной целью исследования было построение поверхности с такими свойствами, чтобы преобразование ППВ в объемную ЭМ волну было подавлено. Позднее, однако, в работе [17] успешность достижения этой цели была поставлена под сомнение.

В настоящей работе мы изучаем рассеяние плазмон-поляритона полосой металла конечной ширины L с флуктуирующим в ее пределах импедансом (см. рис. 1). Волновой вектор плазмон-поляритонного возбуждения лежит в плоскости металла и направлен перпендикулярно рассеивающей части поверхности. Излучение волн, обусловленное флуктуациями поверхностного импеданса, рассматривается на фоне поглощения, связанного с конечной проводимостью металла. Для анализа проблемы использован достаточно стандартный подход, заключающийся в анализе интегрального уравнения для рассеянного поля, выраженного на поверхности металла через фурье-компоненты ЭМ поля. Основная трудность в решении этого уравнения связана с наличием интегрального слагаемого, рассматриваемого обычно как малое возмущение, по степеням которого ищется решение. Нами предложен и обоснован критерий для оценки

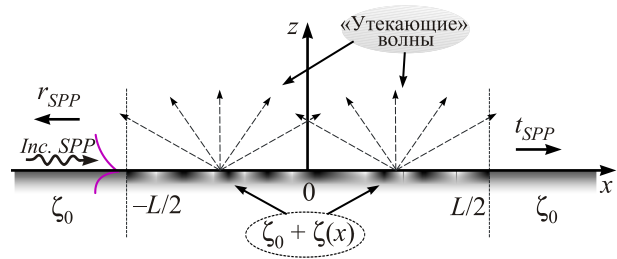


Рис. 1. Геометрия задачи о рассеянии ППВ на плоской границе с поверхностным импедансом, случайно модулированным на конечном отрезке длины L .

интенсивности рассеяния ППВ, в качестве которого использована гильбертова норма оператора перемешивания промежуточных состояний рассеяния. Грубая качественная оценка нормы такова: она пропорциональна среднеквадратичной флуктуации импеданса и обратно пропорциональна его реальной части (точная оценка дается выражением (П.15)). Нами рассчитана диаграмма направленности рассеянного излучения и показано, что при слабом рассеянии излучаемая энергия пропорциональна фурье-образу бинарной корреляционной функции импеданса, аргумент которого равен разности волнового числа поверхностного поляритона и проекции волнового вектора рассеянной гармоники поля, направленной в точку наблюдения. Такая зависимость имеет очевидное сходство с угловой зависимостью поля, рассеиваемого периодическими отражающими решетками, где в свое время Вудом [1] были обнаружены аномалии.

Особое внимание мы обращаем на другой предельный случай, когда интегральное слагаемое в управляющем уравнении является главным по сравнению с внеинтегральным. Нам удалось показать, что с ростом проводимости металла доля поля, рассеянного в вакуум, растет по сравнению с омическими потерями ППВ в металле, и одновременно растет вклад интегрального слагаемого по сравнению с неинтегральным. При сильных флуктуациях импеданса рассеянное поле имеет почти детерминированный характер и в пределе, когда диссипация носителей зарядов в металле стремится к нулю, ППВ полностью отражается от участка поверхности, содержащего флуктуирующий импеданс. Тем самым нами показано, что в модели бесконечной проводимости металла интегральное слагаемое является главным и решение любого уравнения, содержащего какие-либо неоднородности, должно начинаться с решения интегрального уравнения. Иными словами, в модели бездиссипативного металла стандартное плазмон-поляритонное решение является неустойчивым относительно бесконечно малых возмущений.

Работа организована следующим образом. Во втором разделе мы формулируем изучаемую проблему, выбираем модель решения уравнения Гельмгольца (в виде

невозмущенного и рассеянного полей) и формулируем граничные условия для поля, рассеянного неоднородным участком поверхности. В разд. 3 получено операторное решение уравнения для рассеянного поля, которое выражается через поле на поверхности раздела металл–вакуум, и вводятся корреляционные характеристики случайного комплексного импеданса. В кратком 4-м разделе приведены асимптотики амплитуды рассеяния для случаев слабого и сильного рассеянного поля ППВ, которые анализируются в 5-м разделе, содержащем наиболее важные результаты работы. Именно, рассчитаны диаграммы рассеяния поверхностного плазмон–поляритона в приближениях слабого и сильного рассеяний и предсказано явление полного отражения ППВ от участка поверхности с флуктуирующим импедансом. Заключение содержит обсуждение результатов работы, в Приложении приведены детали расчета нормы оператора рассеяния.

2. Постановка задачи

Рассмотрим двумерную задачу о рассеянии поверхностной плазмон-поляритонной волны, возбуждаемой каким-либо источником (например, щелевым [18,19]) на импедансной границе между металлом и вакуумом. На конечном участке границы импеданс предполагается случайным.

Будем считать импеданс зависящим от одной координаты и описывать его функцией, состоящей из двух комплекснозначных слагаемых,

$$Z_s(x) = \zeta_0 + \zeta(x), \quad (1)$$

первое из которых ζ_0 является постоянным, а второе $\zeta(x)$ представляет собой случайную функцию координаты x , отличную от нуля только на интервале $\mathbb{L}: x \in [-L/2, L/2]$ и имеющую на этом участке границы равное нулю среднее значение $\langle \zeta(x) \rangle = 0$. Поверхностный плазмон-поляритон представляет собой p -поляризованную (ТМ) волну, единственная отличная от нуля компонента магнитного поля которой, H_y , удовлетворяет уравнению Гельмгольца и граничному условию

$$\left[\frac{\partial H_y}{\partial z} + ikZ_s(x)H_y \right]_{z=0} = 0, \quad (2)$$

где $k = \omega/c$. Используя обозначение $H_y = H(\mathbf{r})$, где $\mathbf{r} = (x, z)$ — двумерный радиус-вектор, задачу определения магнитной компоненты поля над проводящим полупространством сформулируем в виде уравнения Гельмгольца,

$$(\Delta + k^2)H(\mathbf{r}) = 0, \quad (3)$$

где символ Δ означает (двумерный) оператор Лапласа, и импедансного граничного условия

$$\left. \left(\frac{\partial H}{\partial z} + ik[\zeta_0 + \zeta(x)]H \right) \right|_{z=0} = 0. \quad (4)$$

В силу комплексности случайной функции $\zeta(x)$ ее бинарные корреляционные свойства будем задавать с помощью приведенных ниже равенств (20), (21).

Помимо условия на границе вакуум–проводник, для решения уравнения (3) мы должны задать условия и на оси x , которые зависят от постановки задачи. Будем решать задачу рассеяния поверхностного плазмон–поляритона, налетающего на неоднородный участок границы \mathbb{L} слева и рассеивающегося в виде плоских волн во всех направлениях. Из такой постановки следует, что для рассеянного поля на больших расстояниях от рассеивающего участка должны выполняться условия открытости системы. Эти условия обычно формулируются в виде требования, чтобы на большом расстоянии рассеянное поле содержало только «убегающие» гармоники. Что же касается полного поля, включающего в себя в том числе и падающее, условия для него формулируются с учетом характера и расположения источника излучения. Мы сформулируем эти условия строго в следующем разделе.

При независимом от координат поверхностном импедансе задача (3), (4) легко решается и при условии $\text{Im} \zeta_0 < 0$ имеет в общем случае два решения следующего вида:

$$H_{SPP}^{(\pm)}(\mathbf{r}) = \mathcal{A}^{(\pm)} \exp(\pm ik_{SPP}x - i\zeta_0 kz), \quad (5)$$

$$k_{SPP} = k\sqrt{1 - \zeta_0^2}.$$

Нас будут интересовать поляритоны, распространяющиеся вдоль границы двух сред квазисвободно, на расстоянии, большие по сравнению с их длиной волны. Из (5) следует, что для этого мы должны считать выполненным неравенство

$$\zeta_0' \ll |\zeta_0''|. \quad (6)$$

Для реальных металлов мнимая часть импеданса является отрицательной и по модулю не превосходит единицу (см., например, [20]). Для константы распространения ППВ с учетом неравенства (6) получается асимптотическая формула

$$k_{SPP} = k'_{SPP} + ik''_{SPP} \approx k \left(\sqrt{1 + (\zeta_0'')^2} + i \frac{\zeta_0' |\zeta_0''|}{\sqrt{1 + (\zeta_0'')^2}} \right), \quad (7)$$

на основе которой можем ввести длину затухания ППВ, связанную с диссипацией в металлическом полупространстве,

$$L_{\text{dis}}^{(SPP)} = |k_{SPP}''|^{-1} = \frac{\sqrt{1 + (\zeta_0'')^2}}{k\zeta_0' |\zeta_0''|}. \quad (8)$$

Считая условия, необходимые для существования квазисвободного ППВ в случае однородного импеданса ($\zeta(x) \equiv 0$) выполненными, будем искать решение задачи (3), (4) в виде суммы некоторого «невозмущенного» плазмон-поляритонного решения $H_0(\mathbf{r})$ и «рассеянного» поля $h(\mathbf{r})$,

$$H(\mathbf{r}) = H_0(\mathbf{r}) + h(\mathbf{r}). \quad (9)$$

Решение $H_0(\mathbf{r})$ смоделируем в виде, принятом в одномерных задачах рассеяния. В области $x < -L/2$ представим его в виде суммы падающего слева плазмон-поляритона, имеющего в левой точке отрезка \mathbb{L} единичную амплитуду, и отраженной плазмон-поляритонной волны, распространение и диссипативное затухание которой осуществляются в противоположном направлении,

$$H_0^{(l)}(\mathbf{r}) = \exp[ik_{SPP}(x + L/2) - i\zeta_0 kz] + r_- \exp[-ik_{SPP}(x + L/2) - i\zeta_0 kz]. \quad (10)$$

Справа от \mathbb{L} выберем невозмущенное поле $H_0(\mathbf{r})$ в виде прошедшей ППВ,

$$H_0^{(r)}(\mathbf{r}) = t_+ \exp[ik_{SPP}(x - L/2) - i\zeta_0 kz]. \quad (11)$$

И, наконец, в промежуточной области $x \in \mathbb{L}$ невозмущенное поле зададим в виде суперпозиции прошедшего через левую границу области \mathbb{L} и отраженного от ее правой границы поляритонов,

$$H_0^{(in)}(\mathbf{r}) = t_- \exp[ik_{SPP}(x + L/2) - i\zeta_0 kz] + r_+ \exp[-ik_{SPP}(x - L/2) - i\zeta_0 kz]. \quad (12)$$

Отметим здесь избыточность количества произвольных констант в «затравочных» решениях (10)–(12). Ниже на них будет наложено два произвольных дополнительных условия (в виде непрерывности y -компонент рассеянного магнитного поля), устраняющие эту избыточность. Рассеянное поле $h(\mathbf{r})$ из представления (9) удовлетворяет уравнению Гельмгольца (3), но с граничным условием на поверхности $z = 0$, отличным от условия (4), а именно,

$$\left. \left(\frac{\partial h(\mathbf{r})}{\partial z} + ik[\zeta_0 + \zeta(x)]h(\mathbf{r}) \right) \right|_{z=0} = -ik\zeta(x) \{ t_- \exp[ik_{SPP}(x + L/2)] + r_+ \exp[-ik_{SPP}(x - L/2)] \}. \quad (13)$$

Более того, поскольку в областях $|x| > L/2$ условие (13) допускает решение волнового уравнения только в виде поверхностных поляритонов, а такие решения уже учте-

ны нами в формулах (10)–(12), можем считать, что в указанных областях функция $h(\mathbf{r})$ при $z = 0$ тождественно равна нулю. Что же касается условий, которым рассеянное поле должно удовлетворять в области $z > 0$, то ввиду ограниченности участка поверхности, рассматриваемого как источник этого поля, будем считать, что на больших расстояниях поле $h(\mathbf{r})$ удовлетворяет условиям излучения.

Выбор невозмущенного решения для уравнения Гельмгольца в виде набора ассоциированных с разными областями оси x функций (10)–(12) позволяет связать элементы матрицы рассеяния плазмон-поляритона с его излучением в вакуум и с диссипацией в «подстилающем» проводнике. Диссипативные потери заключены в мнимой части волнового числа (7). Что же касается радиационных потерь, то они определяются гармониками поля $h(\mathbf{r})$, «утекающими» в верхнее полупространство. Если найти поле $h(\mathbf{r})$, то, сшивая значения полного поля на границе металл–вакуум во внутренних концевых точках отрезка \mathbb{L} с плазмон-поляритонными решениями (10)–(12), взятыми на той же границе в точках $x = \pm(L/2 + 0)$, получим следующую систему равенств, связывающих коэффициенты рассеяния,

$$1 + r_- = t_- + r_+ e^{ik_{SPP}L} + h(-L/2, 0), \quad (14)$$

$$t_+ = t_- e^{ik_{SPP}L} + r_+ + h(L/2, 0). \quad (15)$$

Из нее следует, что коэффициенты рассеяния «невозмущенной» ППВ, фигурирующие в формулах (10)–(12), непосредственно связаны с неизвестным пока рассеянным полем $h(\mathbf{r})$ и должны определяться самосогласованным образом.

Это утверждение является верным даже несмотря на то, что вследствие непрерывности поля $h(\mathbf{r})$ на границах отрезка \mathbb{L} его краевые значения в (14), (15) являются нулевыми. Если учесть этот факт, то система из двух «укороченных» уравнений (14), (15) является недостаточной для определения четырех неизвестных констант, t_{\pm} и r_{\pm} . Но поскольку эти же коэффициенты фигурируют и в граничном условии (13), равенство краевых значений рассеянного поля на границе металла нулю обеспечивает два дополнительных уравнения, позволяющих однозначно определить введенные на первый взгляд искусственно коэффициенты рассеяния.

Таким образом, согласно нашей постановке задачи, падающий на неоднородный участок границы поверхностный поляритон может, с одной стороны, распространяться вдоль поверхности проводника, с той или иной вероятностью отражаться, проходя интервал \mathbb{L} неоднородности импеданса. С другой стороны, возбужденная внешним источником поверхностная ЭМ волна в результате рассеяния на неоднородном участке границы может частично или даже полностью высвечиваться из плоскости распространения в виде пакета

объемных гармоник. Комбинированное состояние поляритона в виде связанных волн, одна из которых распространяется вдоль поверхности и, возможно, локализуется в направлении распространения за счет эффективного одномерного случайного потенциала, а другие излучаются в объем («вытекающие» волны, см. рис. 1), в литературе получило название «локалитон» [21]. При анализе такого волнового образования следует отдавать себе отчет в том, что если среда в области $z < 0$ допускает проникновение в нее ЭМ волн ($\zeta'_0 = \text{Re}\zeta_0 > 0$), «высвечиваться» локалитон может как в верхнее, так и в нижнее полупространство. Физические механизмы его высвечивания в вакуум и в проводящую «подложку», однако, существенно различаются между собой.

3. Общее решение для рассеянного поля

При поиске поля $h(\mathbf{r})$ не будем ограничиваться отдельными областями на оси x , рассматривая в качестве источника этого поля для всего верхнего полупространства возмущенный участок поверхности проводника. Будем искать рассеянное поле в виде интеграла

$$h(\mathbf{r}) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dq}{2\pi} \tilde{\mathcal{R}}(q) \exp\left[iqx + i(k^2 - q^2)^{1/2}z\right], \quad (16)$$

который заведомо (по построению) удовлетворяет и волновому уравнению в свободном пространстве, и условиям излучения на бесконечности. Для определения амплитуды рассеяния $\tilde{\mathcal{R}}(q)$ воспользуемся граничным условием (13), выполнив его фурье-преобразование по переменной x . В результате приходим к следующему интегральному уравнению:

$$\begin{aligned} & \left[\zeta_0 + \sqrt{1 - (q/k)^2}\right] \tilde{\mathcal{R}}(q) + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dq'}{2\pi} \tilde{\mathcal{R}}(q') \tilde{\zeta}(q - q') = \\ & = -e^{ik_{SPP}L/2} \left[t_- \tilde{\zeta}(q - k_{SPP}) + r_+ \tilde{\zeta}(q + k_{SPP})\right]. \end{aligned} \quad (17)$$

Уравнения подобного типа анализировались ранее Дипайном в работе [16]. Однако в ней рассматривались только решения в низших порядках теории возмущений по интегральному члену. В настоящей работе мы ставим своей целью получить решение, которое было бы справедливым независимо от того, по какому из членов в левой части уравнения (17) строится теория возмущений.

Если вещественная часть поверхностного импеданса отлична от нуля ($\zeta'_0 \neq 0$), то выражение в квадратных скобках в левой части уравнения (17) на вещественной оси частот в нуль не обращается. Разделив обе части уравнения на указанный фактор, его можно переписать в виде стандартного интегрального уравнения Фредгольма второго рода [22,23],

$$\begin{aligned} & \tilde{\mathcal{R}}(q) + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dq'}{2\pi} \mathcal{L}(q, q') \tilde{\mathcal{R}}(q') = \\ & = -e^{ik_{SPP}L/2} [t_- \mathcal{L}(q, k_{SPP}) + r_+ \mathcal{L}(q, -k_{SPP})]. \end{aligned} \quad (18)$$

Ядро интегрального оператора в левой части (18) имеет вид

$$\mathcal{L}(q, q') = \left[\zeta_0 + \sqrt{1 - (q/k)^2}\right]^{-1} \tilde{\zeta}(q - q'). \quad (19)$$

При сделанных нами предположениях оно является ядром Гильберта–Шмидта, что гарантирует однозначную разрешимость уравнения (18).

В дальнейшем нас будет интересовать не само поле $h(\mathbf{r})$, являющееся, в силу постановки задачи, случайной функцией координат, а только его статистические моменты. Ввиду этого для расчетов необходимо специфицировать корреляционные свойства функции $\zeta(x)$, функционалом которой является искомое рассеянное поле. В общем случае будем считать функцию $\zeta(x)$ комплекснозначной и задавать ее равным нулю средним значением $\langle \zeta(x) \rangle = 0$ и бинарными корреляторами следующего вида:

$$\langle \zeta(x)\zeta(x') \rangle = \Xi^2 W(x - x'), \quad (20)$$

$$\langle \zeta(x)^* \zeta(x') \rangle = |\Xi|^2 W(x - x'). \quad (21)$$

Угловыми скобками $\langle \dots \rangle$ здесь и далее обозначено усреднение по реализациям случайной функции $\zeta(x)$. Комплексный параметр $\Xi = \sigma_R + i\sigma_I$, фигурирующий в формулах (20), (21), будем именовать (комплексной) дисперсией функции $\zeta(x)$. Вещественные параметры $\sigma_{R,I}$ соответственно обозначают дисперсию реальной/мнимой частей импеданса. Функцию $W(x)$ будем считать вещественной, четной, нормированной на единицу в максимуме, расположенном в точке $x = 0$, и достаточно быстро убывающей до пренебрежимо малых значений на интервале $|\Delta x| \sim r_c$ (корреляционный радиус). Поскольку в выражениях для искомого поля у нас фигурирует не сама функция $\zeta(x)$, а ее фурье-образы (см. определение (19)), из соотношений (20), (21) мы без труда получим следующие корреляционные равенства для функции $\tilde{\zeta}(q)$:

$$\langle \tilde{\zeta}(q)\tilde{\zeta}(q') \rangle = \Xi^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{ds}{2\pi} \tilde{W}(s) \Delta_L(q - s) \Delta_L(s + q'), \quad (22)$$

$$\langle \tilde{\zeta}^*(q)\tilde{\zeta}(q') \rangle = |\Xi|^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{ds}{2\pi} \tilde{W}(s) \Delta_L(q^* - s) \Delta_L(s - q'). \quad (23)$$

Здесь $\tilde{W}(k)$ — фурье-образ функции $W(x)$, $\Delta_L(k)$ — допредельная $2\pi\delta$ -функция,

$$\Delta_L(\kappa) = \int_{-L/2}^{L/2} dx \exp(\pm i\kappa x) = \frac{\sin(\kappa L/2)}{\kappa/2} \left(\xrightarrow{L \rightarrow \infty} 2\pi\delta(\kappa) \text{ при } \text{Im}\kappa = 0 \right), \quad (24)$$

которая удовлетворяет легко проверяемому соотношению

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{ds}{2\pi} \Delta_L(q-s)\Delta_L(s-q') = \Delta_L(q-q'). \quad (25)$$

Для перехода между координатным и импульсным представлениями используем преобразование Фурье следующего вида:

$$\mathcal{F}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dq}{2\pi} \tilde{\mathcal{F}}(q)e^{iqx}, \quad \tilde{\mathcal{F}}(q) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \mathcal{F}(x)e^{-iqx}. \quad (26)$$

Уравнение (18) можно решить формально, используя для этого операторный подход. С помощью оператора Фредгольма $\hat{\mathcal{L}}$, ядро которого представлено формулой (19), решение этого уравнения можно записать в виде

$$\tilde{\mathcal{R}}(q) = -e^{ik_{SPP}L/2} \langle q | (\hat{\mathbb{1}} + \hat{\mathcal{L}})^{-1} [t_- \hat{\mathcal{L}} | k_{SPP} \rangle + r_+ \hat{\mathcal{L}} | -k_{SPP} \rangle \rangle. \quad (27)$$

Здесь использованы дираковские обозначения для матричных элементов оператора с помощью bra- и ket-векторов. Оператор $\hat{\mathcal{L}}$, фигурирующий в формуле (27), представляется в виде произведения двух операторов, $\hat{\mathcal{L}} = \hat{G}^{(CP)} \hat{\zeta}_L$, где факторы $\hat{G}^{(CP)}$ и $\hat{\zeta}_L$ заданы матричными элементами

$$\langle q | \hat{G}^{(CP)} | q' \rangle = \left[\zeta_0 + \sqrt{1 - (q/k)^2} \right]^{-1} 2\pi\delta(q - q'), \quad (28)$$

$$\langle q | \hat{\zeta}_L | q' \rangle = \tilde{\zeta}(q - q'). \quad (29)$$

Первый из указанных выше операторов $\hat{G}^{(CP)}$ является пропагатором некоторого волнового образования, для которого в дальнейшем будем использовать термин композитный плазмон (смысл этого термина поясним ниже). Второй операторный фактор $\hat{\zeta}_L$ будем именовать оператором возмущения импеданса. Умножение операторных матриц определяем стандартно как интеграл вида $\int_{-\infty}^{\infty} dq/2\pi \dots | q \rangle \langle q | \dots$. Действие операторов на векторы состояний $| \cdot \rangle$ с комплексным аргументом \mathcal{K} понимается следующим образом,

$$\langle q | \hat{\mathcal{B}} | \mathcal{K} \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dq'}{2\pi} \langle q | \hat{\mathcal{B}} | q' \rangle \Delta_L(q' - \mathcal{K}). \quad (30)$$

Определение (30) связано с конечностью интервала \mathbb{L} , на котором задана функция $\zeta(x)$. Это правило позволяет избежать формальных математических трудностей при переходе из пространства вещественных волновых чисел, используемых при стандартном разложении в интеграл Фурье, к комплексным волновым числам, в частности $\pm k_{SPP}$ в равенстве (27).

Подстановка решения (27) в формулу (16) позволяет определить с любой наперед заданной точностью рассеянное поле в произвольной точке полуплоскости $z > 0$ и проанализировать, таким образом, проходящее, отраженное и излученное в верхнюю полуплоскость поле при рассеянии затравочного поверхностного поляритона на участке границы с неоднородным импедансом. Выполнить интегрирование по q в формуле (16) представляется в общем случае затруднительным ввиду нетривиальной функциональной структуры амплитуды рассеяния. Эта задача существенно упрощается в предельных случаях, допускающих разложение обратного оператора в правой части равенства (27) в функциональный степенной ряд, члены которого можно интерпретировать в терминах кратности рассеяния на возмущениях импеданса.

Чтобы выполнить требуемое разложение с математической строгостью, необходимо определить норму оператора $\hat{\mathcal{L}}$. Детальный расчет этой нормы выполнен нами в Приложении. Основываясь на полученных в нем результатах, выполним статистическое усреднение рассеянного поля в предельных случаях слабого и сильного рассеяния. Однако вначале дадим интерпретацию пропагатора $\hat{G}^{(CP)}$, фигурирующего в операторе возмущения $\hat{\mathcal{L}}$ в нашей теории, матричные элементы которого представлены формулой (28).

Формальное представление оператора, стоящего между bra- и ket-обкладками в (27), как суммы некоторого операторного степенного ряда (при $\|\hat{\mathcal{L}}\| < 1$ такое представление является очевидным и математически строгим), на первый взгляд, позволяет интерпретировать (на диаграммном языке) оператор $\hat{\zeta}_L$ как вершинный оператор, а матричные элементы (28) — как невозмущенные функции Грина рассеивающихся волновых возбуждений (предположительно — плазмон-поляритонов [18,24]). Такая интерпретация оператора $\hat{G}^{(CP)}$ не является, однако, достаточно строгой, на что указывали и сами авторы цитированных работ, и может считаться верной только в асимптотическом смысле.

Пролить свет на истинный физический смысл оператора $\hat{G}^{(CP)}$ можно, преобразовав его матричный элемент из импульсного в координатное представление. Для этого необходимо вычислить интеграл

$$\langle x | \hat{G}^{(CP)} | x' \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dq}{2\pi} \frac{e^{iq(x-x')}}{\zeta_0 + \sqrt{1 - (q/k)^2}}, \quad (31)$$

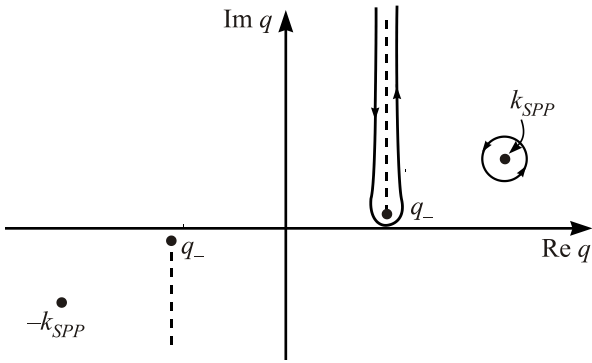


Рис. 2. Деформация контура интегрирования в формуле (31).

подынтегральная функция которого имеет в плоскости комплексной переменной q особенности двух типов — полюсы в точках $\pm k_{SPP}$ и точки ветвления $q_{\pm} = \pm(k + i0)$ (см. рис. 2). Смещение точек ветвления относительно горизонтальной оси, задающее правило обхода при контурном интегрировании, обеспечивается затуханием (возможно, инфинитезимальным), всегда присутствующим в системе.

Поскольку интеграл (31) фактически зависит от модуля разности $x - x'$, его можно вычислить, замкнув контур интегрирования в верхней полуплоскости комплексной переменной q . Поступая таким образом, мы конкретизируем выбор знака корня в определении плазмон-поляритонного волнового числа в формуле (5). Положив изначально $\text{Im } \zeta_0 < 0$, будем считать, что $\text{Im } \sqrt{1 - \zeta_0^2} > 0$. В результате расчета интеграл (31) представляется в виде суммы двух членов, обусловленных вкладами полюса в точке $q = k_{SPP}$ и берегов разреза, проведенного в верхней полуплоскости,

$$\langle x | \hat{G}^{(CP)} | x' \rangle = G_{\text{pole}}^{(CP)}(x, x') + G_{\text{br-c}}^{(CP)}(x, x'), \quad (32)$$

$$G_{\text{pole}}^{(CP)}(x, x') = \frac{ik^2 \zeta_0}{k_{SPP}} \exp(ik_{SPP} |x - x'|) = \frac{ik \zeta_0}{\sqrt{1 - \zeta_0^2}} \exp(ik \sqrt{1 - \zeta_0^2} |x - x'|), \quad (33)$$

$$G_{\text{br-c}}^{(CP)}(x, x') = \frac{ik}{\pi} e^{ik|x-x'|} \mathcal{G}(x, x'),$$

$$\mathcal{G}(x, x') = \int_0^{\infty} du e^{-uk|x-x'|} \frac{\sqrt{u(u-2i)}}{\zeta_0^2 - u(u-2i)}. \quad (34)$$

Первое, «полюсное» слагаемое в (32) представляет собой функцию Грина плазмон-поляритона — «свободной» поверхностной ЭМ волны, затухающей, однако, в направлении распространения, если «подстилающая» поверхность обладает диссипативными свойствами.

Второе, «разрезное» слагаемое также имеет волновую природу, однако амплитуда этой волны на больших расстояниях от источника (точки x') убывает пропорционально $|x - x'|^{-3/2}$. Пространственные гармоники поля, заключенные в слагаемом (34), не локализованы у поверхности проводника и представляют собой «утекающую» часть рассеянного поля. Неразрывность в пропагаторе (32) и плазмон-поляритонной и утекающей компонент рассеянного поля являются для нас основанием характеризовать состояния, описываемые пропагатором (32), как композитные плазмоны.

4. Асимптотики амплитуды рассеяния

Амплитуда рассеяния (27) записана в виде линейной комбинации матричных элементов некоторого комплекснозначного оператора

$$\hat{T} = (\mathbb{I} + \hat{\mathcal{L}})^{-1} \hat{\mathcal{L}}, \quad (35)$$

играющего роль пропагатора начальных состояний, описываемых векторами $|\pm k_{SPP}\rangle$, в конечное состояние рассеяния, которому соответствует вектор $|q\rangle$. В такой записи оператор $\hat{\mathcal{L}}$, введенный в (19), можно интерпретировать как оператор однократного рассеяния мод с произвольными x -компонентами импульса из «начального» состояния, соответствующего правому модовому индексу, в «конечную» (левую) моду, предписываемую пропагатором (28). Интенсивность такого рассеяния естественно связать с нормой оператора $\hat{\mathcal{L}}$, и в зависимости от величины этой нормы ниже мы рассмотрим предельные случаи слабого и сильного межмодового рассеяния.

4.1. Однократное рассеяние (слабое перемешивание мод)

Будем называть межмодовое рассеяние слабым, если выполнено неравенство

$$\langle \|\hat{\mathcal{L}}\|^2 \rangle \ll 1. \quad (36)$$

Разложив обратный оператор в правой части формулы (27) в операторный степенной ряд и удерживая только два первых члена этого ряда, можем записать амплитуду рассеяния в следующем приближенном виде:

$$\hat{\mathcal{R}}(q) \approx -e^{ik_{SPP}L/2} \langle q | (\hat{\mathbb{I}} - \hat{\mathcal{L}}) \left[t_- \hat{\mathcal{L}} | k_{SPP} \rangle + r_+ \hat{\mathcal{L}} | -k_{SPP} \rangle \right]. \quad (37)$$

В формуле (37) мы сохранили, помимо линейного, и квадратичное по $\hat{\mathcal{L}}$ слагаемое с тем, чтобы при необходимости можно было получить и не равный нулю вклад рассеяния в массовый оператор (поправку к спектру), который в статистической теории определяется средним полем.

4. 2. Учет многократного рассеяния (сильное перемешивание мод)

Однократным рассеянием нельзя ограничиться и, соответственно, рассеяние нельзя считать слабым, если норма оператора $\hat{\mathcal{L}}$ достигает по порядку величины единицы или, тем более, если превышает ее. Как предел сильного межмодового рассеяния ниже будем рассматривать случай, когда выполнено неравенство

$$\langle \|\hat{\mathcal{L}}\|^2 \rangle \gg 1. \quad (38)$$

При его выполнении формулу для амплитуды рассеяния (27) удобно, посредством простых алгебраических манипуляций с оператором (35), преобразовать к следующему приближенному (по параметру $\|\mathcal{L}\|^{-1}$) виду:

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{R}}(q) &= -e^{ik_{SPP}L/2} \langle q | (\hat{\mathbb{I}} + \hat{\mathcal{L}})^{-1} [t_- \hat{\mathcal{L}} | k_{SPP} \rangle + r_+ \hat{\mathcal{L}} | -k_{SPP} \rangle] = \\ &= -e^{ik_{SPP}L/2} \left[\langle q | \hat{\mathbb{I}} - (\hat{\mathbb{I}} + \hat{\mathcal{L}})^{-1} \right] [t_- | k_{SPP} \rangle + r_+ | -k_{SPP} \rangle] \\ &\approx -e^{ik_{SPP}L/2} \left\{ t_- \Delta_L(q - k_{SPP}) + r_+ \Delta_L(q + k_{SPP}) - \right. \\ &\quad \left. - \langle q | \hat{\mathcal{L}}^{-1} [t_- | k_{SPP} \rangle + r_+ | -k_{SPP} \rangle] \right\}. \quad (39) \end{aligned}$$

5. Диаграмма рассеяния поверхностного поляритона

5.1. Слабое рассеяние, $\|\mathcal{L}\| \ll 1$

Подставляя амплитуду рассеяния (37) с сохраненными в ней только линейными по $\hat{\mathcal{L}}$ членами в формулу (16), получим следующее приближенное выражение для рассеянного поля в области $z > 0$,

$$\begin{aligned} h(\mathbf{r}) &\approx -e^{ik_{SPP}L/2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dq}{2\pi} \exp(iqx + i\sqrt{k^2 - q^2}z) \times \\ &\quad \times \langle q | \hat{\mathcal{L}}(t_- | k_{SPP} \rangle + r_+ | -k_{SPP} \rangle). \quad (40) \end{aligned}$$

Пользуясь этой формулой, можно проанализировать диаграмму рассеянного поля в терминах его средней (по реализациям функции $\zeta(x)$) интенсивности. Для осмысленности статистического усреднения будем предполагать выполненным неравенство

$$r_c \ll L. \quad (41)$$

Кроме того, интенсивность будем рассматривать на большом расстоянии от рассеивающего объекта, коим

является возмущенный отрезок границы \mathbb{L} . Иными словами, будем предполагать выполненным неравенство

$$|\mathbf{r}| = \sqrt{x^2 + z^2} \gg L. \quad (42)$$

Что касается коэффициентов рассеяния t_- и r_+ , фигурирующих в подынтегральном выражении формулы (40), то, как уже отмечалось, их нужно определять самосогласованно, пользуясь равенствами (14), (15) и условиями, накладываемыми на функцию $h(\mathbf{r})$ в конечных точках отрезка \mathbb{L} на границе раздела сред. Строгая процедура определения указанных коэффициентов, хотя и проста по сути, довольно громоздка в реализации. Но если рассеяние является слабым, то из физических соображений достаточно ясно, что коэффициент t_- должен иметь значение, близкое к единице, а $r_+ \approx 0$.

Положив в формуле (40) $t_- = 1$ и $r_+ = 0$, приходим к следующему выражению для средней интенсивности рассеянного поля:

$$\begin{aligned} \langle |h(\mathbf{r})|^2 \rangle &\approx e^{-L/L_{dis}^{(SPP)}} \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{dqdq'}{(2\pi)^2} \langle \mathcal{L}^*(q, k_{SPP}) \mathcal{L}(q', k_{SPP}) \rangle \times \\ &\quad \times \exp\left[i(q - q')x + i\left(\sqrt{k^2 - q^2} - \sqrt{k^2 - q'^2}\right)z \right]. \quad (43) \end{aligned}$$

Рассмотрим входящий в нее коррелятор фредгольмовых ядер отдельно. При его вычислении возникает среднее от произведения двух фурье-образов функции $\zeta(x)$, аргументы которых в общем случае являются комплексными. Рассчитывая указанное среднее с помощью правила (23), получаем результат

$$\begin{aligned} \langle \tilde{\zeta}^*(q - k_{SPP}) \tilde{\zeta}(q' - k_{SPP}) \rangle &= \\ &= |\Xi|^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{ds}{2\pi} \tilde{W}(s) \Delta_L(s - q + k_{SPP}^*) \Delta_L(s - q' + k_{SPP}), \quad (44) \end{aligned}$$

который полностью совпадает с тем, что мы получили бы, если бы для обеих усредняемых в (44) функций воспользовались правилом (30).

Таким образом, мы приходим к следующему выражению для средней интенсивности плазмон-поляритонного поля, рассеянного в виде убегающих гармоник в верхнюю полуплоскость,

$$\langle |h(\mathbf{r})|^2 \rangle \approx |\Xi|^2 e^{-L/L_{dis}^{(SPP)}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{ds}{2\pi} \tilde{W}(s) \left| \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dq}{2\pi} \frac{\Delta_L(s - q + k_{SPP})}{\zeta_0 + \sqrt{1 - (q/k)^2}} \exp(iqx + i\sqrt{k^2 - q^2}z) \right|^2. \quad (45)$$

Вычислить в этой формуле интеграл по q точно не представляется возможным. Поэтому мы проанализируем два предельных по координате z случая.

Вначале рассмотрим область, близкую к границе $z = 0$, считая выполненным неравенство

$$kz \ll 1. \quad (46)$$

Квадратным корнем в показателе экспоненты в (45) в этом случае можно пренебречь. Подставляя Δ_L -функцию в виде интегрального представления (24), интеграл по q

мы можем вычислить тем же способом, который использовался при вычислении интеграла (31). Интеграл таким способом разбивается на два слагаемых, обусловленных вкладом плазмон-поляритонного полюса и берегов разреза,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dq}{2\pi} \frac{\Delta_L(s-q+k_{SPP})}{\zeta_0 + \sqrt{1-(q/k)^2}} \exp(iqx + i\sqrt{k^2 - q^2}z) \approx \int_{\mathbb{L}} d\xi e^{i(s+k_{SPP})\xi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dq}{2\pi} \frac{e^{iq(x-\xi)}}{\zeta_0 + \sqrt{1-(q/k)^2}} =$$

$$= \int_{\mathbb{L}} d\xi e^{i(s+k_{SPP})\xi} \left[G_{\text{pole}}^{(CP)}(x, \xi) + G_{\text{br-c}}^{(CP)}(x, \xi) \right]. \quad (47)$$

Координатная зависимость функции $G_{\text{pole}}^{(CP)}(x, \xi)$ в правой части (47) описывается экспонентой $\exp(ik_{SPP}|x-\xi|)$ (см. формулу (33)). Пренебрегая, ввиду условия (42), переменной ξ в показателе экспоненты, мы без труда получаем «полюсную» часть рассеянного поля,

$$\langle |h(\mathbf{r})|^2 \rangle|_{\text{pole}} \approx |\Xi|^2 \frac{|\zeta_0|^2 k^2}{|\sqrt{1-\zeta_0^2}|^2} e^{-(L+|x|)/L_{dis}^{(SPP)}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{ds}{2\pi} \tilde{W}(s) |\Delta_L(s+k_{SPP})|^2 \approx$$

$$\approx \frac{1}{2} |\Xi|^2 \frac{|\zeta_0|^2 k^2}{|\sqrt{1-\zeta_0^2}|^2} \tilde{W}(k_{SPP}) L_{dis}^{(SPP)} e^{-|x|/L_{dis}^{(SPP)}} \left(1 - e^{-2L/L_{dis}^{(SPP)}} \right). \quad (48)$$

Вклад берегов разреза в интеграл (47) также без труда вычисляется, и соответствующая часть интенсивности рассеянного поля имеет вид

$$\langle |h(\mathbf{r})|^2 \rangle|_{\text{br-c}} \approx |\Xi|^2 \frac{\tilde{W}(k_{SPP}) L_{dis}^{(SPP)}}{\pi |\zeta_0|^4 k |x|^3} \left(1 - e^{-2L/L_{dis}^{(SPP)}} \right). \quad (49)$$

Оба слагаемых (48), (49) малы по сравнению с интенсивностью падающей плазмон-поляритонной волны, и поэтому в слое, где эта волна распространяется, ими можно вполне обоснованно пренебречь.

Рассмотри теперь формулу (45) в предельном случае

$$kz \gg 1. \quad (50)$$

Именно такое неравенство актуально при анализе угловой диаграммы рассеяния плазмон-поляритона. В интеграле по q при условии (50) существует точка стационарности фазы

$$q_0 = k \frac{x}{R} = k \cos \varphi, \quad (51)$$

где φ — угол рассеяния, определенный, как показано на рис. 3, $R = |\mathbf{r}|$ — расстояние от центра «мишени» (рассеивающего участка поверхности) до «приемника», расположенного в точке O на полуокружности. При $kR \gg 1$ фазу экспоненты в интеграле по q формулы (45) можно разложить в окрестности точки (51) с

точностью до членов второго порядка по разности $q - q_0$,

$$\Phi(q) \approx kR - \frac{R}{2k \sin^2 \varphi} (q - q_0)^2. \quad (52)$$

Окрестность точки стационарности, вклад которой в интеграл является определяющим, по порядку величины равна

$$|\Delta q_0| \sim \frac{k \sin \varphi}{\sqrt{kR}} \ll k. \quad (53)$$

Помимо быстро осциллирующей экспоненты, еще одним фактором, «концентрирующим» вклад в интеграл

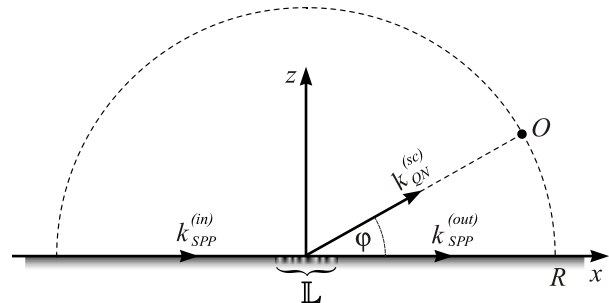


Рис. 3. Схема рассеяния поверхностного поляритона, налетающего на участок поверхности \mathbb{L} со случайно-неоднородным импедансом. Дистанция от центра рассеивающего отрезка до приемной антенны в точке O предполагается большой по сравнению с длиной L отрезка неоднородности.

по q формулы (45), служит допредельная $2\pi\delta$ -функция, $\Delta_L(q-s-k_{SPP})$, которая при $L_{dis}^{(SPP)} \gg L$ является «острой» функцией с максимумом, расположенным в точке $q_s = s + k'_{SPP}$ и с шириной порядка $|\Delta q_s| \sim 1/L$. Очевидно, что интенсивность (45) должна достигать своего максимального значения при совпадении точек q_0 и q_s , т. е. при выполнении равенства

$$s + k'_{SPP} = k \cos \varphi. \quad (54)$$

Ввиду того, что $k'_{SPP} > k$, а множество значений, принимаемых переменной s , «предписано» фурье-образом корреляционной функции импеданса, в случае $kr_c \gg 1$ выполнение равенства (54) невозможно без специального подбора спектра случайной функции $\zeta(x)$. В обратном же предельном случае $kr_c \ll 1$ даже стандартная корреляционная функция $\tilde{W}(s)$ с максимумом в нуле и с характерной шириной $|\Delta s| \sim 1/r_c$ обеспечивает воз-

можность выполнения равенства (54) вблизи своего максимального значения.

Отношение характерных ширин быстро осциллирующей экспоненты и Δ_L -функции в (45) определяется параметром

$$\mathcal{F} = \left| \frac{\Delta q_0}{\Delta q_s} \right| \sim \frac{kL \sin \varphi}{\sqrt{kR}}. \quad (55)$$

Если измерение поля производить на расстоянии, где этот параметр мал по сравнению с единицей, мы имеем дело с дифракцией Фраунгофера. Если же $\mathcal{F} \gg 1$, то формула (45) описывает дифракционную картину Френеля.

Рассмотрим первый из этих двух случаев $\mathcal{F} \ll 1$. Асимптотическое вычисление интеграла по q методом стационарной фазы дает результат

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dq}{2\pi} \frac{\Delta_L(s-q+k_{SPP})}{\zeta_0 + \sqrt{1-(q/k)^2}} \exp(iqx + i\sqrt{k^2 - q^2}z) \approx e^{i(kR - \pi/4)} \sqrt{\frac{k}{2\pi R}} \frac{\sin \varphi}{\zeta_0 + \sin \varphi} \Delta_L(s + k_{SPP} - k \cos \varphi). \quad (56)$$

Подстановка (56) в формулу (45) приводит к следующему выражению:

$$\langle |h(\mathbf{r})|^2 \rangle \approx |\Xi|^2 e^{-k''_{SPP}L} \frac{k}{2\pi R} \frac{\sin^2 \varphi}{(\zeta'_0 + \sin \varphi)^2 + (\zeta''_0)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{ds}{2\pi} \tilde{W}(s) \Delta_L(s + k_{SPP} - k \cos \varphi) \Delta_L(s + k_{SPP} - k \cos \varphi). \quad (57)$$

Обе Δ_L -функции в интеграле (57) имеют максимумы в точке $s = k \cos \varphi - k'_{SPP}$ и являются более острыми, нежели функция $\tilde{W}(s)$. Интеграл от них легко вычисляется:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{ds}{2\pi} \Delta_L(s + k_{SPP} - k \cos \varphi) \Delta_L(s + k_{SPP} - k \cos \varphi) = \frac{\text{sh}(k''_{SPP}L)}{k''_{SPP}}, \quad (58)$$

после чего средняя интенсивность рассеянного поля приобретает вид

$$\langle |h(\mathbf{r})|^2 \rangle \approx |\Xi|^2 \frac{k}{4\pi R} \frac{\sin^2 \varphi}{(\zeta'_0 + \sin \varphi)^2 + (\zeta''_0)^2} \tilde{W}(k \cos \varphi - k'_{SPP}) \frac{1}{k''_{SPP}} (1 - e^{-2k''_{SPP}L}). \quad (59)$$

На рис. 4 приведены диаграммы рассеяния, полученные численным расчетом непосредственно из формулы (45) (кривая 1) и с помощью асимптотической формулы (59) (кривая 2). Отличие обоих результатов состоит лишь в отсутствии в асимптотической диаграмме композитных плазмон-поляритонных гармоник, «прижатых» к поверхности проводника.

Хорошее соответствие обеих кривых на рис. 4 дает нам основания при дальнейшем анализе рассеянного поля в условиях $\|\hat{\mathcal{L}}\| \ll 1$ пользоваться относительно простой формулой (59). Используя эту формулу, мы рассчитали диаграммы рассеяния ППВ для разных значений диссипативной составляющей импеданса ζ_0 и, соответственно, разных значений $\|\hat{\mathcal{L}}\|$, определяемых формулой (П.15). На рис. 5 показан набор диаграмм, соответствующих фиксированному значению средней интенсив-

ности рассеянного поля $\langle |h(\mathbf{r})|^2 \rangle = 10^{-4}$. Видно, что по мере уменьшения диссипации в проводнике норма перемешивающего оператора $\hat{\mathcal{L}}$ растет и, соответственно, увеличивается эффективность рассеяния. Изознергетические кривые, показанные на рисунке, при этом все более удаляются от источника рассеяния, расположенного вблизи начала координат.

Все кривые, изображенные на рис. 5, получены при малых значениях $\|\hat{\mathcal{L}}\|$, соответствующих слабому рассеянию падающего плазмон-поляритона. А что же произойдет с этой волной, если «подстилающий» проводник делать все более «идеальным», т.е. стремиться $\zeta_0 \rightarrow 0$? При этом норма перемешивающего оператора неограниченно возрастает, и формула (59) перестает уже быть применимой. Этот предельный случай мы рассмотрим в следующем разделе.

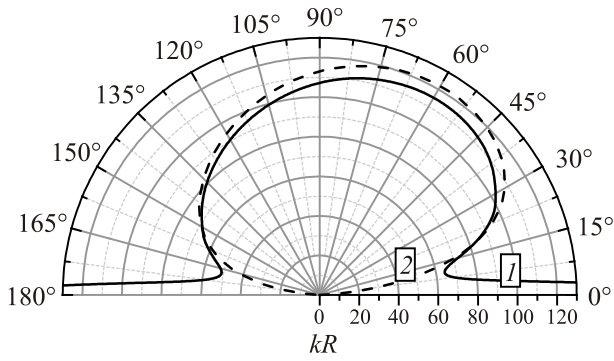


Рис. 4. Диаграмма направленности поля, рассеиваемого отрезком границы со случайным импедансом, полученная в пределе $\|\hat{\mathcal{L}}\| \ll 1$. Кривая 1 соответствует формуле (45), кривая 2 — формуле (59).

5.2. Сильное рассеяние, $\|\hat{\mathcal{L}}\| \gg 1$

Из равенства (39) в основном приближении по $\|\hat{\mathcal{L}}\|^{-1} \ll 1$ рассеянное поле может быть представлено в следующем виде:

$$h^{(0)}(\mathbf{r}) = -e^{ik_{SPP}L/2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dq}{2\pi} [t_- \Delta_L(q - k_{SPP}) + r_+ \Delta_L(q + k_{SPP})] \times \exp\left(iqx + i\sqrt{k^2 - q^2}z\right). \quad (60)$$

Полагая в формуле (60) $z = 0$, мы немедленно получаем значение рассеянного поля на границе металл-диэлектрик внутри интервала \mathbb{L} ,

$$h^{(0)}(x, 0) \approx -e^{ik_{SPP}L/2} \left(t_- e^{ik_{SPP}x} + r_+ e^{-ik_{SPP}x} \right) \quad (x \in \mathbb{L}). \quad (61)$$

Сшивая значения этого поля с его нулевыми значениями вне отрезка \mathbb{L} , получаем систему из двух уравнений для определения коэффициентов t_- и r_+ . Если нижняя среда является диссипативной, а волновое число k_{SPP} , соответственно, комплексным, система имеет только тривиальное решение $t_- = r_+ = 0$. Если же диссипацию предположить нулевой, возможным оказывается и нетривиальное решение с произвольным $t_- = \pm r_+$. Параметр распространения поляритона в этом случае оказывается квантованным условием $k_{SPP}L = n\pi$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$), которое соответствует образованию внутри \mathbb{L} своеобразного резонатора (стоячих волн). Формально резонансное отражение возникает из-за несоответствия волновых состояний внутри «неупорядоченного» отрезка \mathbb{L} и вне его [25]. Но независимо от того, имеет место в проводнике диссипация, или же нет — в обоих случаях условия сшивки (14), (15) приводят к равенствам

$$1 + r_- = 0, \quad (62)$$

$$t_+ = 0, \quad (63)$$

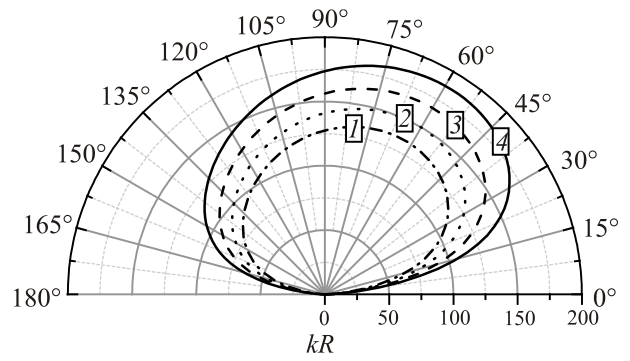


Рис. 5. Диаграммы направленности при $\|\hat{\mathcal{L}}\| \ll 1$ и разных значениях вещественной части поверхностного импеданса. Кривая 1 — $\zeta'_0 = 0,1$; 2 — $\zeta'_0 = 0,07$; 3 — $\zeta'_0 = 0,04$; 4 — $\zeta'_0 = 0,01$. Остальные параметры для всех диаграмм одинаковы, и их значения таковы: $\zeta''_0 = -0,25$; $\Xi = 0,125$; $kr_c = 0,5$; $kL = 7$.

означающим, что в основном приближении по обратной норме оператора $\hat{\mathcal{L}}$ отрезок границы с возмущением импеданса служит для налетающей ППВ практически идеальным отражателем.

В области $kz \gg 1$, где говорить о плазмон-поляритонах уже не имеет смысла, рассеянное поле можно с асимптотической точностью рассчитать на большом расстоянии от источника рассеяния, коим является возмущенный отрезок границы. Считая выполненным неравенство (42), после подстановки в (60) Δ_L -функций в интегральном виде (24) интеграл по q можно вычислить с помощью метода стационарной фазы. Процедура расчета полностью аналогична использованной в разделе 5.1, и приводит к следующему результату для рассеянного поля, который справедлив в зоне Фраунгофера ($\mathcal{F} \ll 1$),

$$h^{(0)}(\mathbf{r}) \approx -\sin \varphi \sqrt{\frac{2\pi k}{R}} \exp\left[i(kR + k_{SPP}L/2 - \pi/4)\right] \times [t_- \Delta_L(q_0 - k_{SPP}) + r_+ \Delta_L(q_0 + k_{SPP})], \quad (64)$$

q_0 — точка стационарности фазы (51). Поскольку учет даже слабой диссипации в проводнике дает нулевые значения коэффициентов t_- и r_+ , поле (64), формирующее диаграмму рассеяния, оказывается в основном приближении нулевым. Подавление утекающих волн, совместно с равенствами (62), (63) фактически означает эффективную «одномеризацию» рассеяния поверхностных поляритонов в открытой и неодномерной системе. Но следует иметь в виду, что этот эффект может иметь место только при сильном рассеянии ППВ, что фактически соответствует неравенству

$$|\Xi|^2 k^2 L_{dis}^{(SPP)} \tilde{W}(k'_{SPP}) \gg 1. \quad (65)$$

6. Обсуждение результатов

В заключение подчеркнем, что в данной работе нами построена детальная теория рассеяния плазмон-поляритонных волн отрезком границы между металлом и диэлектриком (вакуумом) со случайно распределенным на нем поверхностным импедансом. Используемый в работе операторный подход дал возможность проанализировать особенности рассеяния при любой его интенсивности, начиная от слабого рассеяния, традиционно рассматриваемого в других теориях, и заканчивая предельно сильным. Для оценки уровня рассеяния нами предложен и обоснован подходящий критерий, в качестве которого использована гильбертова норма оператора перемешивания промежуточных состояний рассеяния — композитных поляритонов. Под термином «композитные» подразумеваются смешанные состояния, представляющие собой взвешенную сумму истинно поверхностных поляритонов и специфических объемных, квазинортоновских волн, ответственных за утечку энергии в объем диэлектрика при рассеянии ППВ на дефектном участке поверхности.

Волны, посредством которых плазмон-поляритонное поле переносится в объем диэлектрика, давно уже привлекали внимание исследователей, как экспериментаторов, так и теоретиков. В частности, в работе [26] была сделана попытка (на наш взгляд, не вполне обоснованная) объяснить наблюдаемые в экспериментах острые пики локального поля в случайных металл-диэлектрических композитах андерсоновской локализацией поверхностных поляритонов. В работе [9] такая интерпретация пиков была отвергнута, а взамен предложена концепция так называемых «темных локальных мод», которые возникают, якобы, только в «ближней зоне» источников и не могут возбуждаться из «дальней зоны».

В работе [27] осцилляции ближнего поля у неоднородной границы раздела двух сред с различной диэлектрической проницаемостью получили название «ползучих» (creeping) волн, в отличие от возбуждений evanescent типа, названных так в работе [28], где эти волны, по-видимому впервые, были обнаружены экспериментально. Связь ползучих волн с интегралами по берегам разреза, возникающими в нашей теории (см. разд. 3 настоящей работы), отмечалась также в работе [29], где эти волны получили еще одно название — «переходные плазмон-поляритоны». Но наиболее близкое, на наш взгляд, соответствие волн, характеризующихся пропагатором (34), наблюдаемым в экспериментах эффектам локального поля было отмечено в работах [30–32], где эти волны ассоциировались с волнами Нортонa, первоначально предсказанными для дипольных источников, расположенных у земной поверхности [33,34].

Независимо от названия, объединяющим для всех цитированных выше работ является тот факт, что в них

обсуждалось ближнее поле, возбуждаемое квазиточечными источниками, расположенными на однородной импедансной поверхности. Вопросы, связанные с этим полем, подробно изучались также, хотя и в основном экспериментально, в работе [24]. В настоящей работе мы используем для гармоник, описываемых разрезным слагаемым в интеграле (31), термин «квазинортоновские волны» ввиду наибольшего, на наш взгляд, соответствия математической структуры этих гармоник именно волнам Нортонa.

В условиях, когда рассеяние плазмон-поляритона является слабым, а это возможно только при достаточно высоком уровне диссипации в проводнике, основным результатом рассеяния, не считая диссипативных потерь, является излучение некоторой части энергии ППВ с поверхности проводника в объем диэлектрика. Нам удалось рассчитать диаграмму направленности излучения и показать, что излучаемая энергия пропорциональна фурье-образу бинарной корреляционной функции импеданса, взятому в точке, равной разности волнового числа поверхностного поляритона и проекции на плоскость границы волнового вектора квазинортоновской гармоники, направленной в (удаленную) точку расположения приемника. Такая зависимость имеет очевидное сходство с угловой зависимостью поля, рассеиваемого периодическими отражающими решетками, на которых в свое время Вудом [1] были обнаружены аномалии в виде резонансов отражения, происхождение которых впоследствии было объяснено Фано [2]. Роль подобного рода резонансов в рассеянии ППВ на случайно-импедансном участке границы должны играть максимумы корреляционной функции импеданса. Для случайных процессов общего типа такие максимумы, как правило, располагаются вблизи нулевого значения аргумента функции корреляции, и указанная выше разность волновых чисел в них, как правило, не попадает.

Тем не менее добиться резонансного излучения в заданном направлении можно и для случайно-импедансных решеток, если сконструировать случайный процесс (переменную часть импеданса) специальным образом, задав предварительно требуемый вид корреляционной функции. Такое «конструирование» случайных процессов уже осуществлялось, например, в работах [35,36]. Таким образом, задавая случайный импеданс с нужными корреляционными свойствами, можно на практике реализовать направленное излучение поля, рассеиваемого плазмон-поляритонном при столкновении с дефектами границы.

Если параметры импеданса и плазмон-поляритонной волны таковы, что рассеяние является не слабым, а сильным, эффект от него сводится к почти зеркальному отражению налетающего поверхностного поляритона и к подавлению квазинортоновской компоненты его излучения. При этом необходимо отметить, что сильным рассеяние ППВ может становиться не только за счет

увеличения дисперсии импеданса, но также за счет уменьшения диссипативных потерь в базисном проводнике. Норма оператора перемешивания рассеянных мод обратно пропорциональна диссипативной части импеданса и может становиться сколь угодно большой даже при малых, но конечных значениях реактивной его компоненты. Ситуация здесь напоминает ту, которая имеет место при нормальном падении плоской волны на полуграниченную одномерно неупорядоченную среду, где вследствие андерсоновской локализации состояний дальнейшее проникновение поля оказывается невозможным, и падающая волна полностью (в отсутствие диссипативных потерь!) отражается в обратном направлении. Отличие нашей задачи от упомянутой одномерной состоит в том, что среда распространения у нас изначально не одномерна. Да и в целом, изучаемая нами система является неэрмитовой; а в таких системах локализация Андерсона, как правило, проявляется слабо. Эффективная «одномеризация» системы, и как следствие — отсутствие в ней утекающих волн, в нашем случае возникают как следствие интерференции волн при их многократном рассеянии на флуктуациях импеданса. При этом тот факт, что эффективность интерференции, а с ней и сила рассеяния, возрастает при уменьшении диссипации в проводнике представляется вполне естественным.

То, что при сильном рассеянии вытекание плазмон-поляритонной энергии в объем диэлектрика подавляется, несомненно, должно играть положительную роль для плазмоники. Искусственная «зеркализация» препятствий на пути распространения ППВ позволяет эффективно управлять направлением их распространения, создавая таким путем поверхностные волноводы открытого типа.

Приложение. Расчет нормы оператора $\hat{\mathcal{L}}$

Сравним действие единичного оператора и оператора $\hat{\mathcal{L}}$ на один и тот же произвольный вектор $\varphi(x)$ некоторого банахова пространства $\mathcal{B}\{\varphi\}$, свойства которого мы должны определить. Работать с оператором $\hat{\mathcal{L}}$ удобнее всего в q -представлении, ибо именно в нем матричные элементы этого оператора имеют сравнительно простой вид (см. формулы (28), (29)). Действие оператора $\hat{\mathcal{L}}$ на произвольную функцию $\tilde{\varphi}(q)$, в силу ограниченности носителя функции $\zeta(x)$, определено равенствами

$$[\hat{\mathcal{L}}\varphi](q) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dq'}{2\pi} \mathcal{L}(q, q') \tilde{\varphi}(q') = \int_{\mathbb{L}} dx \mathcal{L}(q, x) \varphi(x). \quad (\text{П.1})$$

Действительно, формально мы должны были бы написать в интеграле по x бесконечные пределы, в соответствии с используемым нами преобразованием Фурье (26). Однако ввиду того, что перекрестный матричный элемент оператора $\hat{\zeta}_L$, входящего в оператор $\hat{\mathcal{L}}$ правым фактором, имеет вид

$$\langle q | \hat{\zeta}_L | x \rangle = e^{-iqx} \zeta(x), \quad (\text{П.2})$$

мы приходим ко второму равенству в (П.1).

Для того чтобы сравнить норму оператора $\hat{\mathcal{L}}$ с нормой единичного оператора, подействуем обоими операторами на произвольную функцию $\varphi(x)$ из определенного нами класса. Нас будут интересовать функции, разложимые в интеграл Фурье на отрезке \mathbb{L} , но без предписанных граничных значений на этом отрезке. Последнее условие ставится для того, чтобы мы имели возможность рассматривать *открытые* отрезки, спектр x -компоненты импульса на которых является неквантованным.

Выберем в качестве пробной функции произвольную разложимую в интеграл Фурье функцию вида $\varphi(x) = \theta(L/2 - |x|)g(x)$. Преобразование Фурье этой функции осуществляется посредством формул

$$\varphi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dq}{2\pi} \tilde{\varphi}(q) e^{iqx}, \quad (\text{П.3a})$$

$$\tilde{\varphi}(q) = \int_{\mathbb{L}} dx g(x) e^{-iqx}. \quad (\text{П.3b})$$

Действие произвольного оператора \hat{A} на функцию $\varphi(x)$ определено равенствами

$$\begin{aligned} (\hat{A}\varphi)(x) &= \int_{\mathbb{L}} dx' \langle x | \hat{A} | x' \rangle \varphi(x') = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\kappa}{2\pi} \tilde{\varphi}(\kappa) \int_{\mathbb{L}} dx' \langle x | \hat{A} | x' \rangle e^{i\kappa x'}. \end{aligned} \quad (\text{П.4})$$

Норму вектора $\hat{A}\varphi$ определим через скалярное произведение,

$$\|\hat{A}\varphi\|^2 = (\hat{A}\varphi, \hat{A}\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\kappa_1 d\kappa_2}{(2\pi)^2} \tilde{\varphi}^*(\kappa_1) \tilde{\varphi}(\kappa_2) \int_{-\infty}^{\infty} dx \iint_{\mathbb{L}} dx_1 dx_2 \langle x | \hat{A} | x_1 \rangle^* \langle x | \hat{A} | x_2 \rangle e^{-i\kappa_1 x_1 + i\kappa_2 x_2}. \quad (\text{П.5})$$

Если \hat{A} — единичный оператор, то его действие на экспоненту, стоящую в правой части (П.4), определяется равенством

$$[\hat{\mathbb{I}} \cdot e^{i\kappa x}](x) = e^{i\kappa x} \theta(L/2 - |x|), \quad (\text{П.6})$$

и квадрат нормы вектора $\hat{\mathbb{I}} \cdot \varphi$ в силу этого оказывается равным

$$\|\hat{\mathbb{I}} \cdot \varphi\|^2 = \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{d\kappa_1 d\kappa_2}{(2\pi)^2} \tilde{\varphi}^*(\kappa_1) \tilde{\varphi}(\kappa_2) \Delta_L(\kappa_1 - \kappa_2). \quad (\text{П.7})$$

Если в качестве оператора \hat{A} мы возьмем оператор \mathcal{L} , введенный в (19), то скалярное произведение удобнее записать в виде интеграла по импульсной переменной. Действие оператора $\hat{\mathcal{L}}$ на осциллирующую экспоненту в (П.4) определяется тогда формулой

$$[\hat{\mathcal{L}} \cdot e^{ikjx'}](\kappa) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\kappa'}{2\pi} \langle \kappa | \hat{G}^{(CP)} | \kappa' \rangle \int_{\mathbb{L}} dx' \langle \kappa' | \hat{\zeta}_L | x' \rangle e^{ikjx'} = \left[\zeta_0 + \sqrt{1 - (\kappa/k)^2} \right]^{-1} \tilde{\zeta}(\kappa - \kappa_j), \quad (\text{П.8})$$

в справедливости которой нетрудно убедиться, вычислив предварительно «перекрестный» матричный элемент оператора $\hat{\zeta}_L$,

$$\langle q | \hat{\zeta}_L | x \rangle = \zeta(x) e^{-iqx}. \quad (\text{П.9})$$

Квадрат нормы вектора $\hat{\mathcal{L}}\varphi$ имеет вид

$$\|\hat{\mathcal{L}}\varphi\|^2 = \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{d\kappa_1 d\kappa_2}{(2\pi)^2} \tilde{\varphi}^*(\kappa_1) \tilde{\varphi}(\kappa_2) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\kappa}{2\pi} \left| \zeta_0 + \sqrt{1 - (\kappa/k)^2} \right|^{-2} \tilde{\zeta}^*(\kappa - \kappa_1) \tilde{\zeta}(\kappa - \kappa_2), \quad (\text{П.10})$$

и среднее от него может быть вычислено с использованием формулы (23),

$$\langle \|\hat{\mathcal{L}}\varphi\|^2 \rangle = |\Xi|^2 \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{d\kappa_1 d\kappa_2}{(2\pi)^2} \tilde{\varphi}^*(\kappa_1) \tilde{\varphi}(\kappa_2) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\kappa}{2\pi} \left| \zeta_0 + \sqrt{1 - (\kappa/k)^2} \right|^{-2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{ds}{2\pi} \tilde{W}(s) \Delta_L(s - \kappa + \kappa_1) \Delta_L(s - \kappa + \kappa_2). \quad (\text{П.11})$$

Если выполнено неравенство (41), Δ_L -функции в (П.11) являются более острыми, нежели функция $\tilde{W}(s)$. Последнюю тогда можно вынести из-под знака интеграла в точке, например, $s = \kappa - \kappa_1$, после чего получим

$$\langle \|\hat{\mathcal{L}}\varphi\|^2 \rangle \approx |\Xi|^2 \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{d\kappa_1 d\kappa_2}{(2\pi)^2} \tilde{\varphi}^*(\kappa_1) \tilde{\varphi}(\kappa_2) \Delta_L(\kappa_1 - \kappa_2) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\kappa}{2\pi} \left| \zeta_0 + \sqrt{1 - (\kappa/k)^2} \right|^{-2} \tilde{W}(\kappa - \kappa_1). \quad (\text{П.12})$$

Теперь определимся детальнее с классом используемых пробных функций. Прежде всего, они принадлежат к пространству L_2 , т.е. являются функциями с интегрируемым квадратом (модуля). Кроме того, будем предполагать, что характерный пространственный масштаб изменения этих функций мал по сравнению с длиной L или, по крайней мере, не превосходит ее по порядку величины. Собственно, мы это уже декларировали, введя в определение пробной функции фактор $\theta(L/2 - |x|)$. Отсюда сразу же следует, что характерный масштаб изменения фурье-образов пробных функций велик (или одного порядка) по сравнению с $1/L$ — шириной Δ_L -функций. Интегралы по κ_2 в (П.7) и (П.12) после этого асимптотически вычисляются, и мы получаем

$$\|\hat{\mathbb{I}} \cdot \varphi\|^2 \approx \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\kappa}{2\pi} |\tilde{\varphi}(\kappa)|^2, \quad (\text{П.13a})$$

$$\langle \|\hat{\mathcal{L}}\varphi\|^2 \rangle \approx |\Xi|^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\kappa}{2\pi} \left| \zeta_0 + \sqrt{1 - (\kappa/k)^2} \right|^{-2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\kappa_1}{2\pi} |\tilde{\varphi}(\kappa_1)|^2 \tilde{W}(\kappa - \kappa_1). \quad (\text{П.13b})$$

Рассмотрим интеграл по κ_1 в формуле (П.13b). Обе подынтегральные функции в нем, и $|\tilde{\varphi}(\kappa_1)|^2$, и $\tilde{W}(\kappa - \kappa_1)$, обладают некоторыми «макроскопическими» масштабами изменения (локализации). Для функции $\tilde{\varphi}(\kappa)$ такими масштабами могут быть $1/L$, $1/L_{dis}^{(SPP)}$ и $1/L^{(loc)}$, где под $L^{(loc)}$ будем понимать длину одномерной андерсоновской локализации, которая по порядку величины совпадает с длиной экстинкции. Все ука-

занные масштабы, учитывая условие (41), малы по сравнению с обратной длиной корреляции, $1/r_c$. Это означает, что интеграл по κ_1 в (П.13b) можно вычислить, вынеся из-под него корреляционную функцию \tilde{W} в точке $\kappa_1 = 0$. Разделив после этого (П.13b) на (П.13a), получим определение квадрата нормы оператора \mathcal{L} , не зависящее от конкретики пробных функций, за исключением сделанных нами выше предположений,

$$\langle \|\hat{\mathcal{L}}\|^2 \rangle = |\Xi|^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\kappa}{2\pi} \left| \zeta_0 + \sqrt{1 - (\kappa/k)^2} \right|^{-2} \tilde{W}(\kappa). \quad (\text{П.14})$$

В рамках этих предположений функцию $\tilde{W}(\kappa)$ можно вынести из-под интеграла по κ в точках максимума первого подынтегрального фактора, $\kappa_{\pm} = \pm k'_{SPP}$. В результате мы получаем

$$\langle \|\hat{\mathcal{L}}\|^2 \rangle \approx |\Xi|^2 \frac{k |\zeta'_0|}{\zeta'_0 \sqrt{1 + (\zeta''_0)^2}} \frac{1}{2} \sum_{\pm} \tilde{W}(\pm k'_{SPP}). \quad (\text{П.15})$$

Правая часть равенства (П.15) может принимать как малые, так и большие значения по сравнению с единицей. Действительно, функция $\tilde{W}(\pm k'_{SPP})$ оценивается по максимуму величиной $\sim r_c$ (при $kr_c \lesssim 1$). Однако вещественная часть импеданса ζ'_0 снизу не лимитирована. Это означает, что при достаточно слабой диссипации в «подстилающем» проводнике приближение слабого рассеяния (линейная по $\hat{\mathcal{L}}$ аппроксимация пропагатора (35)) вполне может быть некорректным.

Предположения, сделанные нами относительно характерных масштабов локализации пробных функций, можно, конечно, ослабить. Например, можно предположить корреляционный радиус импеданса достаточно большим. Тогда при вычислении интеграла по κ_1 в формуле (П.13б) мы должны были бы выносить из-под интеграла не корреляционную функцию, а парциальную интенсивность $|\tilde{\varphi}(\kappa_1)|^2$ в точке $\kappa_1 = \kappa$. Представляется, однако, что это не должно радикально сказаться на порядковой оценке интеграла по κ .

1. R.W. Wood, *Proc. Phys. Soc. London* **18**, 269 (1902).
2. U. Fano, *J. Opt. Soc. Am.* **31**, 213 (1941).
3. A. Hessel and A.A. Oliner, *Appl. Optics* **4**, 1275 (1965).
4. A.V. Zayats, I.I. Smolyaninov, and A.A. Maradudin, *Phys. Rep.* **408**, 131 (2005).
5. Zh. Han and S.I. Bozhevolnyi, *Rep. Prog. Phys.* **76**, 016402 (2013).
6. S. Enoch and N. Bonod (eds.), *Plasmonics: From Basics to Advanced Topics*, Springer Series in Optical Sciences, Springer-Verlag, Berlin (2012).
7. A.A. Maradudin, I. Simonsen, T.A. Leskova, and E.R. Méndez, *Physica B* **296**, 85, (2001).
8. P.W. Anderson, *Phys. Rev.* **109**, 1492 (1958).
9. M.I. Stockman, S.V. Faleev, and D.J. Bergman, *Phys. Rev. Lett.* **87**, 167401 (2001).
10. L.I. Mandel'shtam, *Ann. Physik* **41**, 609 (1913).
11. V.O. Goryashko, Yu.V. Tarasov, and L.D. Shostenko, *Waves in Random and Complex Media* **23**, 89 (2013).
12. Yu.V. Tarasov and L.D. Shostenko, *Ann. Phys.* **356**, 95 (2015).
13. A.Yu. Nikitin, F. López-Tejiera, and L. Martn-Moreno, *Phys. Rev. B* **75**, 035129 (2007).
14. J. Polanco, R.M. Fitzgerald, and A.A. Maradudin, *Phys. Rev. B* **87**, 155417 (2013).

15. T. Kaiser, S. Bin Hasan, T. Paul, T. Pertsch, and C. Rockstuhl, *Phys. Rev. B* **88**, 035117 (2013).
16. R.A. Depine, *J. Opt. Soc. Am. A* **9**, 609 (1992).
17. V. Coello, *Surf. Rev. Lett.* **15**, 867 (2008).
18. F. López-Tejiera, F.J. Garca-Vidal, and L. Martn-Moreno, *Phys. Rev. B* **72**, 161405(R) (2005).
19. F. López-Tejiera, F.J. Garca-Vidal, and L. Martn-Moreno, *Appl. Phys. A* **89**, 251 (2007).
20. Edward D. Palik, *Handbook of Optical Constants of Solids*, Academic Press, San Diego (1998).
21. D. Maestre and M. Saillard, *J. Opt. Soc. Am. A* **11**, 680 (1994).
22. А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин, *Элементы теории функций и функционального анализа*, Наука, Москва (1968).
23. R. Courant and D. Hilbert, *Methods of Mathematical physics*, Vol. I, Interscience publishers, New York (1966).
24. F. López-Tejiera, S.G. Rodrigo, L. Martn-Moreno, F.J. Garca-Vidal, E. Devaux, J. Dintinger, T.W. Ebbesen, J.R. Krenn, I.P. Radko, S.I. Bozhevolnyi, M.U. González, J.C. Weeber, and A. Dereux, *New J. Phys.* **10**, 033035 (2008).
25. Резонансные осцилляции аналогичной природы описаны в работе [12] при решении задачи о распространении волн в волноводах, содержащих отрезок со слабошероховатыми стенками.
26. A.K. Sarychev, V.A. Shubin, and V.M. Shalaev, *Phys. Rev. B* **60**, 16389 (1999).
27. P. Lalanne and J.P. Hugonin, *Nat. Phys.* **2**, 551 (2006).
28. G. Gay, O. Alloschery, B. Viaris de Lesegno, C. O'Dwyer, J. Weiner, and H.J. Lezec, *Nat. Phys.* **2**, 262 (2006).
29. Y. Gravel and Y. Sheng, *Opt. Express* **16**, 21903 (2008).
30. A.Yu. Nikitin, S.G. Rodrigo, F.J. Garca-Vidal, and L. Martn-Moreno, *New J. Phys.* **11**, 123020 (2009).
31. A.Yu. Nikitin, F.J. Garca-Vidal, and L. Martn-Moreno, *Phys. Status Solidi RRL* **4**, 250 (2010).
32. A.Yu. Nikitin, F.J. Garca-Vidal, and L. Martn-Moreno, *Phys. Rev. B* **83**, 155448 (2011).
33. K.A. Norton, *Proc. IRE* **24**, 1367 (1936).
34. K.A. Norton, *Proc. IRE* **25**, 1203 (1937).
35. O.V. Usatenko, S.S. Apostolov, Z.A. Mayzelis, and S.S. Melnik, *Random Finite-Valued Dynamical Systems: Additive Markov Chain Approach*, Cambridge Scientific Publisher, Cambridge (2010).
36. A.A. Maystrenko, S.S. Melnik, G.M. Pritula, and O.V. Usatenko, *J. Phys. A* **46**, 395002 (2013).

Plasmon-polaritons on surface with fluctuating impedance: Scattering, localization, stability

Yu.V. Tarasov, O.V. Usatenko, and D.A. Iakushev

Scattering of surface TM polarized plasmon-polariton waves (PPW) by a finite domain of metal–vacuum interface with randomly fluctuating surface impedance is examined. Solution of the integral equation relating the scattered field with a field of the incident PPW, which is

valid for arbitrary scattering intensity and arbitrary dissipative characteristics of the conductive medium, is analyzed. As a measure of PPW scattering, the Hilbert norm of the integral scattering operator is used. The strength of the scattering is shown to be controlled not only by the parameters of the fluctuating impedance (dispersion, correlation radius, the length of inhomogeneity region) but also crucially depends on the conductivity of the metal. If the scattering operator norm is small, the PPW is mainly scattered into the vacuum, thus losing its energy for excitation of quasi-isotropic bulk Norton waves over the conducting surface. The scattered field intensity is expressed in terms of the random impedance pair correlation function, whose dependence on the incoming and scattered wavenumbers demonstrates the possibility to observe, under the random-impedance-induced scattering of PPW, the effect analogous to Wood anomalies of waves scattered

by periodic gratings. Under strong scattering, when the integral operator norm becomes large as compared to unity, the radiation into the free space is highly suppressed, and, in the limit, the incoming PPW is almost ideally backward-reflected from the inhomogeneous part of the interface. Therefore, within the model of dissipation-free conducting medium the surface polariton is unstable against arbitrary small fluctuations of the medium polarizability. The mirroring of the scattering under strong fluctuations of the impedance is interpreted in terms of the Anderson localization.

PACS: 73.20.Mf Surface plasmons;
81.05.Xj Metamaterials.

Keywords: surface plasmon–polariton; surface impedance; metal–vacuum interface.