Low Temperature Physics/Физика низких температур, 2017, т. 43, № 3, с. 420–429

О еще одном подходе к получению спектров возбуждений в вырожденном бозе-газе с дельтаобразным потенциалом взаимодействия

В.Б. Бобров[1,2], А.Г. Загородний[3], С.А. Тригер[1]

[1] *Объединенный институт высоких температур РАН, ул. Ижорская, 13, г. Москва, 125412, Россия*
E-mail: vic5907@mail.ru, satron@mail.ru

[2] *Национальный исследовательский университет «МЭИ», ул. Красноказарменная, 14, г. Москва, 111250, Россия*

[3] *Институт теоретической физики им. Н.Н. Боголюбова НАН Украины*
ул. Метрологическая, 14-б, г. Киев, 03680, Украина
E-mail: azagorodny@bitp.kiev.ua

Статья поступила в редакцию 11 июля 2016 г., опубликована онлайн 24 января 2017 г.

Предложен формализм описания равновесного бозе-газа на основе рассмотрения в макроскопическом, но конечном объеме. Наличие конденсата Бозе–Эйнштейна учитывается через недиагональный дальний порядок при переходе к термодинамическому пределу. На этой основе дано описание вырожденного бозе-газа с дельтаобразным потенциалом взаимодействия в рамках самосогласованного приближения Хартри–Фока. Получены явные выражения для энергетических спектров одночастичных и коллективных возбуждений.

Запропоновано формалізм опису рівноважного бозе-газу на основі розгляду в макроскопічному, але скінченному об’ємі. Наявність конденсату Бозе–Ейнштейна враховується через недіагональний дальній порядок при переході до термодинамічної межі. На цій основі дано опис виродженого бозе-газу з дельтаобразним потенціалом взаємодії в рамках самоузгодженого наближення Хартрі–Фока. Отримано явні вирази для енергетичних спектрів одночасткових та колективних збуджень.

PACS: 67.10.Ba Вырождение бозонов;
67.10.Fj Квантовая статистическая теория;
67.25.de Термодинамические свойства;
67.25.dt Звук и возбуждения.

Ключевые слова: вырожденный бозе-газ, конденсат Бозе–Эйнштейна, коллективные возбуждения, одночастичные возбуждения.

1. Введение

Подавляющее число работ, посвященных исследованию систем с конденсатом Бозе–Эйнштейна (Bose–Einstein condensate (BEC)), основано на использовании гипотезы Боголюбова [1] о С-числовом поведении операторов рождения и уничтожения частиц с нулевым импульсом, что приводит к появлению так называемых «аномальных» средних («квазисредних») в статистической теории (см., например, [2]). Но гипотеза Боголюбова не может быть доказана строго математически, а процедура введения квазисредних для описания систем многих частиц с BEC не является однозначной (см. [3–12] и цитированную там литературу).

Среди методов описания бозе-систем, не требующих использования формализма вторичного квантования, можно отметить метод квантовых кинетических уравнений [13,14] и метод коллективных переменных [15,16]. В частности, эти методы позволяют воспроизвести спектр возбуждений для слабонеидеального бозе-газа, впервые полученного Боголюбовым [1]. Следует отметить, однако, что эти результаты соответствуют приближению хаотических фаз (random phase approximation (RPA)). В этом приближении не в полной мере учитываются эффекты взаимодействия, соответствующие описанию квантовой системы частиц в самосогласованном поле, в частности не учитываются эффекты, связанные с тождественностью частиц.

Еще один альтернативный вариант при рассмотрении равновесных свойств таких систем основан на использовании стандартной диаграммной техники теории возмущений для равновесной системы, находящейся в большом, но конечном объеме [17]. Для осуществления перехода к термодинамическому пределу необходимо перейти от суммирования по дискретному набору значений импульсов к интегрированию по импульсам [18]. При этом следует учесть, как это имеет место в идеальном бозе-газе [19], макроскопическое число частиц в состоянии с нулевым импульсом, что соответствует наличию BEC. Однако при использовании стандартной диаграммной техники возникает существенная трудность, обусловленная аномальными свойствами идеального бозе-газа, в частности бесконечным значением его изотермической сжимаемости при температурах ниже температуры перехода в состояние с BEC. Это означает, что модель идеального бозе-газа не может быть использована в качестве исходного, нулевого приближения. Именно этим обстоятельством обусловлено появление гипотезы Боголюбова [1,2] для неидеального бозе-газа. Другими словами, для рассмотрения системы с BEC необходимо изначально учитывать межчастичное взаимодействие, что соответствует применению общих функциональных методов квантовой теории поля для функций Грина (см., например, [20]).

По этой причине будем использовать подход, предложенный в [21] для вычисления «высших» функций Грина через так называемые «регулярные» части этих функций и соответствующие средние более низкого порядка. Это позволяет составить систему зацепляющихся интегральных уравнений по отношению к «регулярным» частям функций Грина. В этом случае в качестве исходного нулевого приближения следует использовать самосогласованное приближение Хартри–Фока (self-consistent Hartree–Fock approximation (SHFA)) [5]. На этой основе в настоящей работе исследованы спектры одночастичных и коллективных возбуждений в вырожденном бозе-газе с дельтаобразным потенциалом межчастичного взаимодействия.

2. Недиагональный дальний порядок и одночастичная функция Грина

Рассмотрим равновесную нерелятивистскую систему взаимодействующих бозонов, занимающую объем V при температуре T. Для определенности будем считать, что частицы имеют нулевой спин. Согласно общему определению Пенроуза и Онзагера [22], наличие BEC определяется аномальным пространственным поведением одночастичной матрицы плотности $\gamma(\mathbf{r},\mathbf{r}') \equiv \langle \hat{\Psi}^+(\mathbf{r})\hat{\Psi}(\mathbf{r}')\rangle$, которое получило название недиагонального дальнего порядка (off-diagonal long-range order (ODLRO)) [23]. Для однородной и изотропной системы, в которой одночастичная матрица плотности ядер имеет вид $\gamma(\mathbf{r},\mathbf{r}') = \gamma(|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|)$, это утверждение можно записать как

$$\lim_{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|\to\infty} \gamma(\mathbf{r},\mathbf{r}') = n_{BEC} \neq 0. \tag{1}$$

Здесь n_{BEC} — плотность числа частиц в BEC, $\hat{\Psi}^+(\mathbf{r})$ и $\hat{\Psi}(\mathbf{r})$ — соответственно полевые операторы рождения и уничтожения, угловые скобки означают усреднение с большим каноническим распределением Гиббса, которое характеризуется заданными значениями объема V, температуры T и химического потенциала μ. В нормальной системе $n_{BEC} = 0$, т.е. BEC отсутствует.

Необходимо учитывать, что в статистической теории усреднение с распределением Гиббса соответствует состоянию термодинамического равновесия только после перехода к термодинамическому пределу $\langle \hat{N}\rangle \to \infty$, $V\to\infty$, $\bar{n} = \lim_{V\to\infty} \langle \hat{N}\rangle / V = \text{const}$, где $\langle \hat{N}\rangle = \int_V d^3r\, \langle \hat{\Psi}^+(\mathbf{r})\hat{\Psi}(\mathbf{r})\rangle$ — среднее полное число частиц в системе, которая характеризуется средней плотностью $\bar{n}$ в объеме V [18].

Это означает, что при вычислении средних значений физических величин необходимо первоначально рассматривать систему в очень большом (макроскопическом), но конечном объеме V, а затем осуществить термодинамический предельный переход [18].

Для осуществления такого предельного перехода представим полевые операторы $\hat{\Psi}^+(\mathbf{r})$ и $\hat{\Psi}(\mathbf{r})$ как

$$\begin{aligned} \hat{\Psi}^+(\mathbf{r}) &= \frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{\mathbf{p}} \hat{a}^+_{\mathbf{p}} \exp(-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}), \\ \hat{\Psi}(\mathbf{r}) &= \frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{\mathbf{p}} \hat{a}_{\mathbf{p}} \exp(i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}), \end{aligned} \tag{2}$$

где $\hat{a}^+_{\mathbf{p}}$ и $\hat{a}_{\mathbf{p}}$ — соответственно операторы рождения и уничтожения частиц с импульсом $\hbar\mathbf{p}$ и нулевым спином. На основе (2) можно записать одночастичную матрицу плотности для однородной и изотропной системы бозонов в виде ряда Фурье

$$\gamma(|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|) = \frac{f^{(V)}(\mathbf{p}=0)}{V} + \frac{1}{V}\sum_{\mathbf{p}\neq 0} f^{(V)}(\mathbf{p}) \exp\left(i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{r}'-\mathbf{r})\right). \tag{3}$$

Здесь $f^{(V)}(\mathbf{p}) = \langle \hat{a}^+_{\mathbf{p}}\hat{a}_{\mathbf{p}}\rangle^{(V)}$ — среднее число заполнения частиц в состоянии с импульсом $\hbar\mathbf{p}$ (или одночастичная функция распределения по импульсам), индекс (V) означает, что соответствующая функция отвечает системе в очень большом (макроскопическом), но конечном объеме V. Тогда, согласно (1), средняя плотность числа частиц в BEC равна

$$n_{BEC} = \lim_{V\to\infty} f^{(V)}(\mathbf{p}=0)/V. \tag{4}$$

В результате после перехода к термодинамическому пределу одночастичная функция распределения по импульсам при наличии BEC принимает вид

$$f(\mathbf{p}) = \lim_{V\to\infty} f^{(V)}(\mathbf{p}) = N_{BEC}\delta_{\mathbf{p},0} + f^{(\text{over})}(p)\left(1-\delta_{\mathbf{p},0}\right), \tag{5}$$

где $f^{(\text{over})}(p)$ — одночастичная функция распределения для «надконденсатных» состояний при $\mathbf{p}\neq 0$, число частиц с нулевым импульсом $N_{BEC} = \langle \hat{N}_0\rangle \equiv \equiv \langle \hat{a}_0^+ \hat{a}_0\rangle = n_{BEC}V$ является макроскопическим, что и служит определением одночастичного BEC в равновесной системе бозонов. При этом средняя плотность числа частиц $\overline{n}$ при наличии BEC определяется соотношением

$$\overline{n}(T,\mu) = n_{BEC}(T,\mu) + n^{(\text{over})}(T,\mu),$$
$$n^{(\text{over})} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} f^{(\text{over})}(p). \tag{6}$$

Таким образом, при исследовании равновесной системы бозонов с BEC необходимо сначала рассматривать исходную систему в очень большом, но конечном объеме V, и только после выделения сингулярных членов, соответствующих макроскопическому числу частиц в BEC, переходить к термодинамическому пределу. Аналогичное утверждение имеет место и при рассмотрении неоднородной системы бозонов с BEC [24]. При этом основная проблема при описании системы бозонов с BEC связана с вычислением одночастичной функции распределения $f^{(V)}(\mathbf{p})$.

Для решения этой задачи можно использовать стандартные методы квантовой теории поля для нормальных систем, но с учетом конечности объема V с последующим выделением сингулярных членов, обусловленных наличием BEC [5,7–10,17]. Это означает, в частности, что при переходе от координатного к импульсному представлению в диаграммной технике теории возмущений необходимо использовать не интегральное преобразование Фурье (см., например, [25]), а представление в виде ряда Фурье (см. (3)).

Одночастичная функция распределения $f^{(V)}(\mathbf{p})$ однозначно определяется через одночастичную температурную функцию Грина (single-particle temperature Green function (SPTGF)) $g^{(V)}(\mathbf{p},\omega_l)$ (см. подробнее [25])

$$f^{(V)}(\mathbf{p}) = \lim_{\tau\to+0} T\sum_{\omega_l} g^{(V)}(\mathbf{p},\omega_l)\exp(i\omega_l\tau), \quad \omega_l = 2\pi l T, \tag{7}$$

$$g^{(V)}(\mathbf{p},\omega_l) = -\int_0^{1/T} d\tau \exp(i\omega_l\tau)\left\langle \hat{T}_\tau\left(\hat{a}_{\mathbf{p}}(\tau)\hat{a}_{\mathbf{p}}^+(0)\right)\right\rangle. \tag{8}$$

Здесь l — целое число, включая нуль, $\hat{T}_\tau$ — оператор τ-упорядочения, $\hat{A}(\tau) = \exp\left[\left(\hat{H}-\mu\hat{N}\right)\tau\right]\hat{A}\exp\left[-\left(\hat{H}-\mu\hat{N}\right)\tau\right]$, $\hat{H}$ — точный гамильтониан рассматриваемой системы. Для вычисления SPTGF следует использовать методы диаграммной техники теории возмущений с учетом сформулированных выше ограничений.

Отметим, что такое рассмотрение принципиально отличается от подхода, основанного на применении специальной диаграммной техники, предложенной Беляевым [26] в развитие гипотезы Боголюбова [1,2] (см. подробнее [27]). Отличие этих подходов обусловлено различием функций, в которых осуществляется переход к термодинамическому пределу. В подходе Беляева [26] соответствующий предельный переход применяется для определения SPTGF при наличии BEC с фактическим использованием гипотезы Боголюбова [1,2]. В предлагаемом нами варианте переход к термодинамическому пределу реализуется в одночастичной функции распределения $f^{(V)}(\mathbf{p})$ с использованием ODLRO (1). При этом следует учитывать, что гипотеза Боголюбова соответствует наличию ODLRO, однако из наличия ODLRO не следует гипотеза Боголюбова.

Суть проблемы при учете BEC сводится к следующему. Как и в теории нормальных систем [25], SPTGF $g^{(V)}(\mathbf{p},\omega_l)$ удовлетворяет уравнению Дайсона

$$g^{(V)}(\mathbf{p},\omega_l) = g_0^{(V)}(\mathbf{p},\omega_l) +$$
$$+ g_0^{(V)}(\mathbf{p},\omega_l)\Sigma^{(V)}(\mathbf{p},\omega_l)g^{(V)}(\mathbf{p},\omega_l), \tag{9}$$

где $g_0^{(V)}(\mathbf{p},\omega_l) = \left\{i\omega_l - \varepsilon_0(\mathbf{p}) + \mu\right\}^{-1}$ — SPTGF для идеального газа бозонов, $\varepsilon_0(\mathbf{p}) = \hbar^2p^2/2m$, m — масса частицы, $\Sigma^{(V)}(\mathbf{p},\omega_l)$ — собственно-энергетическая функция, которая является функционалом SPTGF: $\Sigma^{(V)}(\mathbf{p},\omega_l) = \Sigma^{(V)}(\mathbf{p},\omega_l;[g^{(V)}])$.

Это означает, что уравнение Дайсона (9) является не алгебраическим, а функциональным уравнением относительно SPTGF $g^{(V)}(\mathbf{p},\omega_l)$. При этом установить особенности функции $\Sigma^{(V)}(\mathbf{p},\omega_l)$, связанные с наличием BEC в системе взаимодействующих бозонов, не представляется возможным. Аналогичное утверждение имеет место и в отношении SPTGF. Поэтому предположение Беляева [26] о виде SPTGF при нулевом импульсе, которое является основой соответствующей диаграммной техники при наличии BEC, не может быть обосновано строго математически, как и гипотеза Боголюбова [1,2].

С другой стороны, нет необходимости в каких-либо предположениях относительно поведения SPTGF $g^{(V)}(\mathbf{p},\omega_l)$. Достаточно использовать стандартную диаграммную технику теории возмущений для конечного макроскопического объема V при вычислении SPTGF $g^{(V)}(\mathbf{p},\omega_l)$, а затем учесть BEC в одночастичной функции распределения $f^{(V)}(\mathbf{p})$ при переходе к термодинамическому пределу (см. (5)).

В этой связи можно утверждать, что корректный переход к термодинамическому пределу возможен только для физических величин. К категории физических величин относится, в частности, одночастичная функция распределения $f^{(V)}(\mathbf{p})$, которая однозначно определяет не только среднюю плотность числа частиц $\bar{n}$ (6), но и среднюю кинетическую энергию $\langle K\rangle^{(V)} = \sum_{\mathbf{p}\neq 0}\varepsilon_0(\mathbf{p})\, f^{(V)}(\mathbf{p})$ для макроскопической системы бозонов. Согласно (5), в результате перехода к термодинамическому пределу для величины $\langle K\rangle$ справедливо равенство

$$\langle k\rangle = \lim_{V\to\infty}\frac{\langle K\rangle^{(V)}}{V} = \int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\varepsilon_0(p)\, f^{(\mathrm{over})}(p). \quad (10)$$

С другой стороны, отсутствуют основания для утверждения, что корректный переход к термодинамическому пределу, позволяющий учесть BEC, может быть осуществлен непосредственно в SPTGF $g^{(V)}(\mathbf{p},\omega_l)$.

Как отмечено выше, для корректного описания BEC необходимо учитывать межчастичное взаимодействие уже в исходном приближении, в качестве которого предполагается использовать SHFA. Отметим, что результаты применения SHFA могут быть получены не только в рамках диаграммной техники теории возмущений [20] или процедуры, предложенной в [21], но и с использованием спектральной функции $s^{(V)}(\mathbf{p},\varepsilon)$ [28], которой достаточно для вычисления SPTGF [25]. При этом

$$f^{(V)}(\mathbf{p}) = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\varepsilon}{2\pi}\frac{s^{(V)}(\mathbf{p},\varepsilon)}{\exp(\varepsilon/T)-1}. \quad (11)$$

Для спектральной функции $s^{(V)}(\mathbf{p},\varepsilon)$ имеют место точные соотношения, называемые правилами сумм [28]:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\varepsilon}{2\pi}s^{(V)}(\mathbf{p},\varepsilon) = 1, \qquad \int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\varepsilon}{2\pi}\varepsilon s^{(V)}(\mathbf{p},\varepsilon) = E^{(V)}(\mathbf{p}), \quad (12)$$

$$E^{(V)}(\mathbf{p}) = \varepsilon_0(\mathbf{p}) + \bar{n}u(0) + \frac{1}{V}\sum_{\mathbf{q}}u(\mathbf{q})\, f^{(V)}(\mathbf{q}+\mathbf{p}) - \mu, \quad (13)$$

где $u(\mathbf{q})$ — фурье-компонента парного потенциала межчастичного взаимодействия $U(\mathbf{r})$.

Таким образом, если спектральная функция имеет вид

$$s_{SHFA}^{(V)}(\mathbf{p},\varepsilon) = 2\pi\delta\left(\varepsilon - \mathcal{E}_{SHFA}^{(V)}(\mathbf{p}) + \mu\right), \quad (14)$$

который подобен соответствующему выражению для системы невзаимодействующих частиц, то величину $\mathcal{E}_{SHFA}^{(V)}(\mathbf{p})$ можно рассматривать как энергетический спектр «квазичастиц». Как следует из уравнения Дайсона (9), утверждение (14) справедливо в случае, когда собственно-энергетическая функция удовлетворяет условию $\Sigma^{(V)}(\mathbf{p},\omega_l) = \Sigma^{(V)}(\mathbf{p})$, которое соответствует SHFA [17]. В этом случае, согласно (11)–(14), для величины $\mathcal{E}_{SHFA}^{(V)}(\mathbf{p})$ справедливо соотношение (ср. с [20])

$$\mathcal{E}_{SHFA}^{(V)}(\mathbf{p}) = \varepsilon_0(\mathbf{p}) + \bar{n}_{SHFA}u(0) + \frac{1}{V}\sum_{\mathbf{q}}u(\mathbf{q})\, f_{SHFA}^{(V)}(\mathbf{q}+\mathbf{p}), \quad (15)$$

а одночастичная функция распределения $f_{SHFA}^{(V)}(\mathbf{p})$ соответствует распределению Бозе–Эйнштейна для квазичастиц

$$f_{SHFA}^{(V)}(\mathbf{p}) = \left\{\exp\left[\left(\mathcal{E}_{SHFA}^{(V)}(\mathbf{p})-\mu\right)/T\right]-1\right\}^{-1}. \quad (16)$$

С учетом (15), (16) функции $f_{SHFA}^{(V)}(\mathbf{p})$ и $\mathcal{E}_{SHFA}^{(V)}(\mathbf{p})$ должны определяться самосогласованно. При этом значение средней плотности числа частиц $\bar{n}_{SHFA}$ равно

$$\bar{n}_{SHFA} = \frac{1}{V}\sum_{\mathbf{p}} f_{SHFA}^{(V)}(\mathbf{p}). \quad (17)$$

Кроме того, с помощью спектральной функции однозначно определяется точная средняя потенциальная энергия $\langle U\rangle^{(V)}$ с произвольным парным потенциалом взаимодействия [20]

$$\langle U\rangle^{(V)} = \frac{1}{2}\sum_{\mathbf{p}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\varepsilon}{2\pi}\frac{\left(\varepsilon-\varepsilon_0(\mathbf{p})+\mu\right)s^{(V)}(\mathbf{p},\varepsilon)}{\exp(\varepsilon/T)-1}. \quad (18)$$

Используя соотношения (11), (14)–(17), находим явное выражение для средней потенциальной энергии в SHFA

$$\langle U\rangle_{SHFA}^{(V)} = \frac{1}{2}u(0)\left(\bar{n}_{SHFA}\right)^2 V + {}$$
$$+ \frac{1}{2V}\sum_{\mathbf{p}}\sum_{\mathbf{q}}u(\mathbf{q})\, f_{SHFA}^{(V)}(\mathbf{q}+\mathbf{p})\, f_{SHFA}^{(V)}(\mathbf{p}). \quad (19)$$

Очевидно, что слагаемые с суммированием в правой части соотношений (15), (19) являются «фоковскими» членами в SHFA, в то время как предшествующие слагаемые отвечают приближению Хартри. Переход к термодинамическому пределу в соотношениях (15)–(19) осуществляется с использованием (5). Формальное пренебрежение последним, «фоковским», или обменным, членом в (15), (19) соответствует приближению Хартри для спектра квазичастиц. При $T \ll T_{BEC}$, когда кинетической энергией, отвечающей «надконденсату», можно пренебречь, для потенциальной энергии вместо (19) получаем $\langle U\rangle_H^{(V)} = {}^1\!/_2\, u(0)\left(\bar{n}_H\right)^2 V$, что соответствует полной энергии вырожденного бозе-газа в [1].

3. Вырожденный бозе-газ с дельтаобразным потенциалом взаимодействия

Очевидно, что система уравнений (15), (16) не может быть решена при произвольном виде фурье-компоненты $u(\mathbf{q})$ для парного потенциала межчастичного взаимодействия $U(\mathbf{r})$. Исключение составляет случай дельтаобразного потенциала взаимодействия $U(\mathbf{r}) = u_0\delta(\mathbf{r})$ $(u_0 > 0)$, который широко используется в теории квантовых газов [29]. В этом случае $u(\mathbf{q}) = u_0$, а из (15)–(17) непосредственно следует

$$f^{(0)}_{SHFA}(\mathbf{p}) = \left\{\exp\left\{\left(\varepsilon_0(\mathbf{p}) - \mu_0^{\mathrm{id}}\right)/T\right\} - 1\right\}^{-1}, \quad (20)$$

$$\mu_0^{\mathrm{id}} = \mu - 2u_0\bar{n}_0(T,\mu), \qquad \bar{n}_0 = \frac{1}{V}\sum_{\mathbf{p}} f^{(0)}_{SHFA}(\mathbf{p}). \quad (21)$$

Согласно (20), (21), одночастичная функция распределения $f^{(0)}_{SHFA}(\mathbf{p})$ для бозе-газа с дельтаобразным потенциалом взаимодействия (индекс 0) в SHFA соответствует одночастичной функции распределения для идеального газа бозонов с заменой химического потенциала μ рассматриваемой системы на химический потенциал μ_0^{id} для идеального газа бозонов (21). Отметим, что система частиц, взаимодействующих между собой посредством дельтаобразного потенциала, отвечает идеальному газу точечных частиц, упруго сталкивающихся друг с другом. Для такой системы переход к термодинамическому пределу осуществляется аналогично процедуре, имеющей место в идеальном газе бозонов (см., например, [19]).

В результате при температурах $T < T^{(0)}_{BEC}$, где $T^{(0)}_{BEC} = 2\pi\hbar^2\bar{n}^{2/3}/\zeta(3/2)m$ — температура перехода идеального бозе-газа в состояние с BEC, одночастичная функция распределения $f^{(0)}_{SHFA}(\mathbf{p})$ после перехода к термодинамическому пределу имеет вид (см. (5))

$$f^{(0)}(\mathbf{p}) = \lim_{V\to\infty} f^{(0)}_{SHFA}(\mathbf{p}) = N^{(0)}_{BEC}\delta_{\mathbf{p},0} + f^{(0)}_{\mathrm{over}}(p)\left(1-\delta_{\mathbf{p},0}\right), \quad (22)$$

а плотность числа частиц равна (см. (6))

$$\bar{n}_0 = \bar{n}^{(0)}_{BEC} + \bar{n}^{(0)}_{\mathrm{over}},$$
$$\bar{n}^{(0)}_{BEC} = \lim_{V\to\infty} N^{(0)}_{BEC}/V = \bar{n}_0\left\{1 - \left(T/T^{(0)}_{BEC}\right)^{3/2}\right\}, \quad (23)$$

$$\bar{n}^{(0)}_{\mathrm{over}} = \lim_{V\to\infty}\frac{1}{V}\sum_{\mathbf{p}\neq 0} f^{(0)}_{\mathrm{over}}(\mathbf{p}) = \int\frac{d^3p}{(2\pi)^3} f^{(0)}_{\mathrm{over}}(p) = \bar{n}_0\left(\frac{T}{T^{(0)}_{BEC}}\right)^{3/2}. \quad (24)$$

Здесь $\bar{n}^{(0)}_{BEC}(T,\mu)$ — плотность числа частиц в BEC, $\bar{n}^{(0)}_{\mathrm{over}}(T,\mu)$ — плотность числа частиц в «надконденсатных» состояниях (в состояниях с ненулевым импульсом), $\zeta(x)$ — ζ-функция Римана, $f^{(0)}_{\mathrm{over}} = \left\{\exp\left(\varepsilon_0(p)/T\right) - 1\right\}^{-1}$.

При температурах $T < T^{(0)}_{BEC}$ $\mu_0^{\mathrm{id}} = 0$ [19], поэтому, согласно (21), химический потенциал рассматриваемой системы равен

$$\mu = 2u_0\bar{n}_0(T,\mu). \quad (25)$$

Таким образом, учет эффектов, связанных с тождественностью частиц (приближение Хартри–Фока) приводит к удвоению выражения для химического потенциала по сравнении с приближением Хартри. Следовательно,

$$\left(\partial\bar{n}_0(T,\mu)/\partial\mu\right)_T = (2u_0)^{-1}. \quad (26)$$

Чтобы убедиться в справедливости равенства (26), рассмотрим термодинамический потенциал Гиббса $\Omega(T,\mu,V) = -T\ln\mathrm{Tr}\left(\exp\left\{(\hat{H} - \mu\hat{N})/T\right\}\right)$ для равновесной системы в макроскопическом объеме V. Согласно результатам статистической термодинамики, величина $\Omega(T,\mu,V)$ удовлетворяет условию

$$\lim_{V\to\infty}\Omega(T,\mu,V)/V = -P(T,\mu), \quad (27)$$

где $P(T,\mu)$ — давление в рассматриваемой системе [18]. С другой стороны, согласно теореме вириала [30], имеем

$$P(T,\mu) = \frac{2\langle k\rangle}{3} - \lim_{V\to\infty}\frac{\left\langle \mathbf{r}\cdot\nabla_{\mathbf{r}}U(\mathbf{r})\right\rangle^{(V)}}{3V}, \quad (28)$$

где $\langle k\rangle$ определяется соотношением (10), а $\left\langle \mathbf{r}\cdot\nabla_{\mathbf{r}}U(\mathbf{r})\right\rangle^{(V)}$ является вириалом для потенциальной энергии,

$$\left\langle \mathbf{r}\cdot\nabla_{\mathbf{r}}U(\mathbf{r})\right\rangle^{(V)} = \frac{1}{2}\bar{n}^2\int_V d^3r\left(\mathbf{r}\cdot\nabla_{\mathbf{r}}U(r)\right)g^{(V)}(\mathbf{r}), \quad (29)$$

$g^{(V)}(\mathbf{r})$ — точная парная корреляционная функция, которая однозначно связана со статическим структурным фактором

$$S(q) = 1 + \bar{n}\int d^3r\exp(i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r})g(r), \quad g(r) = \lim_{V\to\infty} g^{(V)}(\mathbf{r}). \quad (30)$$

Из (29), (30) непосредственно следует

$$\lim_{V\to\infty}\frac{\left\langle \mathbf{r}\cdot\nabla_{\mathbf{r}}U(\mathbf{r})\right\rangle^{(V)}}{3V} = -\frac{1}{2}\bar{n}^2u(0) - \frac{1}{6}\bar{n}\int\frac{d^3q}{(2\pi)^3}\left[3u(q) + \left(\mathbf{q}\cdot\nabla_{\mathbf{q}}u(q)\right)\right]\left(S(q)-1\right). \quad (31)$$

При переходе к термодинамическому пределу в (31) учтено, что статический структурный фактор, непосредственно измеряемый в экспериментах по упругому рассеянию нейтронов [19], может рассматриваться как физическая величина. Следовательно,

$$\lim_{V\to\infty}\frac{\left\langle \mathbf{r}\cdot\nabla_{\mathbf{r}}U(\mathbf{r})\right\rangle_0^{(V)}}{V} = -\lim_{V\to\infty}\frac{\langle U\rangle_0^{(V)}}{V} = -\frac{1}{2}\bar{n}_0^2u_0 - \frac{1}{2}\bar{n}_0u_0\int\frac{d^3q}{(2\pi)^3}\left(S_0(q)-1\right), \quad (32)$$

где $\langle U\rangle_0^{(V)}$ — точная средняя потенциальная энергия для системы с дельтаобразным потенциалом взаимодействия. С учетом (26)–(28), (30) давление в такой системе равно

$$P_0(T,\mu)=\frac{2\langle k\rangle_0}{3}+\lim_{V\to\infty}\frac{\langle U\rangle_0}{V}. \quad (33)$$

С другой стороны, средняя потенциальная энергия $\langle U\rangle^{(V)}$ в SHFA определяется соотношением (19), а величина $\langle k\rangle_0$, согласно (10), (20), (21), имеет вид

$$\langle k_0\rangle=\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{\varepsilon_0(p)}{\exp\left\{\left(\varepsilon_0(p)-\mu_0^{\text{id}}\right)/T\right\}-1}. \quad (34)$$

В результате давление в системе с дельтаобразным потенциалом взаимодействия в SHFA при температуре $T<T_{BEC}^{(0)}$ равно

$$P_0(T,\mu)=P_{\text{id}}(T)+u_0\left(\bar{n}_0(T,\mu)\right)^2, \quad (35)$$

где $P_{\text{id}}(T)=\zeta(5/2)\left(mT/2\pi\hbar^2\right)^{3/2}T$ — давление идеального газа бозонов [19]. Учет тождественности частиц в SHFA приводит к удвоению результата в последнем слагаемом в (35) по сравнению с приближением Хартри, как и в случае с химическим потенциалом (25).

Сравнивая соотношения (26) и (35), нетрудно убедиться в справедливости общего термодинамического равенства [18,19]

$$\bar{n}^{-1}(\partial P/\partial\bar{n})_T=\left\{(\partial\bar{n}/\partial\mu)_T\right\}^{-1} \quad (36)$$

для вырожденного газа бозонов с дельтаобразным потенциалом взаимодействия при наличии BEC в SHFA, что подтверждает результаты проведенного рассмотрения.

При этом, согласно приведенным выше результатам, спектр одночастичных возбуждений в таком газе в SHFA совпадает со спектром $\varepsilon_0(p)$ для частиц в идеальном газе (см. (20)). Это обстоятельство послужило одной из причин появления гипотезы Боголюбова и понятия о «квазисредних», исходя из предположения о том, что спектр квазичастиц в равновесном вырожденном газе бозонов при малых импульсах должен характеризоваться линейной зависимостью от импульса, характерной для фононов [1,2]. Однако такое утверждение в отношении одночастичных возбуждений не имеет под собой основания. Дело в том, что фононный спектр при малых импульсах характерен для коллективных возбуждений, связанных с особенностями в динамическом структурном факторе $S(q,\omega)$ [29].

Соответствующие особенности наблюдаются в экспериментах по неупругому рассеянию нейтронов и характерны для любых жидкостей (см. [31] и цитированную там литературу). При использовании гипотезы Боголюбова для описания BEC спектры одночастичных и коллективных возбуждений совпадают при малых импульсах [27].

4. Динамический структурный фактор и спектр коллективных возбуждений

Согласно определению [29]

$$S(q,\omega)\equiv\frac{1}{V}\int_{-\infty}^{\infty}\exp(i\omega t)\left\langle\delta\hat{n}_{\mathbf{q}}(t)\delta\hat{n}_{-\mathbf{q}}(0)\right\rangle dt, \quad (37)$$

динамический структурный фактор $S(q,\omega)$ непосредственно связан со статическим структурным фактором $S(q)$ (30) соотношением

$$\bar{n}S(q)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\omega}{2\pi}S(q,\omega). \quad (38)$$

Здесь $\delta\hat{n}_{\mathbf{q}}(t)$ — фурье-компонента оператора флуктуации плотности числа частиц $\delta\hat{n}(\mathbf{r},t)=\left(\hat{\Psi}^+(\mathbf{r},t)\hat{\Psi}(\mathbf{r},t)-\bar{n}\right)$ в представлении Гейзенберга с точным гамильтонианом рассматриваемой системы.

Из спектрального представления для динамического структурного фактора следует [29]

$$S(q,\omega)=-\frac{2\hbar}{1-\exp(-\hbar\omega/T)}\operatorname{Im}\chi(q,\omega),$$
$$S(q,-\omega)=S(q,\omega)\exp(-\hbar\omega/T), \quad (39)$$

где $\chi(q,\omega)=\langle\langle\delta\hat{n}_{\mathbf{q}}\,|\,\delta\hat{n}_{-\mathbf{q}}\rangle\rangle_\omega$ — функция отклика «плотность–плотность».

$$\langle\langle\hat{A}\,|\,\hat{A}^+\rangle\rangle_\omega\equiv-\frac{i}{\hbar V}\int_0^{\infty}\exp\left(i(\omega+i0)t\right)\left\langle[\hat{A}(t),\hat{A}^+(0)]\right\rangle dt. \quad (40)$$

Соотношения (38)–(40) следует понимать в термодинамическом пределе.

Согласно определению (40), функция отклика $\chi(q,\omega)$ является аналитической функцией в верхней полуплоскости комплексных значений ω $(\operatorname{Im}\omega>0)$ и, как следует из теории линейного отклика (см, например, [30]), описывает поведение средней неоднородной плотности в пространстве и времени при воздействии на рассматриваемую систему слабого скалярного поля. Поэтому в нижней полуплоскости комплексных значений ω $(\operatorname{Im}\omega<0)$ у функции отклика $\chi(q,\omega)$ имеются особенности (полюса)

$$\chi(q,z_\chi)\to\infty,\quad z_\chi(q)=\operatorname{Re}z_\chi(q)-i\operatorname{Im}z_\chi(q),$$
$$\operatorname{Im}z_\chi(q)>0, \quad (41)$$

которые при условии

$$\operatorname{Im}z_\chi(q)/\operatorname{Re}z_\chi(q)\ll 1 \quad (42)$$

определяют энергетический спектр коллективных возбуждений

$$\mathcal{E}_{ce}(q) = \hbar\omega_{ce}(q), \quad \omega_{ce}(q) = \operatorname{Re} z_\chi(q). \tag{43}$$

Величина $\mathcal{E}_{ce}(q)$ экспериментально измеряется по положениям максимумов в частотной зависимости динамического структурного фактора $S(q,\omega)$ при фиксированных значениях изменения импульса $\hbar q$ для рассеиваемого пучка нейтронов. Соответствующие коллективные возбуждения будем далее называть коллективными возбуждениями плотности, которые, вообще говоря, отличаются от одночастичных возбуждений [31].

Функция отклика $\chi(q,\omega)$ в окрестности полюса $z_\chi(q)$ может быть представлена в виде

$$\chi(q,\omega) = Z(q)\{\omega - \omega_{ce}(q) + i\gamma(q)\}^{-1}, \tag{44}$$

где $Z(q)$ — некоторая неизвестная функция, $\gamma(q) \equiv \operatorname{Im} z_\chi(q)$, $\operatorname{Re}\omega > 0$ [25]. Поэтому в рамках концепции квазичастиц Ландау (42) мнимая часть функции отклика $\chi(q,\omega)$ для $\operatorname{Re}\omega > 0$ в окрестности полюса $z_\chi(q)$ (41) может быть выражена через δ-функцию Дирака (см. (14))

$$\operatorname{Im}\chi(q,\omega) = -\frac{Z(q)\gamma(q)}{(\omega - \omega_{ce}(q))^2 + (\gamma(q))^2} \to$$
$$\to -\pi Z(q)\delta(\omega - \omega_{ce}(q)). \tag{45}$$

Будем считать, что представление (45) справедливо для любых значений импульса, как это имеет место для слабонеидеального вырожденного газа бозонов при температуре $T \ll T_{BEC}$, где T_{BEC} — температура перехода в состояние с BEC [32]. Это соответствует предположению о хорошо определенных коллективных возбуждениях при всех существенных импульсах. С учетом (38), (39) получаем

$$\bar{n}S(q) = -\frac{\hbar}{\pi}\int_0^\infty d\omega \operatorname{cth}\left(\frac{\hbar\omega}{2T}\right)\operatorname{Im}\chi(q,\omega) \approx$$
$$\approx \hbar Z(q)\operatorname{cth}\left(\frac{\hbar\omega_{ce}(q)}{2T}\right). \tag{46}$$

Для вычисления $Z(q)$ и $\omega_{ce}(q)$ используем высокочастотное разложение для величины $\operatorname{Re}\chi(q,\omega)$, которая является четной функцией ω, по степеням $1/\omega^2$

$$\operatorname{Re}\chi(q,\omega) = \frac{M_1(q)}{\omega^2} + \frac{M_2(q)}{\omega^4} + \ldots \tag{47}$$

Здесь $M_i(q)$ — так называемые моменты функции отклика «плотность–плотность», для которых имеются точные соотношения через коммутаторы известных операторов [30]. На этой основе нетрудно найти явные выражения для первых двух моментов $M_1(q)$ и $M_2(q)$:

$$M_1(q) = \frac{\bar{n}\hbar q^2}{m},$$
$$M_2(q) = \frac{\bar{n}q^2}{m\hbar}\left\{\varepsilon_0^2(q) + 2\bar{n}\varepsilon_0(q)u(q) + 4\varepsilon_0(q)\frac{\langle k\rangle}{\bar{n}} + \Phi(q)\right\}, \tag{48}$$

$$\Phi(q) = \frac{\hbar^2}{mq^2}\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}(\mathbf{k}\cdot\mathbf{q})^2 u(k)\{S(|\mathbf{k}-\mathbf{q}|) - S(k)\}. \tag{49}$$

С другой стороны, функции отклика $\chi(q,\omega)$, будучи аналитической функцией в верхней полуплоскости комплексных значений ω, удовлетворяет соотношениям Крамерса–Кронига [29,30]. В частности,

$$\operatorname{Re}\chi(q,\omega) = \mathrm{P}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\alpha}{\pi}\frac{\operatorname{Im}\chi(q,\alpha)}{\alpha - \omega}, \tag{50}$$

где символ P означает, что соответствующий интеграл понимается в смысле главного значения. Учитывая, что функция $\operatorname{Im}\chi(q,\omega)$ удовлетворяет следующим соотношениям [29,30]:

$$\operatorname{Im}\chi(q,-\omega) = -\operatorname{Im}\chi(q,\omega), \quad \operatorname{Im}\chi(q,\omega > 0) < 0, \tag{51}$$

а также, принимая во внимание соотношения (47)–(49), из (50) непосредственно следуют правила сумм для функции отклика $\chi(q,\omega)$

$$\begin{aligned} M_1(q) &= -\frac{2}{\pi}\int_0^\infty d\omega\omega \operatorname{Im}\chi(q,\omega), \\ M_2(q) &= -\frac{2}{\pi}\int_0^\infty d\omega\omega^3 \operatorname{Im}\chi(q,\omega). \end{aligned} \tag{52}$$

Тогда с учетом (45)

$$M_1(q) \approx 2Z(q)\omega_{ce}(q), \quad M_2(q) \approx 2Z(q)\omega_{ce}^3(q). \tag{53}$$

В результате, согласно (46), (53), находим выражение для статического структурного фактора

$$S(q) \approx \frac{\varepsilon_0(q)}{\mathcal{E}_{ce}(q)}\operatorname{cth}\left(\frac{\mathcal{E}_{ce}(q)}{2T}\right). \tag{54}$$

Соотношение (54) является обобщением известной формулы Фейнмана [33,34] (см. также [35,36]) и соответствует результатам теории вырожденного слабонеидеального газа бозонов при температуре $T \ll T_{BEC}$ [32]. При этом спектр коллективных возбуждений плотности определяется равенством [37]

$$\mathcal{E}_{ce}(q) = \left\{\varepsilon_0^2(q) + 2\bar{n}\varepsilon_0(q)u(q) + 4\varepsilon_0(q)\langle k\rangle/\bar{n} + \Phi(q)\right\}^{1/2}. \tag{55}$$

Подчеркнем, что спектр (55) получен при единственном упрощающем предположении — малости затухания коллективных возбуждений при всех передаваемых импульсах. Приближения, ограничивающие силу взаимодействия при выводе этого спектра, не использовались. Из (55) непосредственно следует, что при малых волновых векторах q (малых импульсах $\hbar q$) энергетический спектр коллективных возбуждений плотности $\mathcal{E}_{ce}(q)$ имеет «фононный» характер, т.е. линейно зависит от волнового вектора q:

$$\mathcal{E}_{ce}(q)|_{q\to 0} \to \hbar v_{ce} q, \tag{56}$$

где v_{ce} — скорость соответствующих фононов. Чтобы установить величину скорости v_{ce}, учтем, что статический структурный фактор для любых неупорядоченных равновесных систем удовлетворяет предельному равенству [19,29]

$$\lim_{q\to 0} S(q) = \frac{T}{\bar{n}}\left(\frac{\partial \bar{n}}{\partial \mu}\right)_T = \bar{n} T \chi_T. \tag{57}$$

Здесь $\chi_T = -V^{-1}(\partial V / \partial P)_{T,\langle \hat{N}\rangle}$ — изотермическая сжимаемость (см. (36)). В результате из (54)–(57) находим, что значение скорости v_{ce} в (56) совпадает с изотермической скоростью звука v_T в рассматриваемой системе:

$$v_{ce} = v_T \equiv \left\{m^{-1}(\partial P / \partial \bar{n})_T\right\}^{1/2}. \tag{58}$$

В применении к однородной и изотропной системе с дельтаобразным потенциалом взаимодействия энергетический спектр коллективных возбуждений плотности может быть существенно упрощен и приобретает вид

$$\mathcal{E}_{ce}^{(0)}(q) = \left\{\varepsilon_0^2(q) + 2\bar{n}_0 \varepsilon_0(q) u_0 + 4\varepsilon_0(q)\langle k\rangle_0 / \bar{n}_0 + \Phi_0(q)\right\}^{1/2}, \tag{59}$$

$$\Phi_0(q) = 2\varepsilon_0(q) u_0 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\{S_0(k) - 1\}. \tag{60}$$

С целью дальнейшего упрощения и сравнения с полученными выше результатами рассмотрим значение функции $\Phi_0(q)$ в рамках SHFA. В этом случае, сравнивая соотношения (19) и (32), находим

$$\Phi_0^{SHFA}(q) = 2\bar{n}_0 \varepsilon_0(q) u_0. \tag{61}$$

В свою очередь, согласно (34), при температурах $T \ll T_{BEC}^{(0)}$ значение $k_0 \to 0$, поэтому вкладом $\langle k\rangle_0$ в величину $\mathcal{E}_{ce}^{(0)}(q)$ можно пренебречь. Таким образом, в области предельно низких температур $(T \to 0)$ спектр коллективных возбуждений плотности в рамках SHFA имеет вид

$$\mathcal{E}_{ce}^{(0)}(q) = \left\{\varepsilon_0^2(q) + 4\bar{n}_0 u_0 \varepsilon_0(q)\right\}^{1/2}. \tag{62}$$

С учетом (56), (58) из (62) следует, что значение изотермической скорости звука соответствует изотермической сжимаемости, найденной из уравнения состояния (35). Это уравнение состояния получено на основе рассмотрения газа бозонов при наличии BEC с использованием только условия существования ODLRO (1).

Отметим, что если вместо (19) формально использовать в (32) выражение для средней потенциальной энергии в приближении Хартри $\langle U\rangle_{\mathrm{H}}^{(V)} = \frac{1}{2} u(0)(\bar{n}_H)^2 V$, то окажется необходимым потребовать, чтобы интеграл (60) обратился в нуль, что, разумеется, невыполнимо. Такое, содержащее противоречие, приближение приведет к уменьшению вдвое вклада взаимодействия в выражении (62). Следовательно, использование для вычисления спектра приближения, не учитывающего обменного «фоковского» взаимодействия, не является полностью самосогласованным даже в случае слабой неидеальности.

Таким образом, в рамках SHFA мы имеем полностью согласованное описание вырожденного бозе-газа с дельтаобразным потенциалом взаимодействия. При этом спектры одночастичных и коллективных возбуждений не совпадают. Обратим внимание, что соотношение (62) соответствует известному выражению Боголюбова [1] для спектра одночастичных возбуждений с точностью до численного коэффициента, равного двум, в последнем слагаемом в правой части (62). Причиной этого, по-видимому, является выход за рамки RPA, содержащегося в том или ином виде во всех расчетах, приводящих к результату Боголюбова [1] для спектра коллективных возбуждений.

5. Заключение

Обсудим соотношение между теорией вырожденного бозе-газа и явлением сверхтекучести. В соответствии с феноменологической теорией сверхтекучести Ландау [38] энергетический спектр «квазичастиц» $\mathcal{E}_{\text{quasi}}(q)$ как элементарных возбуждений, имеющих место в He II, должен удовлетворять условию сверхтекучести

$$\mathcal{E}_{\text{quasi}}(q) > \hbar q v_{\text{cr}} \tag{63}$$

при произвольных значениях волнового вектора q (или импульса $\hbar q$). В (63) v_{cr} — критическая скорость, при превышении которой в потоке He II происходит срыв сверхтекучести. Согласно теории сверхтекучести Ландау [38], которая основана на анализе соотношения между локальной плотностью и локальной скоростью в квантовой жидкости, следует считать, что соответствующими элементарными возбуждениями являются коллективные возбуждения плотности, энергетический спектр которых $\mathcal{E}_{ce}(q)$ (55) удовлетворяет критерию (63) для любой жидкости. В частности, предсказанный Ландау [39] фонон-ротонный спектр возбуждений был экспериментально подтвержден по положениям максимумов в динамическом структурном факторе [40,41].

Если критерий сверхтекучести Ландау считать применимым для любых видов (типов) элементарных возбуждений [42], условие (63) должно выполняться и для энергетического спектра одночастичных возбуждений. Однако согласно проведенному рассмотрению, энергетический спектр одночастичных возбуждений для вырожденного бозе-газа с дельтаобразным потенциалом взаимодействия в рамках SHFA не удовлетворяет критерию Ландау. Для решения вопроса о сверхтекучести вырожденного бозе-газа в рамках SHFA, на наш взгляд, необходимо учесть зависимость фурье-компоненты $u(q)$ для парного потенциала межчастичного взаимодействия от волнового вектора q.

Это предположение косвенно подтверждается при рассмотрении реальной жидкости как кулоновской системы, которая представляет собой совокупность взаимодействующих по закону Кулона электронов и ядер [43]. В этом случае, как показано в [44], спектр одночастичных возбуждений при наличии BEC должен иметь «энергетическую щель» при малых импульсах, что удовлетворяет критерию Ландау (63). В этой связи отметим, что в первоначальной версии своей теории сверхтекучести [38] Ландау предполагал наличие двух видов элементарных возбуждений в He II с принципиально различным поведением энергетических спектров при малых импульсах: один — фононного типа, другой — со щелью.

Зависимость величины $u(q)$ от волнового вектора q необходимо учитывать и для обеспечения ротонного минимума в спектре коллективных возбуждений плотности (см. (55)). Более того, ротонный минимум имеет место, если величина $u(q)$ принимает отрицательные значения [32,45].

Детальное рассмотрение спектра коллективных возбуждений для зависящего от волнового вектора потенциала в рамках развитого в настоящей статье формализма предполагается в последующих публикациях.

Настоящая работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (грант № 14-19-01492).

1. Н.Н. Боголюбов, *Известия АН СССР, сер. физ.* **11**, 77 (1947) [N.N. Bogolubov, *J. Phys. USSR* **11**, 23 (1947)].
2. Н.Н. Боголюбов, *Избранные труды в трех томах*, Том 2, Наукова думка, Киев (1970).
3. W.H. Bassichis and L.L. Foldy, *Phys. Rev. A* **133**, 435 (1964).
4. H. Stolz, *Physica A* **86**, 11 (1977).
5. V.B. Bobrov, P.P.J.M. Schram, and S.A. Trigger, *Physica A* **208**, 493 (1994).
6. Ю.М. Полуэктов, *ФНТ* **23**, 915 (1997) [*Low Temp. Phys.* **23**, 685 (1997)].
7. S.A. Morgan, *Phys. Rev. A* **69**, 023609 (2004).
8. C.-H. Zhang and H. A. Fertig, *Phys. Rev. A* **74**, 023613 (2006).
9. P. Navez and K. Bongs, *Europhys. Lett.* **88**, 60008 (2009).
10. V.B. Bobrov, S.A. Trigger, and I.M. Yurin, *Phys. Lett. A* **374**, 1938 (2010).
11. A.M. Ettouhami, *Prog. Theor. Phys.* **127**, 453 (2012).
12. В.Б. Бобров, С.А. Тригер, *Краткие сообщения по физике ФИАН* № 11, 28 (2014) [V.B. Bobrov and S.A. Trigger, *Bull. Lebedev Phys. Institute* **41**, 323 (2014)].
13. Ю.Л. Климонтович, В.П. Силин, *ЖЭТФ* **23**, 151 (1952).
14. В.П. Силин, *Труды ФИАН* **6**, 200 (1955).
15. И.А. Вакарчук, *ТМФ* **80**, 439 (1989) [I.A. Vakarchuk, *Theor. Math. Phys.* **80**, 983 (1989)].
16. І.О. Вакарчук, *Вступ до проблеми багатьох тіл*, Львівський ун-т імені Івана Франка, Львів (1999).
17. В.Б. Бобров, С.А. Тригер, П. Шрам, *ЖЭТФ* **107**, 1526 (1995) [V.B. Bobrov, S.A. Trigger, and P. Schram, *JETP* **80**, 853 (1995)].
18. Н.Н. Боголюбов, Н.Н. Боголюбов (мл.), *Введение в квантовую статистическую механику*, Наука, Москва (1984) [N.N. Bogolubov and N.N. Bogolubov Jr, *Introduction to Quantum Statistical Mechanics*, Gordon and Breach, London (1992)].
19. R. Balescu, *Equilibrium and Nonequilibrium Statistical Mechanics*, Wiley, New York (1975) [Р. Балеску, *Равновесная и неравновесная статистическая механика*, Том 1, Мир, Москва (1978)].
20. L.P. Kadanoff and G. Baym, *Quantum Statistical Mechanics*, Benjamin, New York (1962) [Л. Каданов, Г. Бейм, *Квантовая статистическая механика*, Мир, Москва (1964)].
21. В.Д. Озрин, *ТМФ* **4**, 66 (1970) [V.D. Ozrin, *Theor. Math. Phys.* **4**, 678 (1970)].
22. O. Penrose and L. Onsager, *Phys. Rev.* **104**, 576 (1956).
23. C.N. Yang, *Rev. Mod. Phys.* **34**, 694 (1962).
24. В.Б. Бобров, А.Г. Загородний, С.А. Тригер, *Доклады АН* **461**, 400 (2015) [V.B. Bobrov, S.A. Trigger, and A.G. Zagorodny, *Doklady Physics* **60**, 147 (2015)].
25. А.А. Абрикосов, Л.П. Горьков, И.Е. Дзялошинский, *Методы квантовой теории поля в статистической физике*, ГИФМЛ, Москва (1962) [A.A. Abrikosov, L.P. Gor'kov, and I.E. Dzjaloshinskii, *Quantum Field Theoretical Methods in Statistical Physics*, Pergamon, Oxford (1965)].
26. С.Т. Беляев, *ЖЭТФ* **34**, 417 (1958) [*Sov. Phys. JETP* **7**, 289 (1958)].
27. A. Griffin, *Excitations in a Bose-Condensed Liquid*, Cambridge Univ. Press, Cambridge (1993).
28. О.К. Калашников, Е.С. Фрадкин, *ТМФ* **5**, 417 (1970) [*Theor. Math. Phys.* **5**, 1250 (1970)].
29. Е.М. Лифшиц, Л.П. Питаевский, *Статистическая физика*, ч. 2, Наука, Москва (1978) [E.M. Lifshitz, L.P. Pitaevskii, *Statistical Physics*, part 2, Pergamon, Oxford (1980)].

30. Д.Н. Зубарев, *Неравновесная статистическая термодинамика*, Наука, Москва (1971) [D.N. Zubarev, *Nonequilibrium Statistical Thermodynamics*, Consultants Bureau, New York (1974)].
31. В.Б. Бобров, А.Г. Загородний, С.А. Тригер, *ФНТ* **41**, 760 (2015) [*Low Temp. Phys.* **41**, 589 (2015)].
32. В.Б. Бобров, Ю.П. Власов, С.А. Тригер, *ЖЭТФ* **102**, 107 (1992) [*JETP* **75**, 56 (1992)].
33. R.P. Feynman, *Phys. Rev.* **94**, 262 (1954).
34. R.P. Feynman and M. Cohen, *Phys. Rev.* **102**, 1189 (1956).
35. V.B. Bobrov and S.A. Trigger, *Physica A* **170**, 187 (1990).
36. G.J. Kalman, P. Hartmann, K.I. Golden, A. Filinov, and Z. Donko, *Europhys. Lett.* **90**, 55002 (2010).
37. В.Б. Бобров, А.Г. Загородний, С.А. Тригер, *Доклады АН* **464**, 28 (2015) [V.B. Bobrov, A.G. Zagorodny, S.A. Trigger, *Doklady Physics* **60**, 385 (2015)].
38. Л.Д. Ландау, *ЖЭТФ* **11**, 592 (1941) [L.D. Landau, *J. Phys. USSR* **5**, 71 (1941)].
39. L.D. Landau, *J. Phys. USSR* **11**, 91 (1947).
40. J.L. Yarnell, G.P. Arnold, P.J. Bendt, and E.C. Kerr, *Phys. Rev.* **113**, 1379 (1959).
41. D.G. Henshaw and A.D.B. Woods, *Phys. Rev.* **121**, 1266 (1961).
42. В.Б. Бобров, С.А. Тригер, *Краткие сообщения по физике ФИАН* № 6, 48 (2013) [V.B. Bobrov and S.A. Trigger, *Bull. Lebedev Phys. Institute* **40**, 168 (2013)].
43. W. Ebeling, W.-D. Kraeft, D. Kremp, and G. Ropke, *Quantum Statistics of Charged Particle Systems*, Springer, Berlin (2013).
44. В.Б. Бобров, А.Г. Загородний, С.А. Тригер, *ФНТ* **41**, 1154 (2015) [*Low Temp. Phys.* **41**, 901 (2015)].
45. E.A. Pashitskii, S.V. Mashkevich, and S.I. Vilchynskyy, *Phys. Rev. Lett.* **89**, 075301 (2002).

One more approach to the spectra of excitations in degenerate Bose gas with delta shaped interaction potential

V.B. Bobrov, A.G. Zagorodny, and S.A. Trigger

A formalism to describe the equilibrium Bose gas is proposed based on the consideration in the macroscopic, but a finite volume. The presence of Bose–Einstein condensate is taken into account through the off-diagonal long-range order in the transition to the thermodynamic limit. On this basis, a description of the degenerate Bose gas with delta-shaped interaction potential within the framework of the self-consistent Hartree–Fock approximation is given. Explicit expressions are obtained for the energy spectrum of single-particle and collective excitations.

PACS: 67.10.Ba Boson degeneracy;
67.10.Fj Quantum statistical theory;
67.25.de Thermodynamic properties;
67.25.dt Sound and excitations.

Keywords: degenerate Bose gas, Bose–Einstein condensate, collective excitations, single-particle excitations.