

Эффект близости и эффект Джозефсона в микроструктурах на основе многозонных сверхпроводников

(Обзор)

Ю.С. Ерин^{1,2}, А.Н. Омелянчук²

¹*Институт физики микроструктур Российской академии наук, Нижний Новгород, 603950, Россия*

²*Физико-технический институт низких температур им. Б.И. Веркина НАН Украины
пр. Науки, 47, г. Харьков, 61103, Украина
E-mail: yuriyyerin@gmail.com*

Статья поступила в редакцию 20 февраля 2017 г., после переработки 28 марта 2017 г.,
опубликована онлайн 25 июля 2017 г.

Возникнув в 50-е годы XX века многозонная сверхпроводимость длительное время рассматривалась как приближенная модель в виде обобщения теории БКШ на случай двух зон для более точного количественного описания свойств и характеристик сверхпроводников, таких как купраты, тяжелофермионные соединения, борокарбиды, фуллериды, рутенат стронция и др. ввиду их сложной кусочно-непрерывной поверхности Ферми. Однако обнаружение многозонной структуры сверхпроводящего состояния в дибориде магния в 2001 г. и оксипниктидах и халькогенидах железа в 2008 г. привело к появлению большого количества работ, в которых были заново исследованы эффекты и различные зависимости, хорошо известные для обычных однозонных s -волновых сверхпроводников. Основная цель этих исследований заключается в выявлении типа симметрии параметра порядка, дающего важную информацию о механизме спаривания куперовских пар в данных сверхпроводниках. Одним из наиболее эффективных способов получения информации о симметричных свойствах параметра порядка в многозонных сверхпроводниках являются фазочувствительные методики. Данный обзор суммирует результаты теоретических и экспериментальных исследований эффекта близости и эффекта Джозефсона в системах на основе многозонных сверхпроводников, контактирующих с нормальными металлами, изоляторами и другими сверхпроводниками.

Виникнувши в 50-і роки XX століття багатозонна надпровідність тривалий час розглядалася спочатку як наближена модель у вигляді узагальнення теорії БКШ на випадок двох зон для більш точного кількісного опису властивостей та характеристик надпровідників таких, як купрати, тяжкоферміонні сполучення, борокарбід, фулериди, рутенат стронцію та інші, оскільки вони мають складну кусково-безперервну поверхню Фермі. Однак виявлення багатозонної структури надпровідного стану у дибориді магнію в 2001 р. та оксипніктидах і халькогенідах заліза в 2008 р. привело до появи великої кількості робіт, в яких було знову досліджено ефекти та різні залежності, які добре відомі для звичайних однозонних s -хвильових надпровідників. Основна мета цих досліджень полягає у виявленні типу симетрії параметра порядку, що дає важливу інформацію про механізм спарювання куперівських пар в даних надпровідниках. Одним з найбільш ефективних способів отримання інформації щодо симетричної властивості параметра порядку в багатозонних надпровідниках є фазочутливі методики. Даний огляд підсумовує результати теоретичних та експериментальних досліджень ефекту близькості та ефекту Джозефсона в системах на основі багатозонних надпровідників, що контактують з нормальними металами, ізоляторами та іншими надпровідниками.

PACS: **74.45.+c** Эффекты близости; эффект Андреева; SN- и SNS-переходы;
74.50.+g Эффекты близости, слабые связи, туннелирование, эффект Джозефсона.

Ключевые слова: многозонный сверхпроводник, БКШ, симметрия параметра порядка.

Содержание

1. Введение	1264
2. Особенности эффекта близости в гетероструктурах на основе многозонных сверхпроводников ...	1265
2.1. Контакт нормального металла и двухзонного сверхпроводника	1265
2.2. Аномальный эффект близости на границе s и s_{\pm} -волнового сверхпроводника	1266
3. Эффект Джозефсона в многозонных сверхпроводниках	1270
3.1. SNS и SIS контакты.....	1270
3.2. ScS микроконтакты.....	1274
3.3. Квантовые интерферометры на основе многозонных сверхпроводников.....	1281
4. Экспериментальные результаты	1284
5. Заключение	1285
Приложение. Микроскопическая и феноменологическая теория многозонной сверхпроводимости ..	1285
А. Уравнения Эйленбергера и Узаделя	1285
В. Феноменологический подход	1288
Литература.....	1290

1. Введение

Микроскопическая теория сверхпроводимости Бардина, Купера и Шриффера (БКШ) основывается на изотропной модели металла [1,2]. Результаты, полученные в рамках этого подхода, дают хорошее качественное согласие с экспериментом. Однако полного количественного согласия данная теория не давала.

Практически сразу после создания модели БКШ была предпринята попытка частичного учета анизотропных свойств металла, а именно влияния перекрытия энергетических зон в окрестности поверхности Ферми [3,4], приводящее к появлению межзонных квантовых переходов электронов и, как следствие, дополнительному косвенному притяжению между электронами каждой зоны. Это порождает качественно новые свойства многозонной модели сверхпроводника по сравнению с моделью независимых зон. Необходимо отметить, что в то время многозонная (двухзонная) модель сверхпроводимости рассматривалась исключительно лишь как попытка «подогнать» под теорию БКШ экспериментальные данные, полученные при изучении различных свойств однозонных сверхпроводников и обнаруженных позднее соединений с так называемой необычной сверхпроводимостью (купраты, тяжелофермионные соединения, боркарбиды, фуллериды, рутенат стронция, органические сверхпроводники).

Однако настоящий бум исследований многозонной сверхпроводимости начался с открытием сверхпроводящего перехода в MgB_2 в 2001 году [5]. При помощи различных экспериментальных методик было установлено, что сверхпроводящая фаза диборида магния имеет две независимые щели с разной температурной зависимостью, существование которых нельзя трактовать в виде проявления анизотропии энергетической щели, как это обычно происходило ранее с упомянутыми выше так называемыми многозонными сверхпроводниками [6–25].

В 2008 году было обнаружено, что (окси)нитриды и халькогениды железа также обладают многозонной структурой сверхпроводящего состояния [26]. Однако в отличие от MgB_2 взаимодействие между параметрами порядка, характеризующих многощелевую природу сверхпроводимости данных соединений, носит характер отталкивания (межзонные матричные элементы межзонного взаимодействия являются отрицательными). Как правило, электронная зонная структура железосодержащих сверхпроводников состоит из двух дырочных карманов в центре зоны Бриллюэна и двух электронных карманов в (π, π) [27–29]. Это должно приводить к возникновению необычной уникальной s_{\pm} -волновой симметрии параметра порядка, которая примечательна тем, что на дырочном и электронном кусках поверхности Ферми материала возникают изотропные сверхпроводящие щели, которые, однако, имеют противоположные знаки на этих листах.

Впервые предположение о реализации такого параметра порядка в железосодержащих сверхпроводниках было выдвинуто независимо в работах [30–32]. Справедливости ради стоит отметить, что представление о s_{\pm} -симметрии было введено еще до открытия сверхпроводящей фазы в соединениях на основе железа в связи с теоретическим описанием сверхпроводимости в ряде других веществ, описывающихся мультиорбитальными моделями [33–37].

Различные электронные модели железосодержащих сверхпроводников, а также имеющиеся экспериментальные данные [38] указывают на то, что s_{\pm} -сверхпроводящее состояние является все-таки наиболее энергетически оптимальным для данного класса сверхпроводников. Несмотря на довольно большое количество экспериментальных фактов, подтверждающих данную гипотезу, вопрос о симметрии параметра порядка, а также количестве сверхпроводящих щелей в железосодержащих сверхпроводниках по-прежнему остается дискуссионным, поскольку для некоторых членов семейства сверхпроводников на основе железа двухзон-

ный подход не является достаточным, чтобы дать полное качественное и количественное объяснение имеющимся данным. Поэтому для лучшего описания экспериментальных результатов были предложены более сложные киральные симметрии спаривания: $s+id$, $s_{\pm}+is_{++}$ и изотропные s -волновые трехщелевые модели [39–42].

Очевидно, что наличие сложной структуры параметра порядка в многозонных сверхпроводниках порождает интересную новую физику. В частности, такие сверхпроводящие системы должны приводить к возникновению целого семейства топологических дефектов и квантовых явлений, не имеющих аналогов в обычных сверхпроводниках. Например, состояний с нарушенной симметрией относительно обращения времени, коллективных мод по типу леггетовских, фазовых солитонов и доменов, вихрей, несущих дробное значение магнитного потока и порождающих уникальное промежуточное состояние, отличное от сверхпроводимости 1 или 2 рода, дробный эффект Джозефсона.

Такое большое количество новых и нетривиальных данных уже было обобщено в недавних обзорах, посвященных теоретическим аспектам описания топологических дефектов многозонной сверхпроводимости и их экспериментальному детектированию [43,44]. Наряду с этим на данный момент существует уже довольно значительное число работ, в которых изучены когерентные токовые состояния в системах на основе многозонных сверхпроводников, в частности, джозефсоновские состояния, состояния в системах с двухсвязной геометрией и квазиодномерные бесконечно длинные каналы.

Следует отметить, что помимо всего прочего интерес к исследованию эффекта Джозефсона вызван тем, что фазочувствительные методики часто дают наиболее ценную информацию о симметрии параметра порядка в необычных сверхпроводниках и являются достаточно плодотворным «инструментом» для ее идентификации в соединениях, где данная проблема остается нерешенной (см., например, [45–48]).

В силу сказанного выше настоящая работа нацелена дать обзор известных на текущий момент теоретических и экспериментальных результатов по токовым состояниям в многозонных сверхпроводниках и особенно джозефсоновским системам на их основе.

Обзор организован следующим образом: в разд. 2 рассматриваются эффекты близости, которые возникают на интерфейсе многозонного сверхпроводника с нормальным металлом или другим сверхпроводящим материалом. Эффект Джозефсона в многозонных сверхпроводниках и джозефсоновские системы на их основе обсуждаются в разд. 3. Основные результаты суммируются в разд. 4. Также в обзоре для удобства в Приложении А и В приведено очень краткое изложение микроскопической теории многозонной сверхпро-

водимости и феноменологической модели Гинзбурга–Ландау, обобщенной на случай нескольких параметров порядка с s -волновым типом симметрии.

2. Особенности эффекта близости в гетероструктурах на основе многозонных сверхпроводников

2.1. Контакт нормального металла и двухзонного сверхпроводника

Эффект близости представляет собой явление проникновения куперовских пар сверхпроводника в нормальный металл или в другой сверхпроводник на расстоянии порядка длины когерентности, приводящее к индуцированию энергетической щели в материале, который контактирует со сверхпроводником. Этот эффект уже достаточно хорошо изучен и описан в терминах явления андреевского отражения и микроскопического формализма функций Грина [49–57].

Очевидно, что наличие нескольких энергетических щелей в спектре квазичастичных возбуждений сверхпроводника должно накладывать свои особенности на эффект близости. Такая проблема приобрела актуальность особенно после обнаружения многозонной сверхпроводимости в MgB_2 , в оксипниктидах и халькогенидах железа. Появившиеся вслед за этим теоретические и экспериментальные исследования прежде всего были нацелены на то, чтобы понять, как многозонная природа сверхпроводящего состояния будет влиять на эффект близости, в частности на плотность состояний на интерфейсе «многозонный сверхпроводник–металл», туннельный ток и другие сопутствующие явления?

В одной из первых таких работ теоретически исследован эффект близости в бислоях двухзонный сверхпроводник–однозонный сверхпроводник и двухзонный сверхпроводник–нормальный металл [58]. В ней был обобщен формализм уравнений Узалея [59] на две энергетических щели с адаптацией на этот случай дополнительно и граничных условия Куприянова–Лукичева [60,61] (см. Приложение А).

Первым объектом для теоретического исследования в этой статье была гетероструктура «однозонный сверхпроводник– MgB_2 ». Рисунок 1 демонстрирует результаты численного решения уравнений Узалея для энергетических щелей в системе, образованной сверхпроводящим диборидом магния и однозонным обычным сверхпроводником.

При температурах выше критической температуры однозонного сверхпроводника (сплошные линии на рис. 1) можно видеть, что щель в нем растет по мере приближения к интерфейсу, в то время как Δ_{σ} (большая щель в MgB_2) уменьшается, как, в принципе, и следовало ожидать, исходя из аналогии с эффектом близости в случае с однозонными сверхпроводящими бислоями. Уменьшение второй, более слабой щели Δ_{π}

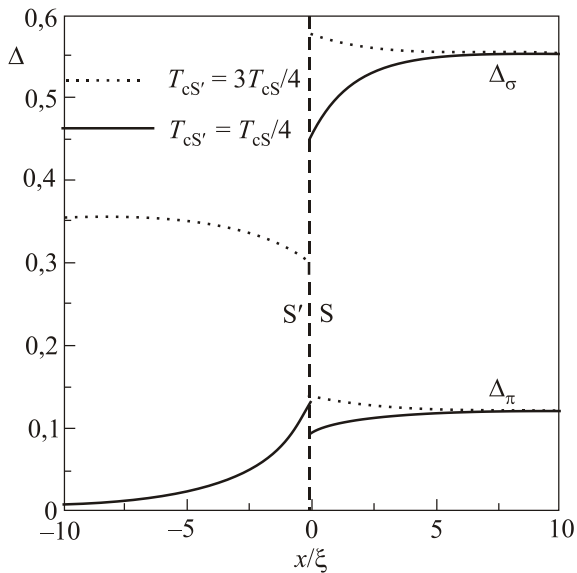


Рис. 1. Величины энергетических щелей MgB_2 (S) и однозонного сверхпроводника (S') в зависимости от положения в S'S гетероструктуре. Длины когерентности сверхпроводников считаются одинаковыми. Пунктирная линия соответствует интерфейсу бислоя [58].

вблизи интерфейса можно объяснить относительно сильной межзонной связью между двумя зонами. За счет ослабления межзонного взаимодействия и одновременного увеличения спаривания между контактирующими сверхпроводниками (за счет малых значений параметров барьеров на границе раздела гетероструктуры), был получен противоположный режим, в котором

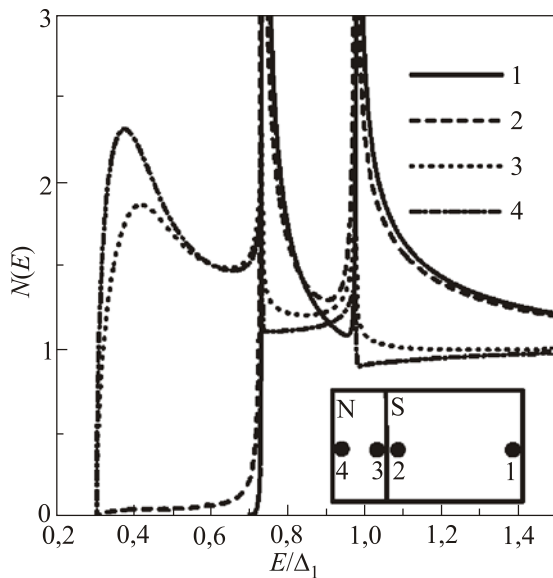


Рис. 2. Нормированная плотность состояний SN (S — двухзонный сверхпроводник, N — нормальный металл) бислоя в четырех разных точках гетероструктуры (отмечены на вставке черными точками с цифрами). Константы электрон-фононного спаривания для двухзонного сверхпроводника $\Lambda_{11} = 0,5, \Lambda_{22} = 0,4, \Lambda_{12} = \Lambda_{21} = 0,1$ [58].

энергетические щели двухзонного сверхпроводника растут по направлению к интерфейсу (пунктирные линии на рис. 1). Этот результат можно трактовать как особенность эффекта близости в случае двухзонного сверхпроводника, когда происходит увеличение щелей при контакте с однозонным сверхпроводящим материалом, у которого более низкая критическая температура.

Такое поведение подтверждается расчетами плотности состояний в SN бислое (рис. 2). Как следует из приведенного графика, в нормальном слое гетероструктуры присутствует три пика плотности состояний: нижний слой соответствует индуцированной сверхпроводящей частью бислоя маленькой щели, два других являются результатом двухзонной структуры контактирующего сверхпроводника.

2.2. Аномальный эффект близости на границе s и s_{\pm} -волнового сверхпроводника

Сверхпроводящий диборид магния в невозмущенном состоянии обладает нулевой разностью фаз ϕ между параметрами порядка, или s_{++} -волновым механизмом спаривания. Результаты экспериментов с некоторыми соединениями из семейства сверхпроводящих оксипниктидов и халькогенидов железа косвенно указывает на то, что в этих сверхпроводниках энергетически выгодным является s_{\pm} -волновая симметрия параметра порядка, когда в основном состоянии $\phi = \pi$.

Очевидно, что наиболее убедительной диагностикой механизма спаривания должны быть фазочувствительные методики. Логично предположить, что одним из таких тестов для определения противоположных знаков параметров порядка в двухзонном сверхпроводнике может служить эффект близости.

Впервые возможность использования данного эффекта теоретическим образом была обоснована в статье [62]. Для иллюстрации рассматривался «сэндвич» из тонкого (по отношению к длине когерентности) слоя обычного s-волнового сверхпроводника и двухзонного сверхпроводящего материала с s_{\pm} типом симметрии. При этом предполагалось, что оба вещества имеют большую концентрацию немагнитных примесей. Такая гипотеза о грязных сверхпроводниках позволила задействовать формализм уравнений Узаделя с соответствующими граничными условиями Куприянова–Лукичева. В рамках такого подхода с учетом заявленной малой толщины слоя обычного s-волнового сверхпроводника аналитическим образом была приблизительно рассчитана плотность состояний на интерфейсе изучаемой системы (рис. 3).

Расчеты показали, что s_{\pm} -волновая симметрия дает уникальный «отпечаток» на плотности состояний гетероструктуры. Параллельная ориентация фаз параметров порядка (см. вставку на рис. 3) приводит к небольшому пику на плотности состояний, в то время как антипараллельно расположенные фазы индуцируют

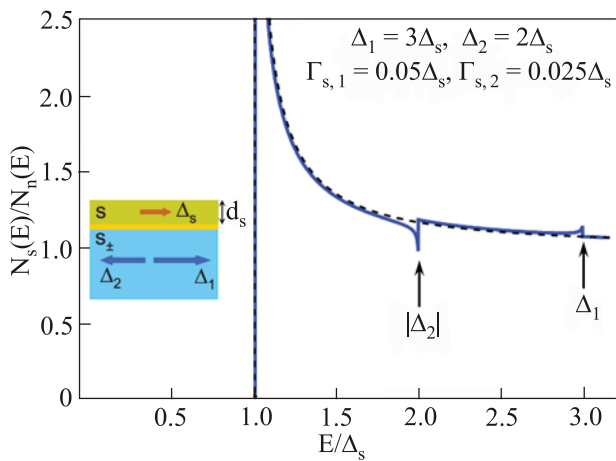


Рис. 3. (Онлайн в цвете) Плотность состояний на интерфейсе гетероструктуры «обычный s-волновой сверхпроводник–двухзонный сверхпроводник с s_{\pm} -типом симметрии» [62].

небольшой провал. Если наличие пиков на графике плотности состояний — обычный эффект между двумя сверхпроводниками, то наблюдаемую в расчетах аномальную впадину явно следует рассматривать как особенность, обусловленную близостью с s_{\pm} -волновым двухзонным сверхпроводником.

Дальнейшие теоретические исследования показали, что при определенных характеристиках бислоя, образованного обычным и s_{\pm} -волновым сверхпроводником, в гетероструктуре может формироваться нетривиальное фрустрированное состояние с нарушенной симметрией относительно обращения времени, соответствующее разности фаз отличной от нуля или π [63,64]. Возможность реализации такого эффекта близости может быть продемонстрирована на феноменологическом уровне. Джозефсоновская энергия связи двух контактирующих сверхпроводников в пределе слабой связи между слоями гетероструктуры имеет вид

$$E(\phi) = (E_{J1} - E_{J2})(1 - \cos \phi) + \frac{E_{J2}}{2}(1 - \cos 2\phi), \quad (1)$$

где ϕ обозначает разность фаз между параметром порядка Δ_s в однозонном сверхпроводнике и первым параметром порядка Δ_1 в s_{\pm} -волновом двухзонном сверхпроводнике, а коэффициент E_{J2} возникает в результате ненулевой прозрачности барьера на интерфейсе бислоя. Выражение (1) соответствует джозефсоновскому току:

$$j(\phi) = (j_{J1} - j_{J2})\sin \phi + j_{J2}^{(2)}\sin 2\phi. \quad (2)$$

В свою очередь минимизация энергии (1) по разности фаз ϕ дает выражение для основного состояния гетероструктуры

$$\cos \phi_0 = \frac{j_{J1} - j_{J2}}{2|j_{J2}^{(2)}|}. \quad (3)$$

Очевидно, что в основном состоянии ϕ_0 плавно меняется от 0 до π , когда разность тока варьируется от $2|j_{J2}^{(2)}|$ до $-2|j_{J2}^{(2)}|$. Таким образом, фактически состояние с нарушенной симметрией относительно обращения времени реализует так называемый ϕ -контакт [65] (рис. 4).

Однако, как показал последующий микроскопический анализ, вторая гармоника в джозефсоновском транспорте и соответственно состояние с нарушенной симметрией относительно обращения времени возникает лишь в случае очень слабого межзонного взаимодействия в двухзонном сверхпроводнике с симметрией s_{\pm} типа. Определить наличие этого состояния, равно как и s_{\pm} -волновой механизм спаривания в статье [64], предлагается через специфические особенности в плотности состояний. Результаты приближенного решения уравнений Узалея для сэндвича демонстрируют характер изменения плотности состояний (рис. 5). В частности, параллельная ориентация фаз первого параметра порядка двухзонного сверхпроводника и параметра порядка однозонного сверхпроводника ($\phi = 0$) генерирует положительный пик на плотности состояний, антипараллельная дает отрицательный вклад. В «максимально» фрустрированном состоянии, когда $\phi = \pi/2$, согласно вычислениям плотность состояний имеет два небольших провала.

Более детальное исследование условий для возникновения состояния с нарушенной симметрией относительно обращения времени в бислое, образованного однозонным и двухзонным сверхпроводником с s_{\pm} -волновой симметрией, было проведено в работе [66]. В пределе малой прозрачности барьеров и при температуре, близкой к нулю, теорией возмущений аналитическим образом было получено решение уравнений Узалея. На основании этих результатов была построена фазовая диаграмма всех возможных состояний в эффекте близости

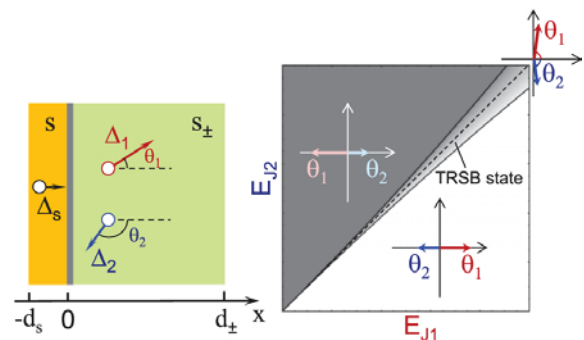


Рис. 4. (Онлайн в цвете) (Слева) Джозефсоновский контакт между s и s_{\pm} сверхпроводниками с произвольными значениями параметров порядка в них. (Справа) Схематическое изображение фазовой диаграммы состояний бислоя в зависимости от энергии спаривания параметров порядка двухзонного сверхпроводника с параметром порядка однозонного сверхпроводника [64].

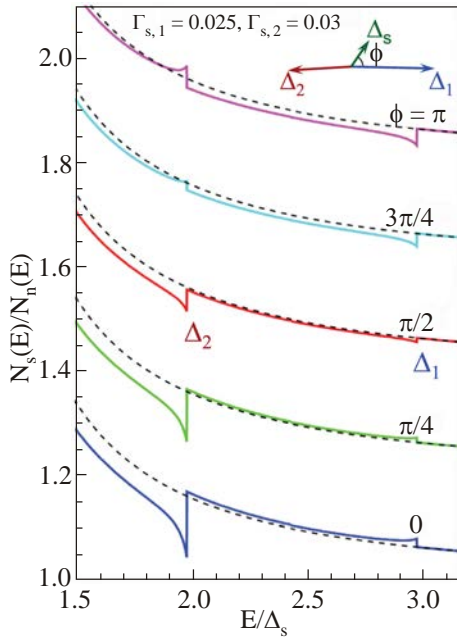


Рис. 5. Эволюция особенностей плотности состояний в s -волновом сверхпроводнике, индуцированных эффектом близости с s_{\pm} -сверхпроводником. Разность между первым параметром порядка двухзонного сверхпроводника и параметром порядка в однозонном сверхпроводнике увеличивается от 0 до π . Для большей ясности графики искусственно сдвинуты по отношению к друг другу. Пунктирная линия соответствует плотности состояний изолированного массивного однозонного сверхпроводника [64].

между однозонным и двухзонным сверхпроводником (рис. 6) в зависимости от прозрачности барьеров на границе.

Рисунок 6 иллюстрирует области, где имеет место «положительный» эффект близости (параметр порядка в однозонном s -волновом сверхпроводнике усиливается), «отрицательный» (подавление параметра порядка в однозонном сверхпроводнике) и небольшая область с так называемым аномальным эффектом близости, где реализуется фрустрированное состояние, приводящее,

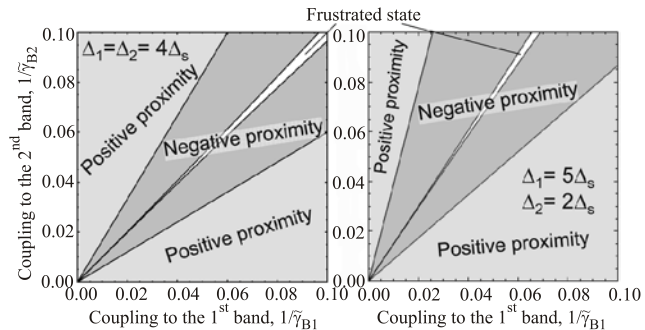


Рис. 6. Фазовая диаграмма возможных состояний контакта s и s_{\pm} сверхпроводника в пределе слабой связи между слоями гетероконтакта и при нулевой температуре для разных значений энергетических щелей, указанных на рисунках [66].

как это было показано ранее, к нарушению симметрии относительно обращения времени.

Эффект близости между однозонным и s_{\pm} -волновым сверхпроводником может быть описан и в рамках феноменологической теории Гинзбурга–Ландау. В работе [67] был предложен функционал свободной энергии Гинзбурга–Ландау для описания такой системы:

$$F[\Delta_1, \Delta_2] = F_L + F_R + F_c, \quad (4)$$

где $F_{v=L,R}$ — энергия левой и правой части бислоя

$$F_v = \int_v dx \left\{ \sum_{i=1,2} \left[\frac{1}{2} \kappa_i^v |\partial_x \Delta_i|^2 - \frac{1}{2} r_i^v |\Delta_i|^2 + \frac{1}{4} u_i^v |\Delta_i|^2 + \frac{1}{4} \alpha_i^v (\Delta_i^* \partial_x \Delta_i - \Delta_i \partial_x \Delta_i^*) \right] - v^v (\Delta_1^* \Delta_2 + c.c.) \right\} \quad (5)$$

F_c представляет энергию контакта однозонного и двухзонного сверхпроводника

$$F_c = \sum_{i=1,2} \left[T_i \left| \Delta_i(0^+) - \Delta_i(0^-) \right|^2 \right], \quad (6)$$

а κ_i^v , r_i^v и u_i^v обозначают стандартные параметры феноменологической модели. Член с α_i^v соответствует дополнительной энергии, создаваемой сверхпроводящим током между двумя сверхпроводниками. Коэффициент v^v описывает межзонное взаимодействие. Коэффициент T_i ответственен за прозрачность барьеров на интерфейсе гетероструктуры.

Вариация свободной энергии (4) по разности фаз параметров порядка в двухзонном сверхпроводнике с s_{\pm} типом симметрии позволяет классифицировать возможные режимы в поведении бислоя (рис. 7)

В зависимости от прозрачности барьеров и характеристик контактирующих материалов имеет место три качественно разных состояния: 1) режим, когда зависимость свободной энергии обладает единственным минимумом для разности фаз параметров порядка двухзонного сверхпроводника $\phi = 2\pi n$ (n — целое число); 2) состояние с нарушенной симметрией относительно обращения времени, где минимум свободной энергии вырожден при $\phi = 2\pi n \pm \phi_0$ и 3) режим с двумя минимумами, один из которых глобальный для $\phi = 2\pi n$ и второй локальный для $\phi = \pi(2n + 1)$.

Помимо формализма квазиклассических уравнений Узалея и феноменологии теории Гинзбурга–Ландау исследование характеристик контакта и его вероятных особенностей проводилось и с помощью уравнений Боголюбова–де Жена. С их помощью в работе [68] была развита самосогласованная теория эффекта близости в гетероструктуре, образованной s_{\pm} -волновым двухзонным сверхпроводником и его однозонным аналогом. Численное решение уравнений Боголюбова–де Жена позволило найти энергию системы как функцию

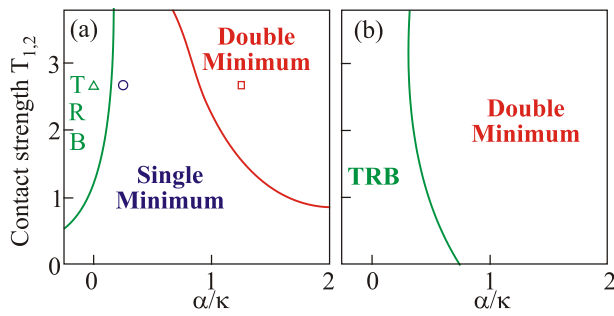


Рис. 7. (Онлайн в цвете) (а) Фазовая диаграмма возможных состояний $s-s_{\pm}$ бислоя для значений коэффициентов в теории Гинзбурга–Ландау: $r_1^v = 1, k_1^v = 4, u_1^v = 1, u_2^v = 2, v^L = -v^R, \alpha_i^v = \alpha, l = 3$ и $T_1 = T_2$. Различные состояния соответствуют разному качественному поведению зависимостей энергии от разности фаз параметров порядка в двухзонном сверхпроводнике, а именно состояние с одним минимумом («single minimum») при $\phi = 2\pi n$, фаза с нарушенной симметрией относительно обращения времени («time-reversal breaking») с минимумом в точках $\phi = 2\pi n \pm \phi_0$ и состояние с двумя минимумами («double minimum») при $\phi = \pi n$. (б) То же, что и на рисунке (а), но с одинаковыми модулями параметра порядка в двухзонном сверхпроводнике. В этом случае исчезает состояние с единственным минимумом [67].

разности фаз между параметром порядка в однозонном сверхпроводнике и первым параметром порядка в s_{\pm} -волновом двухзонном сверхпроводнике $E(\phi)$ (рис. 8).

Поскольку все найденные зависимости периодические и обладают симметрией $E(\phi) = E(-\phi)$, то на графиках представлен интервал от 0 до π . В процессе численного моделирования было найдено четыре типа состояния бислоя: (а) 0-контакт с минимальным значением энергии для нулевой разности фаз между параметром порядка s -волнового сверхпроводника и параметром порядка дырочного участка поверхности Ферми двухзонного сверхпроводника (соответственно разность фаз между параметром порядка обычного сверхпроводника и параметром порядка электронного листа поверхности Ферми двухзонного сверхпроводника равна π); (б) π -контакт, когда разность фаз равна π ; (с) ϕ — контакт для случая минимума энергии в интервале $0 < \phi < \pi$; и (д) контакт с двумя минимумами, имеющим место, когда реализуется два минимума на зависимости $E(\phi)$, один из которых локальный при нулевой разности фаз, а второй — глобальный в интервале $0 < \phi \leq \pi$.

Ввиду того, что построенная модель содержит довольно большое число параметров контактирующих сверхпроводников и интерфейса между ними, в этой же работе была предпринята попытка выяснить условия формирования четырех указанных выше состояний, зафиксировав с этой целью характеристики s_{\pm} сверхпроводника и меняя параметры интерфейса и обычного однозонного сверхпроводника.

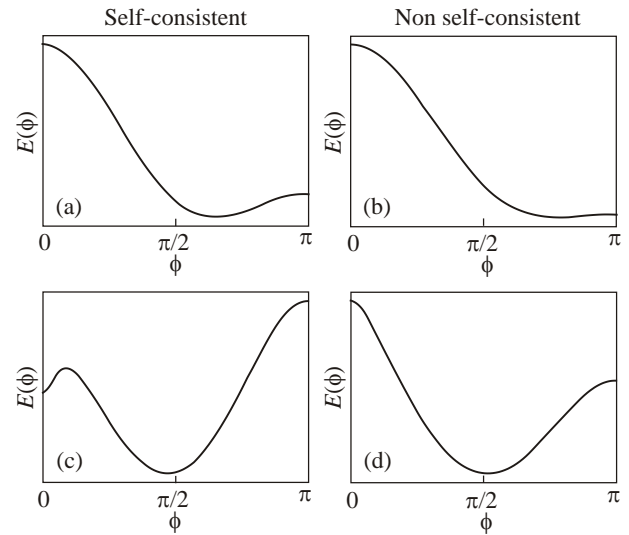


Рис. 8. Примеры поведения энергии от разности фаз между параметром порядка в однозонном сверхпроводнике и первым параметром порядка в s_{\pm} -волновом двухзонном сверхпроводнике в результате самосогласованного расчета для 0-контакта (а) и контакта с двумя минимумами (с). (б) и (д) Аналогичные зависимости, полученные из несамосогласованного расчета для тех же параметров, которые использовались для графиков (а) и (с) соответственно [68].

Когда туннельные амплитуды бислоя w_x и w_y малы, переход между 0-контактом и π -контактами очень резкий, а область существования ϕ -контакта занимает на фазовой диаграмме очень маленький серебряный участок (рис. 9). С увеличением значений w_x и w_y фазовое пространство существования ϕ -контакта расширяется.

Химический потенциал однозонного сверхпроводника μ_0 также оказывает значительное влияние на поведение гетероструктуры и ее фазовую диаграмму. На рис. 9 видно, что существует некоторое критическое значение химического потенциала μ_c , такое, что $\mu_0 > \mu_c > 0$, для которого минимум энергии системы реализуется для разности, равной π . Для $\mu_0 < \mu_c$ небольшие изменения химического потенциала приводят к переходам от нулевой разности фаз к π и наоборот. Также было обнаружено, что рост величины щели в однозонном сверхпроводнике уменьшает число этих переходов при фиксированных значениях туннельных амплитуд.

Помимо фундаментальных аспектов, изложенных выше, интерес к эффекту близости между нормальным металлом и многозонным сверхпроводником вызван еще и тем, что он представляет собой теоретический базис для микроконтактной андреевской спектроскопии, служащей мощным методом для диагностики симметрии параметра порядка в сверхпроводящих материалах с несколькими энергетическими щелями [69–71]. В работе [71] был обобщен формализм Блондера–Тинкхам–Клапника на случай двухзонного сверхпроводника с учетом разности фаз параметра порядка в нем. Полученное из решения уравнений Боголюбова–де Жена

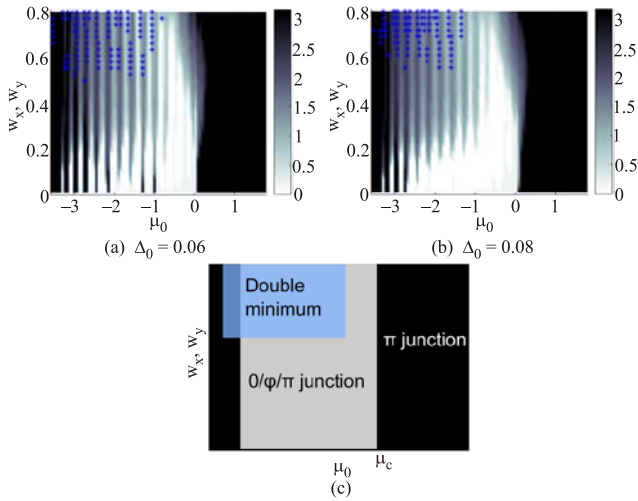


Рис. 9. (Онлайн в цвете) Фазовая диаграмма состояний (а) и (б) гетероструктуры « $s-s_{\pm}$ сверхпроводник» в зависимости от величин туннельных амплитуд $w_x = w_y$ и химического потенциала μ_0 однозонного сверхпроводника с щелью Δ_0 . Белые области соответствуют нулевой разности фаз между s -волновым сверхпроводником и параметром порядка для электронного кармана, черные — разность фаз равна π . Серые области означают промежуточное состояние с разностью фаз от 0 до π . Синие символы указывают области с двумя минимума на зависимости энергии от разности фаз. (с) представляет схематическое изображение фазовой диаграммы. В черных областях энергия системы достигается при разности фаз равной π , в серых — переплетение состояний с разностью фаз 0, ϕ и π . Область с возможностью существования дополнительного минимума с нулевой разностью фаз отмечена синим цветом [68].

аналитическое выражение для проводимости микроконтакта позволило установить важное различие между s_{++} и s_{\pm} -волновой симметрией в двухзонном сверхпроводнике, которое может быть использовано для интерпретации соответствующих экспериментов микроконтактной спектроскопии «железных» сверхпроводников [72–76].

3. Эффект Джозефсона в многозонных сверхпроводниках

В 1962 году Джозефсон предсказал возможность протекания незатухающего тока через туннельный контакт, образованный двумя сверхпроводниками. Было показано, что величина этого тока синусоидальным образом зависит от когерентной разности фаз левого и правого сверхпроводящего берегов [77]. Такой эффект впоследствии получил название стационарный эффект Джозефсона.

В работе [78] Джозефсон установил, что, когда туннельный ток превышает некоторое критическую величину, на контакте появляется отличное от нуля напряжение, и ток становится нестационарным, осциллируя

с частотой, пропорциональной величине напряжения. Данное явление называют нестационарным эффектом Джозефсона. Эти теоретические предсказания вскоре получили экспериментальное подтверждение [79–81].

Обнаружение двухзонной сверхпроводимости в дибориде магния и многозонной структуры энергетического спектра сверхпроводящего состояния в оксиднигидах и халькогенидах железа возобновило интерес к фазовым когерентным токовым состояниям, среди которых важное место занимает и эффект Джозефсона. С учетом того, что высокотемпературные сверхпроводники на основе железа, вероятно, обладают сложной комплексной симметрией типа $s_{\pm} + id$, $s_{\pm} + is_{++}$ и т.п., джозефсоновская спектроскопия представляет фактически единственный метод, позволяющий «чувствовать» разность фаз между параметрами порядка в этих соединениях.

Вместе с тем эффект Джозефсона полезен и для детектирования коллективных мод в многозонных сверхпроводниках, впервые предсказанных Легеттом [82]. Эти моды могут существовать независимо от знаков параметров порядка в зонах и включают в себя колебания разности их фаз.

3.1. SNS и SIS контакты

Эффект Джозефсона может быть реализован в разных структурах [83]. В пионерской работе Джозефсона рассматривался туннельный контакт, в котором барьер имел дельта-функциональную форму. Дальнейшие теоретические изыскания показали, что бездиссипативное протекание тока возможно и в туннельных SIS контактах со слабой связью в виде изолирующей (I) прослойки между двумя сверхпроводниками (S), а также SNS сэндвичах со слоем нормального металла (N).

После открытия сверхпроводимости в дибориде магния стало понятно, что данный эффект для многозонных сверхпроводников, будучи фазочувствительным явлением, должен иметь уникальные характеристики, отражающие необычную симметрию параметра порядка. Первые работы в поисках этих особенностей были посвящены джозефсоновским контактам SIS и SNS типа, где один или оба сверхпроводника имеют s_{\pm} симметрию.

В рамках квазиклассических уравнений Эйленберге-ра и соответствующего обобщения граничных условий Куприянова–Лукичева можно вывести формулу Амбегаокара–Баратова для контактов, образованных многозонными (двухзонными) сверхпроводниками [84] (более детальный анализ формулы применительно к железным сверхпроводникам выполнен в статье [85])

$$I_{ij} = \frac{\pi T}{e R_{ij}} \sum_{\omega} \frac{\Delta_{Rj} \Delta_{Li}}{\sqrt{\omega^2 + \Delta_{Li}^2} \sqrt{\omega^2 + \Delta_{Rj}^2}}, \quad (7)$$

где L и R обозначают левый и правый сверхпроводник соответственно, $R_{ij}^{-1} = \min\{R_{Lij}^{-1}, R_{Rij}^{-1}\}$ — нормальное

сопротивление контакта для зон (i, j) , которое определяется специальным интегралом по поверхности Ферми $S_{Li(Rj)}$

$$\left(R_{L(R)ij}A\right)^{-1} = \frac{2e^2}{\hbar} \int_{v_x > 0} \frac{D_{ij}v_{n, Li(Rj)}d^2S_{Li(Rj)}}{(2\pi)^3 v_{F, Li(Rj)}}. \quad (8)$$

Здесь A — площадь контакта, v_n — проекция скорости Ферми v_F на направление нормали к плоскости интерфейса, D_{ij} обозначает вероятность туннелирования квазичастицы из i — зоны левого сверхпроводника L в j — зону правого берега R . Полный ток I через контакт находится посредством суммирования $I = \sum_{ij} I_{ij}$.

Практически сразу после установления электрон-фононного механизма двухзонной сверхпроводимости в MgB_2 и определения матриц констант связи в этом соединении данная формула была использована для расчета джозефсоновского туннелирования в S_2IS_2 и S_1IS_2 контактах, где S_1 и S_2 — однощелевой ниобий и двухщелевой диборид магния соответственно [84]. Результаты численных вычислений представлены на рис. 10.

Вследствие сильного внутри- и межзонного спаривания температурная зависимость критического тока системы $MgB_2-I-MgB_2$ для кристаллографической плоскости ab отличается от зависимости для однозонного изотропного сверхпроводника, получаемой из результата Амбегаокара–Баратова. Благодаря преобладающему вкладу от π -зоны критический ток в плоскости ab демонстрирует положительную кривизну. Для туннелирования вдоль c -оси критический ток формируется исключительно вкладом от π -зоны.

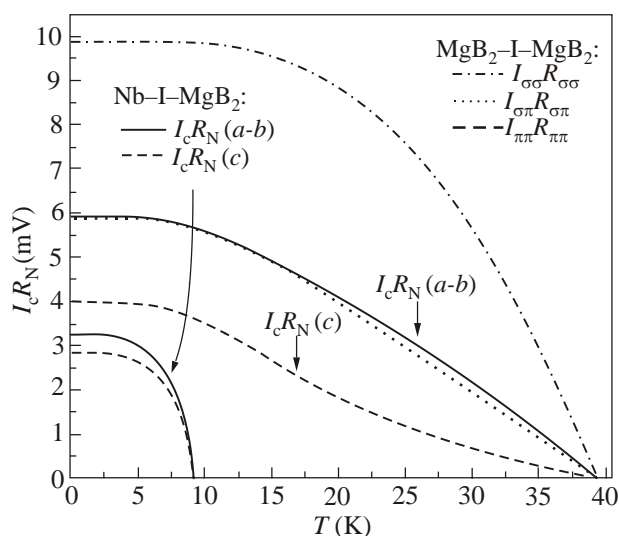


Рис. 10. Температурные зависимости критических токов туннельных контактов $MgB_2-I-MgB_2$ и $Nb-I-MgB_2$ для разных зон и разных кристаллографических направлений [84].

Аналогичный характер поведения гетероструктуры реализуется и для случая, когда один из берегов контакта является однозонным сверхпроводником $Nb-I-MgB_2$. Критический ток системы вдоль оси c создается только за счет π -зоны.

Наиболее интересный результат формула Амбегаокара–Баратова дает для туннельного тока джозефсоновской системы, в которой один из электродов является двухзонным сверхпроводником с разностью фаз в берегах равной π , т.е. с s_{\pm} симметрией, а другой — обычным сверхпроводящим материалом с одной щелью. В статье [86] показано, что в случае равных парциальных вкладов в нормальное сопротивление контакта зависимость критического тока через гетероструктуру при повышении температуры демонстрирует наличие максимума, который не совпадает с абсолютным нулем (рис. 11), как это имело бы место в случае эффекта Джозефсона для однозонных сверхпроводников.

Если же вклад каждой из зон в нормальное сопротивление не эквивалентен друг другу, то поведение температурной зависимости становится еще более экзотическим. При определенной температуре, отличной от температуры сверхпроводящего перехода, критический ток контакта равен нулю (рис. 11). Фактически это означает, что увеличение температуры приводит к смещению основного состояния джозефсоновской системы с 0 на π , т.е. происходит температурное переключение обычного контакта на π -контакт.

Более глубокий анализ условий $0-\pi$ переключений основного состояния в баллистических SIS гетероструктурах проведен в рамках уравнений Боголюбова–де

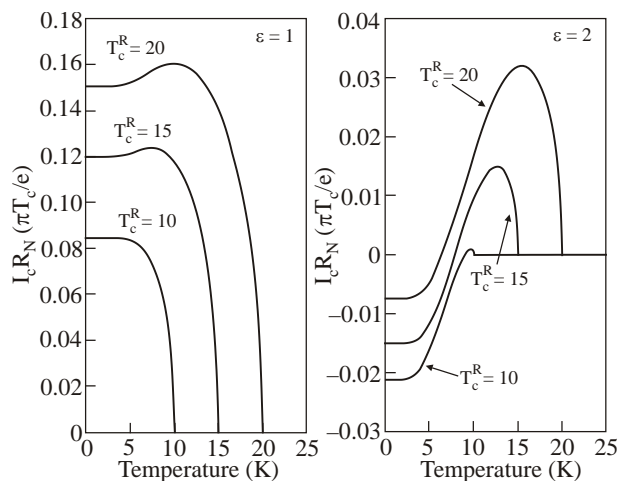


Рис. 11. Температурная зависимость джозефсоновского тока в контакте между s_{\pm} двухзонным сверхпроводником с критической температурой $T_c^R = 41$ К и однозонным сверхпроводником с различной T_c^R , указанной на графике. Параметр $\varepsilon = R_{N,\sigma}/R_{N,\pi}$ отражает парциальные вклады зон σ и π сверхпроводника с двумя щелями в сопротивление туннельного контакта. Константы связи в двухзонном сверхпроводнике $V_{\pi\pi} = 0$, $V_{\sigma\pi} = V_{\pi\sigma} = -0,35|V_{\sigma\sigma}|$ [86].

Жена [87]. В статье рассматривался контакт, образованный s и s_{\pm} сверхпроводниками. Путем численного моделирования были рассчитаны спектры андреевских связанных состояний в зависимости от коэффициента межзонного взаимодействия в двухзонном сверхпроводнике для совпадающих между собой энергетических щелей и нулевой температуры. В то время как для распаренных невзаимодействующих зон наблюдается пересечение энергетических состояний (синяя кривая), с увеличением «силы» межзонного взаимодействия происходит их «отталкивание» и формируется растущая щель в спектре андреевских состояний (рис. 12(a)).

Однако одним из главных результатов статьи [87] является возможность $0-\pi$ переключения в SIS системе при определенном отношении коэффициентов прозрачности для каждой зоны на интерфейсе джозефсоновского контакта, проявляющийся как излом на зависимости критического тока системы (рис. 12(б)).

Для ненулевой температуры и несовпадающих значениях энергетических щелей ток-фазовые соотношения демонстрируют поведение π -контакта с доминирующей компонентой от второй гармоники (рис. 13), что дает максимум джозефсоновского тока при некотором значении разности фаз φ^* отличной от $\pi/2$.

Эти же результаты, в частности температурное переключение с обычного на π -контакт и возникновение компоненты второй гармоники в джозефсоновском транспорте, можно получить, применяя метод туннельного гамильтониана [88].

Разнообразие основных состояний $s_{++}Is$ контакта и $s_{\pm}Is$ было продемонстрировано также с помощью уравнений Горькова для функций Грина в приближении сильно связанных электронов [89,90], в которых учитывались различные направления интерфейса относительно кристаллографических осей двухзонных сверхпроводников. При определенных, соответствующих реальным микроскопическим параметрам

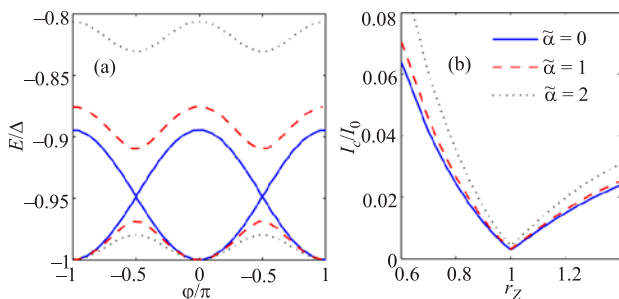


Рис. 12. Андреевские связанные состояния (а) и критический ток $s|I|_{s_{\pm}}$ контакта как функция отношения коэффициентов прозрачности барьеров r_Z на интерфейсе системы (б) для различных значений межзонного взаимодействия $\tilde{\alpha}$ в двухзонном сверхпроводнике [87].

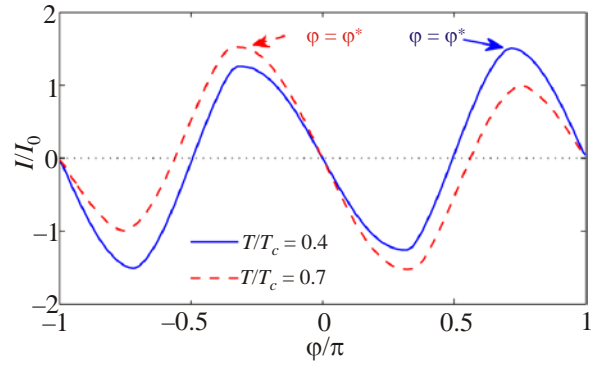


Рис. 13. Ток-фазовые соотношения для $s|I|_{s_{\pm}}$ контакта при температуре $T/T_c = 0.4$ (синяя кривая) и $T/T_c = 0.7$ (красная пунктирная кривая) для отношения энергетических щелей в двухзонном сверхпроводнике, равного 0,3, и отношения энергетической щели в однозонном сверхпроводнике и первой щели двухзонного равного 0,5. Стрелки указывают положение максимума джозефсоновского тока [87].

некоторых сверхпроводников на основе железа ток-фазовые зависимости $s_{\pm}Is_{\pm}$ гетероструктуры имеют сигнатуру π -контакта.

«Железные» сверхпроводники, часть из которых уникальна своей симметрией s_{\pm} типа, примечательны еще и тем, что на фазовой диаграмме «температура-степень допирования» присутствует область, где сверхпроводящий дом пересекается с магнитной фазой, характеризующейся волнами спиновой плотности (SDW — spin density wave). В работе [91] впервые было проанализировано влияние SDW на характеристики $s_{\pm}Is_{++}$, $s_{++}Is_{\pm}$ и $s_{\pm}Is_{\pm}$ контактов. Оказалось, что для $s_{\pm}Is_{\pm}$ гетероструктуры ее критический ток содержит член, который зависит от угла ориентации вектора намагниченности в SDW состоянии. Однако, как при наличии, так и при отсутствии SDW в двухзонных сверхпроводниках существуют такие условия, при которых π -контакт в $s_{\pm}Is_{\pm}$ системе может быть детектирован в соответствующих экспериментах со сверхпроводящими оксидными и халькогенидами железа.

Замена изолирующей прослойки контакта на нормальный металл качественно не меняет особенности эффекта Джозефсона для s_{\pm} сверхпроводника. Численное решение уравнений Узалея с обобщенными граничными условиями Куприянова-Лукичева на случай сверхпроводника с двумя щелями показало, что отношение коэффициентов прозрачности барьеров на интерфейсе для каждой из зон r_{λ} ($\lambda = 1, 2$) в SNS контакте, как и для SIS гетероструктуры, играет ключевую роль в реализации $0-\pi$ перехода [92,93]. Иными словами, если двухзонный сверхпроводник имеет s_{\pm} симметрию, то при определенном значении r_{λ} критический ток контакта демонстрирует излом на зависимости $I_c(r_{\lambda})$, что соответствует переключению обычного контакта на π -контакт (рис. 14).

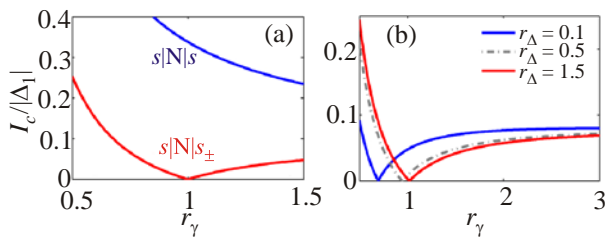


Рис. 14. (Онлайн в цвете) Зависимость критического тока $s|N|s$ и $s|N|s_{\pm}$ контактов для отношения энергетических щелей двухзонного сверхпроводника $r_{\Delta} = |\Delta_2|/|\Delta_1| = 1$ и отношения энергетической щели однозонного сверхпроводника к первой энергетической щели s_{\pm} сверхпроводящего слоя равного 1 (а) и 0,5 (б) в зависимости от отношения коэффициентов прозрачности барьеров на интерфейсе для каждой из зон r_{γ} . Для обоих графиков отношение толщины слоя нормального металла к длине когерентности в однозонном сверхпроводнике принималось равным 1 [92].

Согласно вычислениям, аналогичный излом при определенных параметрах контактирующих сверхпроводников имеет место и на температурной зависимости критического тока SNS гетероструктуры, где, как и раньше, один из сверхпроводящих берегов в основном состоянии имеет два параметра порядка с разностью фаз, равной π (рис. 15).

В работах [94,95] была развита более общая теория баллистических джозефсоновских контактов, когда оба берега являются идентичными многозонными сверхпроводниками с s_{++} или s_{\pm} симметрией. Модель опиралась на формализм уравнений Боголюбова–де Жена, а в качестве барьера на интерфейсе использовался потенциал Блондера–Тинкхама–Клапвика, позволяющий интерпретировать контакт как SIS, так и SNS типа. Численное решение уравнений позволило рассчитать спектр андреевских связанных состояний гетероструктуры, из которых непосредственно можно извлечь ток-фазовые зависимости (рис. 16).

Из рис. 16 можно сделать несколько выводов. Во-первых, джозефсоновский контакт, образованный s_{++}

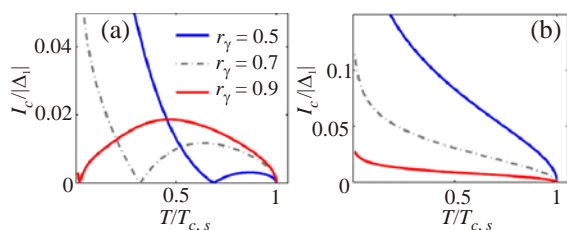


Рис. 15. (Онлайн в цвете) Критический ток $s|N|s_{\pm}$ контакта как функция температуры для отношения энергетической щели однозонного сверхпроводника к первой энергетической щели s_{\pm} сверхпроводящего слоя, равного 0,5, и отношения толщины слоя нормального металла к длине когерентности в однозонном сверхпроводнике равного 1 для разных значений r_{γ} (см. рис. 14). Для графика (а) $r_{\Delta} = 0,3$; для (б) $r_{\Delta} = 1,3$ [92].

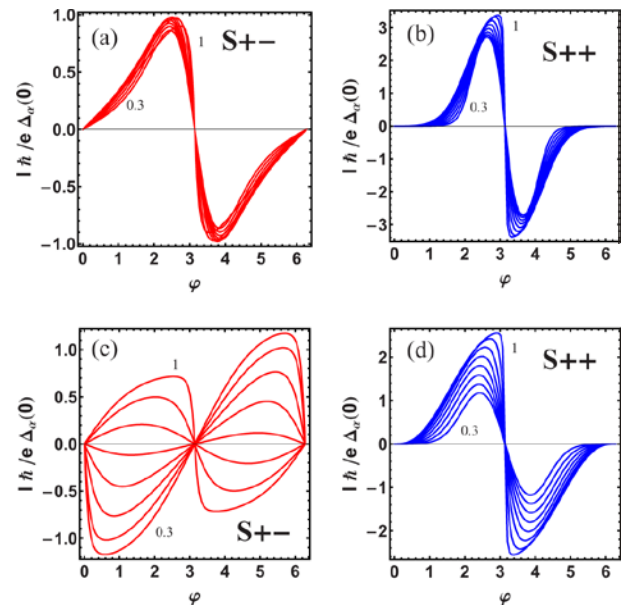


Рис. 16. (Онлайн в цвете) Ток-фазовые зависимости для джозефсоновских контактов, образованных s_{\pm} (а), (с) и двухзонными сверхпроводниками с s_{++} (б), (д) симметрией для разных параметров интерфейса гетероструктуры и сверхпроводящих берегов. Температура $T = 0,001 T_c$ [95].

сверхпроводниками, имеет более высокое значение критического тока. Во-вторых, что самое важное, только в случае сверхпроводников с s_{\pm} -волновой симметрией и лишь при определенных соотношениях параметров интерфейса и собственно сверхпроводящих берегов возможна реализация π -контакта.

Температурное поведение критического тока дополнительно подтверждает возможность возникновения основного состояния джозефсоновской системы с разностью фаз, равной π (рис. 17). Наряду с этим следует, что для обоих типов симметрий s_{++} и s_{\pm} критический ток отклоняется от температурного поведения, описываемого формулой Амбегаокара–Баратова для гетероструктур, образованных однозонными сверхпроводниками.

В предыдущем разделе, посвященном эффекту близости, было указано, что в бислоях с s_{\pm} сверхпроводником возможна реализация состояния с нарушением симметрии относительно обращения времени. Подобное состояние при определенных условиях можно наблюдать и в джозефсоновских контактах, где один из слоев является двухзонным сверхпроводником s_{\pm} типа, а другой — обычным s -волновым сверхпроводником. В статье [96] феноменологическим образом были найдены условия, при которых джозефсоновской системе энергетически выгодно приобретать состояние с нарушенной симметрией относительно обращения времени. Это можно показать, варьируя энергию контакта в отсутствие магнитного поля и транспортного тока по ϕ_{s1} и ϕ_{s2} (разность фаз между первым/вторым параметром

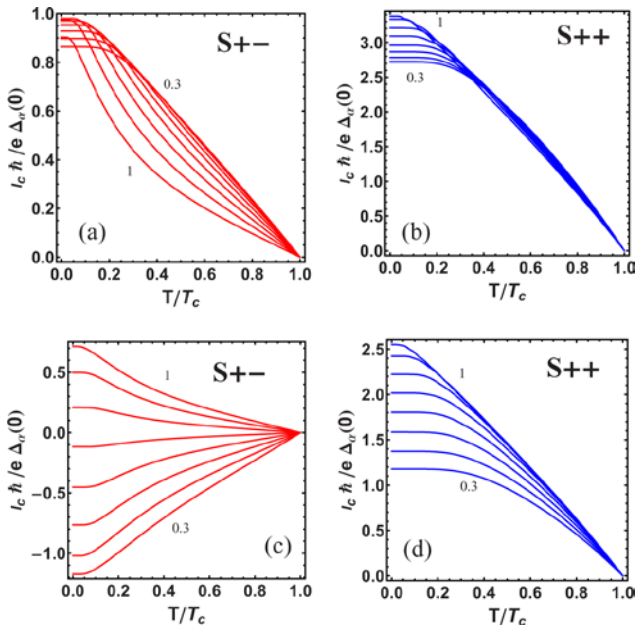


Рис. 17. (Онлайн в цвете) Температурная зависимость критического тока джозефсоновских контактов, образованных s_{\pm} (a), (c) и двухзонными сверхпроводниками с s_{++} (b), (d) симметрией для разных параметров интерфейса гетероструктуры и сверхпроводящих берегов [95].

порядка двухзонного сверхпроводника и параметром порядка его однозонного аналога):

$$E = -\cos \phi_{s1} - J_{s2} \cos \phi_{s1} - J_{12} \cos(\phi_{s1} - \phi_{s2}), \quad (9)$$

где J_{s2} — энергия джозефсоновской связи между s сверхпроводником и второй зоной s_{\pm} сверхпроводника, а J_{12} — энергия межзонного взаимодействия в s_{\pm} сверхпроводящей части системы (для удобства обе величины нормированы на энергию джозефсоновского взаимодействия однозонного сверхпроводника с первой зоной двухзонного сверхпроводника J_{s1}).

Результат минимизации выражения для энергии (9) представлен на рис. 18(a), где видна область фазовой диаграммы с нарушенной симметрией относительно обращения времени, а также энергетический ландшафт всех возможных состояний джозефсоновского контакта (рис. 18(b)). Как следует из фазовой диаграммы, нарушение симметрии относительно обращения времени наблюдается в основном при $J_{12} < 0$, когда двухзонный сверхпроводник имеет s_{\pm} структуру параметра порядка. Следует отметить, что такой же вывод был получен ранее и для бислойных систем (см. раз. 2.2).

Кроме упомянутых выше особенностей в виде излома на температурной зависимости критического тока, $0-\pi$ переходов, необычных ток-фазовых зависимостей и состояний с нарушенной симметрией относительно обращения времени, s_{\pm} -волновая симметрия параметра порядка накладывает отпечаток и на нестационарный эффект Джозефсона, в частности на микроволновой отклик джозефсоновского контакта. В ряде

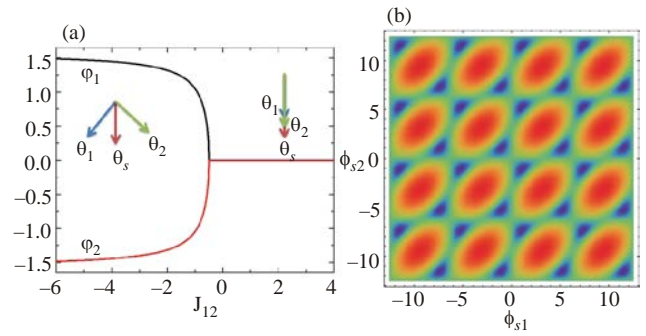


Рис. 18. (Онлайн в цвете) (a) Фазовая диаграмма джозефсоновского контакта: зависимость разности фаз ϕ_{s1} и ϕ_{s2} от энергии межзонного взаимодействия в s_{\pm} -волновом сверхпроводнике с $J_{s1} = J_{s2} = 1$. Область с неколлинеарными «векторами» θ_s , θ_1 и θ_2 , ограниченная черной и красной кривыми, состояние системы с нарушением симметрии относительно обращения времени (двукратное вырождение основного состояния). (b) Контурный график энергии джозефсоновского контакта $E = E(\phi_{s1}, \phi_{s2})$ для $J_{12} = -1$ и $J_{s2} = 1$. Синие участки соответствуют минимумам энергии [96].

работ теоретическим образом было показано [96,97], что на вольт-амперной характеристике гетероструктуры, образованной s и s_{\pm} сверхпроводниками, помимо традиционных ступенек Шаapiro возникают дополнительные скачки тока. При этом высоты ступенек на резонансной частоте напряжения демонстрируют чередующуюся структуру, которая соответствует присутствию двух щелей в сверхпроводнике. Более того, как показано в статье [97], в случае s_{\pm} симметрии при определенных условиях происходит значительное усиление ступенек, имеющих нечетную кратность по отношению к резонансной частоте внешнего микроволнового облучения, в то время как в случае s_{++} двухзонного сверхпроводника доминируют ступеньки с четной кратностью.

Двухзонная s_{\pm} сверхпроводимость генерирует также и уникальные сигнатуры топологических возбуждений в контактах, которые в отличие от дробных вихрей в массивных многозонных сверхпроводниках имеют конечное значение энергии и, как следствие, являются термодинамически метастабильными образованиями. Речь идет о джозефсоновских вихрях и коллективных модах, структура которых отражает s_{\pm} -волновой характер симметрии [98–100]. Подробное изложение характеристик и свойств этих топологических дефектов в многозонных сверхпроводниках можно найти в обзорах [43,44].

3.2. ScS микроконтакты

ScS микроконтакты, где буква «с» (constriction) обозначает сужение, представляют собой простейшую систему для экспериментального наблюдения эффекта Джозефсона. В зависимости от соотношения между размером сужения d и длины свободного пробега l раз-

личают два типа контакта: микроконтакт Шарвина, когда $d \ll l$ [101], и диффузионный микроконтакт, известный еще как микроконтакт Масквелла с $d \gg l$. Отдельного упоминания заслуживает так называемый квантовый микроконтакт, размер сужения которого сравним с длиной волны Ферми. В этой главе в дальнейшем будет подразумеваться шарвиновский микроконтакт.

Джозефсоновская система с сужением изготавливается путем размещения сверхпроводящей иголки на поверхности массивного сверхпроводника, или нанесения сверхпроводника на бислой изолятора со сверхпроводником, со сделанным в диэлектрике отверстием микроскопических размеров.

С теоретической точки зрения микроконтакт обычно моделируется в виде квазиодномерной нити, соединяющей два массивных берега. В диффузионном пределе для однозонных сверхпроводников джозефсоновский ток может быть рассчитан из уравнений Узаделя, в котором пренебрегают всеми членами за исключением градиентных. Для симметричного контакта (одинаковые сверхпроводники) результаты вычислений известны в литературе как теория Кулика–Омельянука, или, следуя терминологии обзора [83], теория КО-1 [102]. Главным выводом теории КО-1 является несинусоидальная форма ток-фазовой зависимости микроконтакта при нулевой температуре, которая по мере роста температуры эволюционирует в синусоидальную кривую, описываемую моделью Асламазова–Ларкина [103]. Обобщение теории КО-1 на случай разных контактирующих сверхпроводников проведена в статье [104], в которой показано, что существует логарифмический кроссовер к синусоидальной форме ток-фазовой зависимости в пределе бесконечно большого отношения энергетических щелей сверхпроводящих берегов.

В случае чистого предела была развита теория Кулика–Омельянука (теория КО-2), в которой в рамках уравнений Эйленбергера вычислялась ток-фазовая зависимость джозефсоновской системы с баллистическим типом проводимости [105]. Характеристики микроконтакта с произвольной прозрачностью барьера в ScS контакте получены в работах [106,107].

Эффект Джозефсона в микроконтактах, образованных «грязными» двухзонными сверхпроводниками, впервые был рассмотрен в статье [108] в рамках феноменологической теории Гинзбурга–Ландау. В силу геометрии системы (рис. 19) в двухкомпонентных уравнениях Гинзбурга–Ландау игнорируются все слагаемые кроме градиентных. Такой подход позволяет получить аналитическое выражение для джозефсоновского тока:

$$j \equiv j_0 \sin \phi = \frac{2e\hbar}{L} \left(\frac{|\Delta_{01}|^2}{m_1} + \frac{|\Delta_{02}|^2}{m_2} + 4 \operatorname{sgn}(\gamma) \eta |\Delta_{01}| |\Delta_{02}| \right) \sin \phi, \quad (10)$$

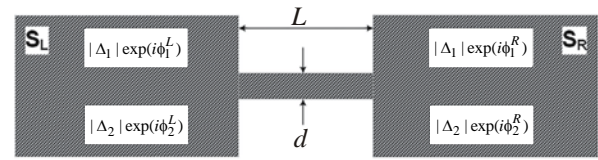


Рис. 19. Модель ScS контакта. Правый и левый берега — массивные двухзонные сверхпроводники, соединенные тонкой сверхпроводящей нитью длины L и диаметра d . Выполняются соотношения $d \ll L$ и $d \ll \min[\xi_1, \xi_2]$ [108].

где $\phi \equiv \phi_1^R - \phi_1^L = \phi_2^R - \phi_2^L$, а феноменологические константы γ и η соответствуют эффектам межзонного взаимодействия и межзонного рассеивания в двухзонном сверхпроводнике.

Из выражения (10) следует, что значение j_0 может принимать как положительные, так и отрицательные значения при условии, что

$$j_0 > 0, \text{ если } \eta \operatorname{sgn}(\gamma) > - \left(\frac{1}{4m_1} \frac{|\Delta_{01}|}{|\Delta_{02}|} + \frac{1}{4m_2} \frac{|\Delta_{02}|}{|\Delta_{01}|} \right), \quad (11)$$

$$j_0 < 0, \text{ если } \eta \operatorname{sgn}(\gamma) < - \left(\frac{1}{4m_1} \frac{|\Delta_{01}|}{|\Delta_{02}|} + \frac{1}{4m_2} \frac{|\Delta_{02}|}{|\Delta_{01}|} \right). \quad (12)$$

Если для заданного набора параметров двухзонного сверхпроводника условие (12) выполняется, то микроконтакт может вести себя как π -контакт.

Необходимо заметить, что позже в работе [109] был установлен критерий абсолютного минимума функционала Гинзбурга–Ландау (см. Приложение В), который накладывает ограничение на значение коэффициента η

$$|\eta| < \frac{1}{2\sqrt{m_1 m_2}}. \quad (13)$$

С учетом неравенства (13), квадратичная форма (12) является положительно определенной для любых значений $|\Delta_{01}|, |\Delta_{02}|, \gamma$ и допустимых величин η , поскольку

$$\begin{aligned} & \frac{|\Delta_{01}|^2}{m_1} + \frac{|\Delta_{02}|^2}{m_2} + 4\eta |\Delta_{01}| |\Delta_{02}| \operatorname{sgn}(\gamma) > \\ & > \frac{|\Delta_{01}|^2}{m_1} + \frac{|\Delta_{02}|^2}{m_2} - \frac{2|\Delta_{01}| |\Delta_{02}|}{\sqrt{m_1 m_2}} \operatorname{sgn}(\gamma) = \\ & = \left(\frac{|\Delta_{01}|}{m_1} - \frac{|\Delta_{02}|}{m_2} \operatorname{sgn}(\gamma) \right)^2 \geq 0, \quad (14) \end{aligned}$$

поэтому в рамках феноменологического описания существование π -контакта невозможно. Тем не менее ток-фазовая зависимость (10) остается справедливой для двухзонных сверхпроводников с очень слабым межзонным рассеиванием, когда $\eta \ll \frac{1}{2\sqrt{m_1 m_2}}$.

Микроскопический анализ характеристик ScS системы (рис. 19), образованной загрязненными многозонными сверхпроводниками, может быть проведен путем соответствующего обобщения теории КО-1. Для двухзонных сверхпроводников это было выполнено в

$$j = \frac{4e\pi T}{L} \sum_i \sum_{\omega}^{\omega_D} N_i D_i \frac{|f_i| \cos \frac{\chi_i^L - \chi_i^R}{2}}{\sqrt{(1-|f_i|^2) \sin^2 \frac{\chi_i^L - \chi_i^R}{2} + \cos^2 \frac{\chi_i^L - \chi_i^R}{2}}} \operatorname{arctg} \frac{|f_i| \sin \frac{\chi_i^L - \chi_i^R}{2}}{\sqrt{(1-|f_i|^2) \sin^2 \frac{\chi_i^L - \chi_i^R}{2} + \cos^2 \frac{\chi_i^L - \chi_i^R}{2}}}, \quad (15)$$

где $f_i(x) = |f_i(x)| \exp(i\chi_i(x))$ представляют аномальные функции Грина для каждой зоны, D_i — внутризонные коэффициенты диффузии, возникающие вследствие наличия рассеяния на немагнитных примесях, N_i — это плотности состояний на поверхности Ферми для электронов i -й зоны.

Данное общее выражение описывает джозефсоновский ток как функцию энергетических щелей в берегах $|\Delta_i|$ и разность фаз на контакте $\phi \equiv \phi_1^R - \phi_1^L = \phi_2^R - \phi_2^L$. Если пренебречь эффектом межзонного рассеяния, то плотность тока (15) состоит из двух независимых аддитивных вкладов, возникающих из переходов $1 \rightarrow 1$ и $2 \rightarrow 2$. В этом случае каждая составляющая джозефсоновского тока пропорциональна соответствующему значению $|\Delta_{1,2}|$

$$I = \frac{2\pi T}{e} \sum_i \sum_{\omega} \frac{1}{R_{Ni}} \frac{|\Delta_i| \cos \frac{\phi}{2}}{\sqrt{\omega^2 + |\Delta_i|^2 \cos^2 \frac{\phi}{2}}} \times \operatorname{arctg} \frac{|\Delta_i| \sin \frac{\phi}{2}}{\sqrt{\omega^2 + |\Delta_i|^2 \cos^2 \frac{\phi}{2}}}, \quad (16)$$

где R_{Ni} — парциальные вклады в шарвиновское сопротивление микроконтакта R_N .

При $T = 0$ в выражении (16) можно перейти от суммирования к интегрированию по мацубаровским частотам и существенно упростить вид ток-фазовой зависимости

$$I = \frac{\pi |\Delta_1|}{2eR_{N1}} \cos \frac{\phi}{2} \operatorname{Ar} \tanh \sin \frac{\phi}{2} + \frac{\pi |\Delta_2|}{2eR_{N2}} \cos \frac{\phi}{2} \operatorname{Ar} \tanh \sin \frac{\phi}{2}. \quad (17)$$

Графики ток-фазовых зависимостей микроконтакта, образованного сверхпроводящим диборидом магния для различных значений отношений $r = R_{N1}/R_{N2}$ и температуры $\tau = T/T_c$ представлены на рис. 20.

Температурное поведение критического тока джозефсоновского контакта I_c изображено на рис. 21. Видно, что в зависимости от значения r кривые $I_c(T)$ имеют как положительную, так и отрицательную кривизну.

работах [110,111]. Как и в однозонном случае, одномерные уравнения Узалея (см. Приложение А) допускают аналитическое решение, в результате чего плотность тока имеет вид

Интересным случаем является перемешивание различных вкладов от зон, возникающее в результате межзонного рассеяния. Для произвольных значений и произвольной температуры T уравнения Узалея могут быть решены численными методами. Однако для того чтобы предварительно прояснить влияние межзонного рассеяния, можно рассмотреть эффект Джозефсона для ScS контакта вблизи критической температуры [110]. В этом приближении посредством решения линеаризованных уравнений Узалея плотность тока через систему имеет вид

$$j = j_{11} + j_{22} + j_{12} + j_{21}, \quad (18)$$

при этом j (18) состоит из четырех компонент, возникающих благодаря переходам из правого берега в левый берег между различными зонами

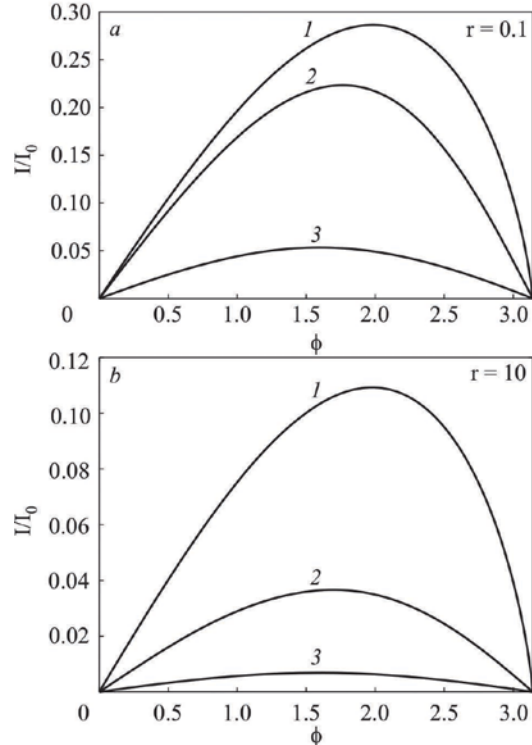


Рис. 20. Ток-фазовые зависимости ScS контакта, образованного с обеих сторон MgB₂ при различных температурах $\tau = T/T_c$ ($\tau = 0$ (1), ($\tau = 0,5$ (2), ($\tau = 0,9$ (3)) и отношениях $r = R_{N1}/R_{N2}$ [111].

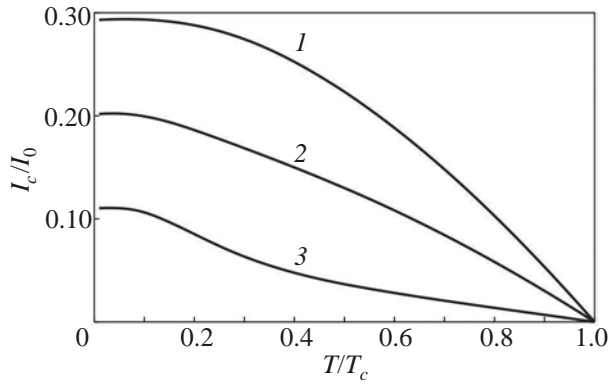


Рис. 21. Температурная зависимость критического тока ScS контакта $I_c(T)$ для различных отношений $r = R_{N1}/R_{N2}$ [111].

$$\begin{aligned}
 j_{11} &\sim |\Delta_1|^2 \sin(\phi_1^R - \phi_1^L), \\
 j_{22} &\sim |\Delta_2|^2 \sin(\phi_2^R - \phi_2^L), \\
 j_{12} &\sim |\Delta_1||\Delta_2| \sin(\phi_2^R - \phi_1^L), \\
 j_{21} &\sim |\Delta_1||\Delta_2| \sin(\phi_1^R - \phi_2^L).
 \end{aligned} \quad (19)$$

Относительное направление составляющих плотности тока j_{ik} и его полная величина зависят от внутренней разности фаз параметров порядка в берегах $\delta\phi^{L,R}$ (рис. 22). Для $\delta\phi^L = 0$ и $\delta\phi^R = 0$ (оба сверхпроводника имеют s_{++} -волновую симметрию) джозефсоновский ток выражается как

$$\begin{aligned}
 I &= \frac{\pi T}{eR_N (N_1 D_1 + N_2 D_2)} \times \\
 &\times \left(N_1 D_1 \sum_{\omega} \frac{(|\Delta_1|(\omega + \Gamma_{21}) + |\Delta_2| \Gamma_{12})^2}{(\omega^2 + (\Gamma_{12} + \Gamma_{21})\omega)^2} + \right. \\
 &\left. + N_2 D_2 \sum_{\omega} \frac{(|\Delta_2|(\omega + \Gamma_{12}) + |\Delta_1| \Gamma_{21})^2}{(\omega^2 + (\Gamma_{12} + \Gamma_{21})\omega)^2} \right) \sin \phi = I_c \sin \phi,
 \end{aligned} \quad (20)$$

где Γ_{ij} соответствует коэффициентам межзонного рассеяния (микроскопический аналог коэффициента η).

При $\delta\phi^L = \pi$ и $\delta\phi^R = \pi$ (контактирующие сверхпроводники с симметрией s_{\pm} типа) ток равен

$$\begin{aligned}
 I &= \frac{\pi T}{eR_N (N_1 D_1 + N_2 D_2)} \times \\
 &\times \left(N_1 D_1 \sum_{\omega} \frac{(|\Delta_1|(\omega + \Gamma_{21}) - |\Delta_2| \Gamma_{12})^2}{(\omega^2 + (\Gamma_{12} + \Gamma_{21})\omega)^2} + \right. \\
 &\left. + N_2 D_2 \sum_{\omega} \frac{(|\Delta_2|(\omega + \Gamma_{12}) - |\Delta_1| \Gamma_{21})^2}{(\omega^2 + (\Gamma_{12} + \Gamma_{21})\omega)^2} \right) \sin \phi = I_c \sin \phi,
 \end{aligned} \quad (21)$$

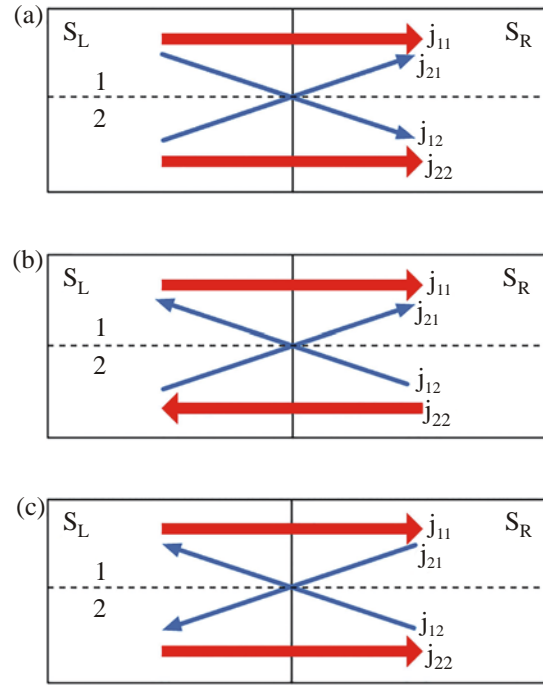


Рис. 22. Направления токов в ScS контакте между двухзонными сверхпроводниками для различных значений фазовых сдвигов в берегах. (а) разность фаз параметров порядка слева и справа равна 0; (б) присутствует сдвиг на π в правом сверхпроводящем берегу, при этом разность фаз слева равна 0; (с) разность фаз параметров порядка равна π в обоих берегах [110].

Наконец, наиболее интересный вариант, когда микроструктура образована двухзонными сверхпроводниками с s_{++} и s_{\pm} -волновой симметрий, т.е. $\delta\phi^L = 0$ и $\delta\phi^R = \pi$

$$\begin{aligned}
 I &= \frac{\pi T}{eR_N (N_1 D_1 + N_2 D_2)} \times \\
 &\times \left(N_1 D_1 \sum_{\omega} \frac{\Delta_1^2 (\omega + \Gamma_{21})^2 - \Delta_2^2 \Gamma_{12}^2}{(\omega^2 + (\Gamma_{12} + \Gamma_{21})\omega)^2} + \right. \\
 &\left. + N_2 D_2 \sum_{\omega} \frac{\Delta_1^2 \Gamma_{21}^2 - \Delta_2^2 (\omega + \Gamma_{12})^2}{(\omega^2 + (\Gamma_{12} + \Gamma_{21})\omega)^2} \right) \sin \phi = I_c \sin \phi.
 \end{aligned} \quad (22)$$

Очевидно, что выражение (22) при определенных значениях констант $\Gamma_{12,21}$, отношения $N_2 D_2 / N_1 D_1$ и величин щелей $|\Delta_1|$ и $|\Delta_2|$ допускает существование отрицательного значения критического тока джозефсоновского контакта I_c . Это означает, что ток-фазовая характеристика соответствует π -контакту.

При произвольной температуре $0 \leq T \leq T_c$ поведение ScS контакта с учетом межзонного рассеяния можно исследовать, воспользовавшись теорией возмущений по Γ_{ij} . В первом приближении аномальные функции Грина для каждого берега имеют вид [111]:

$$\begin{cases} f_1 = \frac{\Delta_1}{\sqrt{|\Delta_1|^2 + \omega^2}} + \Gamma_{12} \frac{(2\omega^2 + |\Delta_1|^2)(\Delta_2 - \Delta_1) - \Delta_1^2(\Delta_2^* - \Delta_1^*)}{2\sqrt{(|\Delta_1|^2 + \omega^2)^3} \sqrt{|\Delta_2|^2 + \omega^2}}, \\ f_2 = \frac{\Delta_2}{\sqrt{|\Delta_2|^2 + \omega^2}} + \Gamma_{21} \frac{(2\omega^2 + |\Delta_1|^2)(\Delta_1 - \Delta_2) - \Delta_2^2(\Delta_1^* - \Delta_2^*)}{2\sqrt{|\Delta_1|^2 + \omega^2} \sqrt{(|\Delta_2|^2 + \omega^2)^3}}. \end{cases} \quad (23)$$

Из выражения (23) следует, что наличие межзонных примесей приводит к тому, что фазы аномальных функций Грина f_i не совпадают с фазами параметров

порядка Δ_i . Соответственно, поправки к току, вызванные слабым межзонным рассеиванием имеют вид

$$\delta I = \delta I_1 + \delta I_2, \quad (24)$$

$$\delta I_1 = \frac{2\pi T \Gamma_{12}}{e R_{N1}} \sum_{\omega} \left\{ \frac{\omega^2 (|\Delta_2| e^{i\delta} - |\Delta_1|) \cos\left(\frac{\phi}{2}\right)}{\sqrt{(|\Delta_1|^2 \cos^2\left(\frac{\phi}{2}\right) + \omega^2)^3} \sqrt{|\Delta_2|^2 + \omega^2}} \operatorname{arctg} \frac{|\Delta_1| \sin \frac{\phi}{2}}{\sqrt{\omega^2 + |\Delta_1|^2 \cos^2 \frac{\phi}{2}}} + \frac{1}{2} \frac{\omega^2 |\Delta_1| (|\Delta_2| e^{i\delta} - |\Delta_1|) \sin \phi}{(|\Delta_1|^2 + \omega^2) (|\Delta_1|^2 \cos^2\left(\frac{\phi}{2}\right) + \omega^2) \sqrt{|\Delta_2|^2 + \omega^2}} \right\}, \quad (25)$$

$$\delta I_2 = \frac{2\pi T \Gamma_{21}}{e R_{N2}} \sum_{\omega} \left\{ \frac{\omega^2 (|\Delta_1| - e^{i\delta} |\Delta_2|) \cos\left(\frac{\phi}{2}\right)}{\sqrt{(|\Delta_2|^2 \cos^2\left(\frac{\phi}{2}\right) + \omega^2)^3} \sqrt{|\Delta_1|^2 + \omega^2}} \operatorname{arctg} \frac{|\Delta_2| \sin \frac{\phi}{2}}{\sqrt{\omega^2 + |\Delta_2|^2 \cos^2 \frac{\phi}{2}}} + \frac{1}{2} \frac{\omega^2 |\Delta_2| (|\Delta_1| - e^{i\delta} |\Delta_2|) \sin \phi}{(|\Delta_2|^2 + \omega^2) (|\Delta_2|^2 \cos^2\left(\frac{\phi}{2}\right) + \omega^2) \sqrt{|\Delta_1|^2 + \omega^2}} \right\}. \quad (26)$$

Величина поправок зависит от типа симметрии сверхпроводящих берегов $\delta = 0$ или π , при этом структура полученных выражений однозначно указывает на перепутывание токов из разных зон. Такой же результат был получен ранее при изучении характеристик микромостика вблизи критической температуры [110] (см. рис. 22).

Поведение джозефсоновской ScS системы существенно усложняется, когда происходит контакт однозонного и трехзонного сверхпроводников. Виною тому факт, что в трехзонном сверхпроводнике, даже когда все три параметра порядка имеют s-волновую симметрию при определенных значениях межзонного взаимодействия, возникает явление фрустрации, приводящее к вырождению основного состояния и, как следствие, нарушению симметрии относительно обращения вре-

мени. Ранее возникновение такого состояния предсказывалось в результате аномального эффекта близости между s_{++} и s_{\pm} сверхпроводящими слоями, а также в джозефсоновском контакте, образованном однозонным и двухзонным сверхпроводниками с s_{++} и s_{\pm} -волновой симметрией параметра порядка соответственно [63,64,66,67]. Однако в этом случае подобное явление изначально имеет место в массивном берегу джозефсоновской системы.

В работе [112] исследовано влияние на эффект Джозефсона нарушения симметрии относительно обращения времени в трехзонном сверхпроводнике, который вместе с однозонным сверхпроводящим берегом формирует ScS контакт (рис. 23). Рассмотрение проводилось в баллистическом пределе при помощи формализма уравнений Боголюбова–де Жена, решение кото-

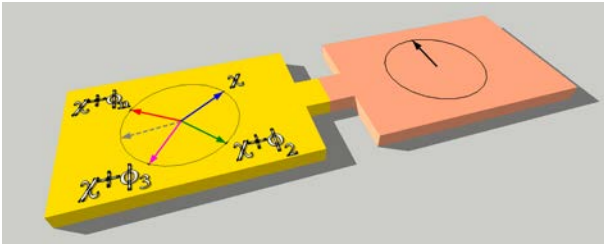


Рис. 23. (Онлайн в цвете) Схематическое изображение ScS микроконтакта между однозонным и многозонным (трехзонным) сверхпроводником с нарушением симметрии относительно обращения времени. Стрелки соответствуют фазам параметра порядка в каждом из сверхпроводящих берегов [114].

рых в простейшем случае, когда энергетические щели однозонного и трехзонного сверхпроводников совпадают между собой, дает выражение для джозефсоновского тока:

$$I(\varphi) = \frac{e|\Delta|}{\hbar} \left\{ \sin \frac{\varphi}{2} \tanh \frac{|\Delta| \cos \frac{\varphi}{2}}{2T} + \sin \frac{\varphi + \varphi_{21}}{2} \tanh \frac{|\Delta| \cos \frac{\varphi + \varphi_{21}}{2}}{2T} + \sin \frac{\varphi + \varphi_{31}}{2} \tanh \frac{|\Delta| \cos \frac{\varphi + \varphi_{31}}{2}}{2T} \right\}, \quad (27)$$

где $|\Delta|$ — энергетическая щель, φ соответствует джозефсоновской разности фаз (разность фаз между фазой параметра порядка однозонного сверхпроводника и фазой первого параметра порядка в трехзонном сверхпроводнике), φ_{21} и φ_{31} — межзонные разности фаз в трехзонном сверхпроводнике, которые задают положение его основного состояния.

Как видно из вида выражения (27), фактически реализуется обобщение теории КО-2 на случай трех щелей.

На рис. 24 представлена ток-фазовая зависимость микроконтакта, когда трехзонный сверхпроводник находится в состоянии с нарушенной симметрией относительно обращения времени. Из вида ток-фазовой зависимости можно сделать главный вывод об особенностях ScS контакта между однозонным и трехзонным сверхпроводником: критические токи системы для двух противоположных направлений неэквивалентны. Причина кроется в невыполнении свойства нечетности ток-фазовой зависимости $I(-\varphi) \neq -I(\varphi)$, вызванной нарушением симметрии относительно обращения времени. Асимметричность критических токов может быть установлена также и через отсутствие симметрии андреевских спектров (см. вставку на рис. 24).

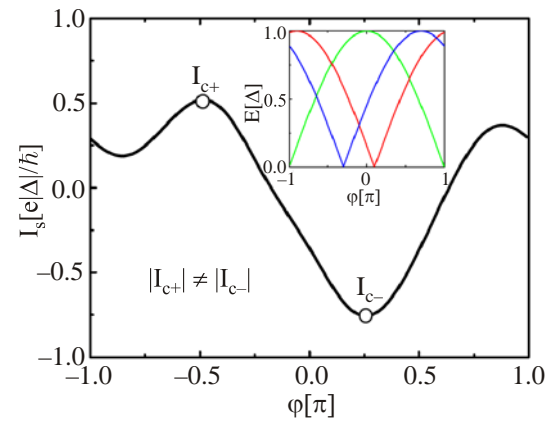


Рис. 24. (Онлайн в цвете) Ток-фазовая зависимость баллистического микроконтакта, образованного однозонным и трехзонным сверхпроводником с нарушением симметрии относительно обращения времени с параметрами основного состояния $\varphi_{21} = 0,9\pi$ и $\varphi_{31} = 1,3\pi$ и температурой $T = 0,2|\Delta|$. На вставке: андреевский спектр микроконтакта для тех же параметров, что и ток-фазовая зависимость [112].

При повышении температуры трансляционная антисимметричность, присущая обычным джозефсоновским контактам, восстанавливается, и критические токи разных направлений становятся равны друг другу. Иными словами, главное отличие ScS микроконтакта с трехзонным сверхпроводником, у которого нарушена симметрия относительно обращения времени, наиболее ярко выражено при низких температурах.

В работе [112] были проанализированы также особенности нестационарного эффекта Джозефсона, в частности, микроволновой отклик контакта, образованного одно- и трехзонными сверхпроводящими берегами. С целью более четкой иллюстрации вновь рассматривался случай совпадающих щелей, при этом основное состояние трехзонного сверхпроводника фиксировалось в виде $\varphi_{21} = 2\pi/3$ и $\varphi_{31} = -2\pi/3$. Расчеты показали, что вольт-амперная характеристика микроконтакта содержит дробные ступеньки Шапиро, которые имеют наибольшую высоту на частотах, кратных $1/3$ от частоты приложенного напряжения (рис. 25).

Противоположный случай, а именно диффузионный предел микроконтакта, образованного однозонным и трехзонным сверхпроводником с нарушением симметрии относительно обращения времени рассматривался в работе [113]. Как и в теории КО-1 [102], геометрия микроконтакта позволяет редуцировать проблему к одномерным уравнениям Узаделя, обобщенным только на три энергетические щели, в которых отбрасываются все члены, кроме градиентных. Поскольку аналитическое выражение для джозефсоновского тока в общем случае выглядит довольно громоздко, в данной статье для простоты предполагалось, что энергетические щели в контактирующих сверхпроводниках совпадают

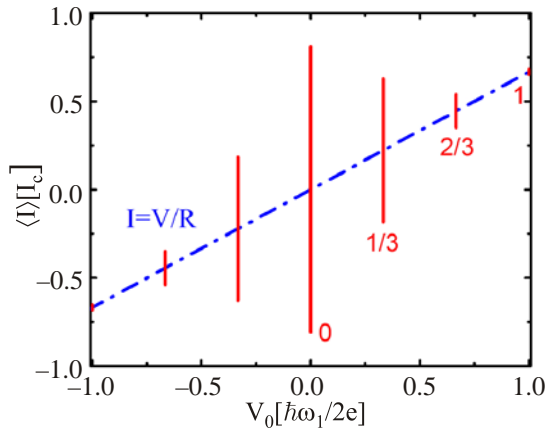


Рис. 25. Схематический вид вольт-амперной характеристики с дробными ступеньками Шапиро в микроконтакте, управляемом переменным напряжением с частотой ω_1 , между однозонным и трехзонным сверхпроводником с нарушением симметрии относительно обращения времени с основным состоянием $\varphi_{21} = 2\pi/3$ и $\varphi_{31} = -2\pi/3$ [112].

между собой, а исследование характеристик будет проводиться только для двух температурных режимов: $T = 0$ и $T \rightarrow T_c$ (критические температуры сверхпроводников приблизительно равны). В рамках таких приближений ток представляется в виде

$$I = \frac{\pi|\Delta|}{eR_{N1}} \cos \frac{\chi}{2} \operatorname{arctanh} \sin \frac{\chi}{2} + \frac{\pi|\Delta|}{eR_{N2}} \cos \frac{\chi+\phi}{2} \operatorname{arctanh} \sin \frac{\chi+\phi}{2} + \frac{\pi|\Delta|}{eR_{N3}} \cos \frac{\chi+\theta}{2} \operatorname{arctanh} \sin \frac{\chi+\theta}{2}, \quad (28)$$

а энергия

$$E = \frac{|\Delta|\Phi_0}{2eR_{N1}} \left(2 \sin \frac{\chi}{2} \operatorname{arctanh} \sin \frac{\chi}{2} + \ln \cos^2 \frac{\chi}{2} \right) + \frac{|\Delta|\Phi_0}{2eR_{N2}} \left(2 \sin \frac{\chi+\phi}{2} \operatorname{arctanh} \sin \frac{\chi+\phi}{2} + \ln \cos^2 \frac{\chi+\phi}{2} \right) + \frac{|\Delta|\Phi_0}{2eR_{N3}} \left(2 \sin \frac{\chi+\theta}{2} \operatorname{arctanh} \sin \frac{\chi+\theta}{2} + \ln \cos^2 \frac{\chi+\theta}{2} \right), \quad (29)$$

где χ задает джозефсоновскую разность фаз, а ϕ и θ определяют основное состояние (разности фаз параметров порядка) трехзонного сверхпроводника.

Нарушение симметрии относительно обращения времени в трехзонном сверхпроводнике порождает сложные асимметричные ток-фазовые зависимости микроконтакта (рис. 26), а положение минимума энергии джозефсоновской системы явно указывает на реализацию ϕ -контакта. При этом какая именно ток-

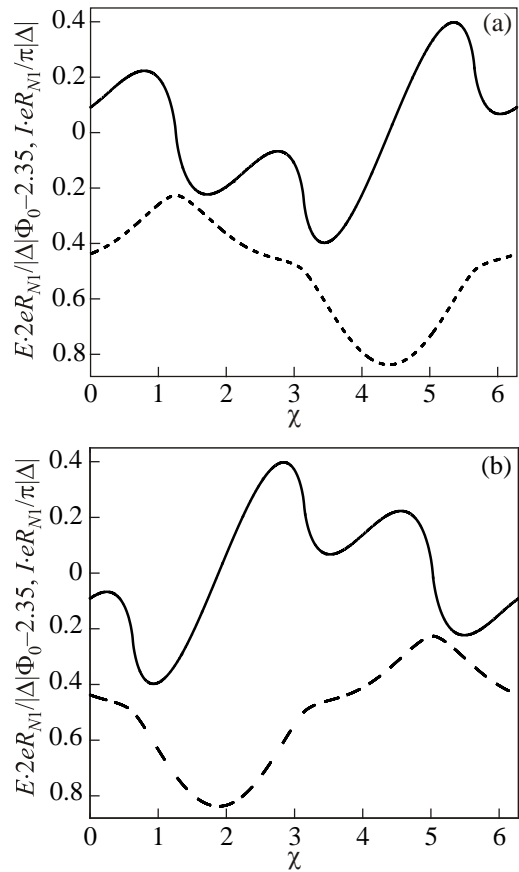


Рис. 26. Ток-фазовые зависимости (сплошная линия) и джозефсоновская энергия (пунктирная линия) микроконтактов при нулевой температуре между однозонным и трехзонным сверхпроводником с нарушением симметрии относительно обращения времени с разностью фаз $\phi = 0, 6\pi$, $\theta = 1, 2\pi$ (а) и $\phi = 1, 4\pi$, $\theta = 0, 8\pi$ (б). Отношения парциальных вкладов каждой зоны в нормальное сопротивление контакта $R_{N1}/R_{N2} = R_{N1}/R_{N3} = 1$. Энергетические щели контактирующих сверхпроводящих берегов совпадают [113].

фазовая зависимость будет иметь место в ходе экспериментальных измерений, зависит от «предыстории» трехзонного сверхпроводящего берега, т.е. в какое именно из двух основных состояний он «упадет».

В пределе температуры, близкой к критической, аддитивные вклады в джозефсоновский ток приобретают синусоидальную зависимость, однако несмотря на это, ScS система сохраняет особенность в виде ϕ -контакта. Дальнейший анализ поведения микроконтакта показал, что если в трехзонном сверхпроводнике наблюдается нарушение симметрии относительно обращения времени, то во всем температурном интервале ток-фазовая характеристика будет иметь свойства ϕ -контакта. Для трехзонного сверхпроводника, в котором не происходит фрустрация основного состояния, ϕ -контакт, наблюдающийся при $T = 0$, будет эволюционировать по мере увеличения температуры либо в обычный, либо в π -контакт.

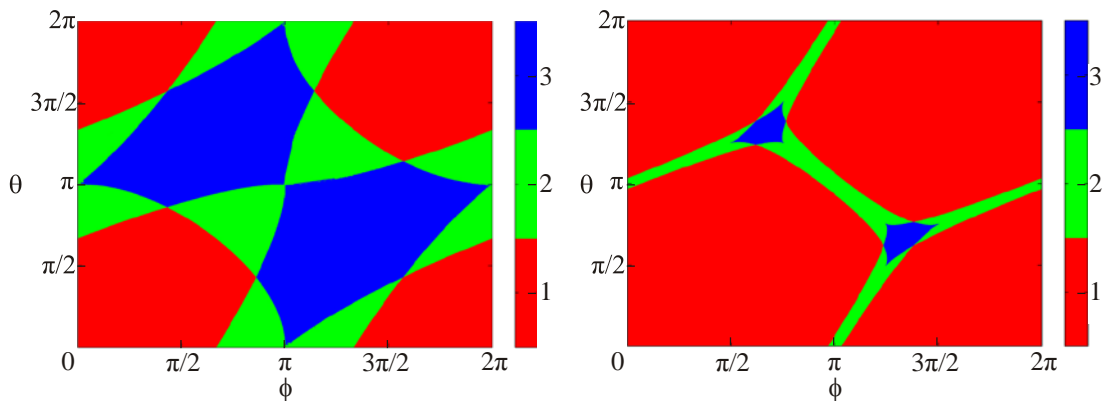


Рис. 27. (Онлайн в цвете) Зависимость суммарного числа (глобальных и локальных) минимумов энергии джозефсоновского контакта с баллистической (слева) и диффузионной (справа) проводимостью между однозонным и трехзонным сверхпроводником от «положения» основного состояния (значений ϕ и θ) последнего [114].

Теория КО-2, известная как модель микроконтакта с баллистической проводимостью между однозонными сверхпроводниками, была обобщена в статье [114] на случай джозефсоновской системы, образованной однозонным и трехзонными сверхпроводящими берегами. На качественном уровне поведение совпадает с поведением, наблюдающимся для диффузионного микроконтакта. Отличия обнаруживаются лишь на фазовой диаграмме, демонстрирующей суммарное количество минимумов энергии данной системы в зависимости от разности фаз параметров порядка в массивном трехзонном сверхпроводнике.

Главной особенностью системы с баллистической проводимостью между однозонным и трехзонным сверхпроводником является существенно более широкое разнообразие состояний джозефсоновского контакта (рис. 27, слева) в сравнении с аналогичной системой в грязном пределе (рис. 27, справа). Иными словами, для микроконтакта с диффузионной проводимостью интервалы существования дополнительных (локальных) минимумов существенно меньше.

Для микроконтакта, образованного одинаковыми трехзонными сверхпроводниками, в которых нарушена симметрия относительно обращения времени, критический ток может существенно подавляться, когда сверхпроводящие берега находятся в разных основных состояниях по сравнению со случаем, когда эти основные состояния являются одинаковыми [115]. С экспериментальной точки зрения, каждый раз «сбрасывая» состояние сверхпроводимости и повторяя процесс охлаждения, измерения критического тока могут давать разные значения.

3.3. Квантовые интерферометры на основе многозонных сверхпроводников

Одной из главных мотиваций исследования эффекта Джозефсона, равно как и эффекта близости в многозонных сверхпроводниках, является получение информации о симметрии параметра порядка в них, в контек-

сте семейства новых сверхпроводящих соединений на основе железа. В предыдущих разделах было показано, как, используя предположение о необычной форме волновой функции куперовских пар, можно теоретически предсказывать особенности в поведении различных джозефсоновских контактов на основе сверхпроводников с несколькими энергетическими щелями. Детектирование этих отличительных черт и является базой для методики, известной как джозефсоновская интерферометрия (см., например, [116]).

Джозефсоновская интерферометрия включает в себя исследования магнитного отклика контакта, его токофазовых зависимостей, а также СКВИД интерферометрию. Среди этого многообразия разновидностей последняя технология часто оказывается наиболее полезной. С технической точки зрения она основывается на исследовании характеристик одноконтактного интерферометра (джозефсоновский контакт в сверхпроводящем кольце) или СКВИДа постоянного тока (так называемый пт СКВИД, кольцо с двумя джозефсоновскими контактами). В этой геометрии один из контактирующих сверхпроводников имеет обычно изотропную s -волновую симметрию параметра порядка, а второй — многозонный сверхпроводник, симметрию параметра порядка в котором необходимо понять [117,118].

С целью объяснения результатов эксперимента по магнитному отклику замкнутого контура, образованного ниобиевой нитью и массивным железным оксидом $\text{NdFeAsO}_{0.88}\text{F}_{0.12}$, в частности наблюдения переходов, соответствующих половине кванта магнитного потока [38], в работе [67] был использован формализм Гинзбурга–Ландау с функционалом (4) для описания свойств композитного $s-s_{\pm}$ кольца (формально пт СКВИДа). В зависимости от феноменологических параметров свободная энергия Гинзбурга–Ландау как функция приложенного внешнего магнитного потока демонстрирует три режима: режим с одним минимумом при $\Phi = n\Phi_0$ (синяя кривая), режим с нарушенной симметрией относительно обращения времени с вырожденным основным состоянием при

$\Phi = n\Phi_0 \pm \Delta\Phi$, где сдвиг $\Delta\Phi$ определяется параметрами s - s_{\pm} СКВИДа (зеленая кривая) и режим с двумя минимумами, один из которых локальный (красная кривая), реализующийся при $\Phi = \left(n + \frac{1}{2}\right)\Phi_0$ (рис. 28).

Исходя из этой теоретической модели упомянутый выше эксперимент может быть объяснен следующим образом: по мере роста критического тока в кольце увеличивается вероятность прыжка системы из режима с одним минимумом в $\Phi = n\Phi_0$ режим, соответствующий двум минимумам, с метастабильным состоянием при $\Phi = \left(n + \frac{1}{2}\right)\Phi_0$. Вероятность остаться в этом локальном минимуме меньше чем в основном состоянии с целым квантом магнитного потока. Поэтому если система получает толчок и переходит в состояние с полуцелым квантом, то дальше, скорее всего, она окажется в состоянии с $\Phi = n\Phi_0$. Это означает, что квантовые скачки с половиной кванта магнитного потока коррелируют и, как правило, появляются парами, что и наблюдается в ходе экспериментальных измерений.

Подобное поведение в пт СКВИДе на основе s и s_{\pm} -волновых сверхпроводников было подтверждено и в рамках самосогласованного микроскопического описания посредством уравнения Боголюбова–де Жена [68]. Кроме трех режимов, которые были найдены ранее благодаря феноменологическому подходу Гинзбурга–Ландау, в статье также обнаружено существование еще одного состояния, когда реализуется единственный глобальный минимум при $\Phi = \left(n + \frac{1}{2}\right)\Phi_0$.

Как и в случае с эффектом Джозефсона, пт СКВИД, образованный s -волновым однозонным и трехзонным сверхпроводниками, порождает ряд принципиально новых особенностей макроскопической квантовой интерференции, которые не наблюдаются в других аналогичных системах, основанных на двухзонных и дру-

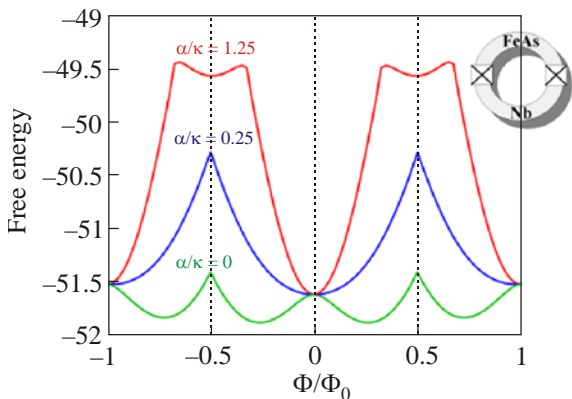


Рис. 28. (Онлайн в цвете) Энергия пт СКВИДа, который образован s и s_{\pm} -волновыми сверхпроводящими половинами, в зависимости от приложенного внешнего магнитного потока для разных параметров двухзонного сверхпроводника, описываемого функционалом (4) [67].

гих сверхпроводящих соединениях с необычным типом симметрии параметра порядка. Впервые это теоретическим образом показано в работе [119], в которой рассматривался пт СКВИД, замкнутый диффузионными микроконтактами между однозонными и трехзонными сверхпроводниками.

На рис. 29 представлены контурные графики энергии как функции разности фаз χ_1 и χ_2 на контактах для обычного пт СКВИДа, образованного s -волновыми

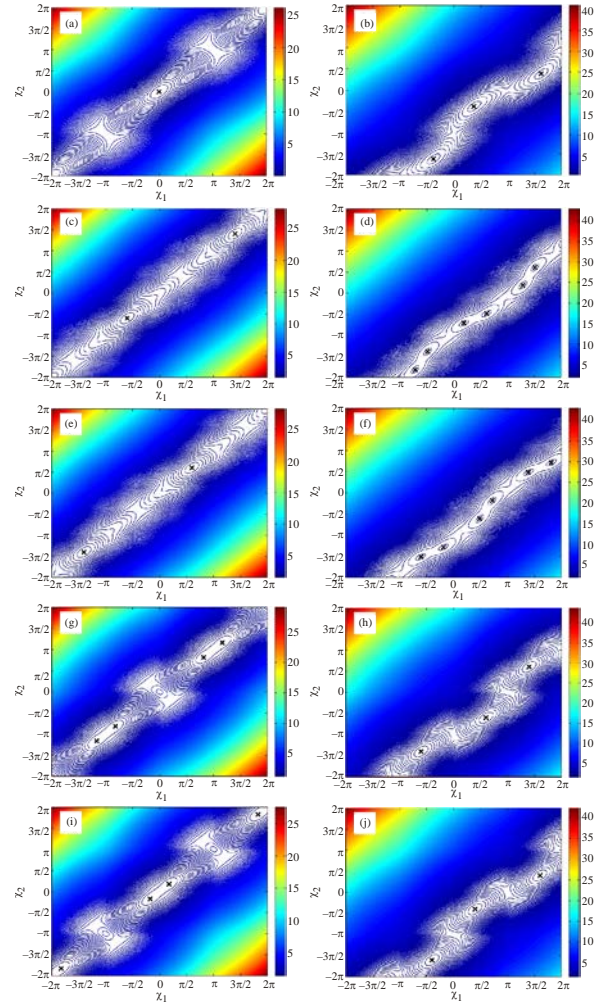


Рис. 29. (Онлайн в цвете) Контурный график поверхности энергии пт СКВИДа для нулевого внешнего магнитного потока $\chi_e = 0$ ($\Phi/\Phi_0 = 0$, левая колонка) и для $\chi_e = \pi$ ($\Phi/\Phi_0 = 0,5$, правая колонка) в отсутствие транспортного тока. Рисунки (a) и (b) построены для микроконтактов между s -волновыми однозонными сверхпроводниками; (c), (d) и (e), (f) соответствуют микроконтактам между однозонным и трехзонным сверхпроводником с нарушением симметрии относительно обращения времени для фрустрированных основных состояний $\phi = 0, 6\pi$, $\theta = 1, 2\pi$ и $\phi = 1, 4\pi$, $\theta = 0, 8\pi$ (g), (h) и (i), (j) — для микроконтактов между однозонным и трехзонным сверхпроводником без нарушения симметрии относительно обращения времени с основным состоянием $\phi = \pi$, $\theta = \pi$ и $\phi = 0$, $\theta = \pi$. Крестики указывают положения глобальных минимумов [119].

сверхпроводниками (рис. 29(a), (b)) и пт СКВИДа на основе трехзонного сверхпроводника с нарушенной симметрией относительно обращения времени (рис. 29(c)–(e)) и без нарушения (рис. 29(g)–(i)) для нулевого магнитного потока (левая колонка) и для потока, соответствующего половине кванта Φ_0 (правая колонка) в пределе нулевой температуры.

В случае трехзонного сверхпроводника с нарушением симметрии относительно обращения времени для нулевого магнитного потока наблюдается лишь сдвиг положения минимума пт СКВИДа от нулевой точки $\chi_1 = 0$ и $\chi_2 = 0$ (что имеет место в обычном пт СКВИДе на рис. 29(a)), несмотря на наличие фрустрированного основного состояния (рис. 29(c) и (e)). Наибольшим отличием пт СКВИДа на основе трехзонного сверхпроводника с нарушенной симметрией относительно обращения времени является сильное вырождение основного состояния (рис. 29(d) и (f)) для полужелого магнитного потока, если сравнивать с обычным пт СКВИДом (рис. 29(b)).

Для пт СКВИДа с трехзонным сверхпроводником, в котором не нарушается симметрия относительно обращения времени, реализуется противоположное поведение. Для нулевого магнитного потока происходит вырождение основного состояния (рис. 29(g) и (i)). Однако с появлением магнитного потока, соответствующему половине кванта, это вырождение снимается (рис. 29(h) и (j)), и система ведет себя как обычный пт СКВИД.

Одной из важнейших характеристик СКВИДа является зависимость критического тока i_c от внешнего магнитного потока Φ_e . График данных зависимостей для симметричной системы (джозефсоновские контакты имеют одинаковые критические токи) представлен на рис. 30.

Несмотря на наличие двух возможных различных ток-фазовых соотношений джозефсоновских контактов [113], зависимость $i_c = i_c(\Phi_e/\Phi_0)$ одинакова для обоих основных состояний (рис. 30(a)). Такая же ситуация реализуется для трехзонного сверхпроводника без нарушения симметрии относительно обращения времени с основными состояниями для значений фаз $\phi = 0, \theta = \pi$ и $\phi = \pi, \theta = \pi$ (рис. 30(b)). Из рис. 30 можно заключить, что критический ток для трехзонного сверхпроводника с нарушением симметрии относительно обращения времени имеет более ярко выраженные боковые пики на зависимости $i_c = i_c(\Phi_e/\Phi_0)$.

Внедрение асимметрии критических токов джозефсоновских микроконтактов пт СКВИДа приводит к закономерной асимметрии зависимостей $i_c = i_c(\Phi_e/\Phi_0)$ (рис. 31). Особенно заметно этот эффект проявляется для трехзонного сверхпроводника с нарушением симметрии относительно обращения времени (рис. 31(a)) и без него (рис. 31(b)).

Кроме того, в работе [119] также исследованы S состояния пт СКВИДа: зависимости суммарного магнит-

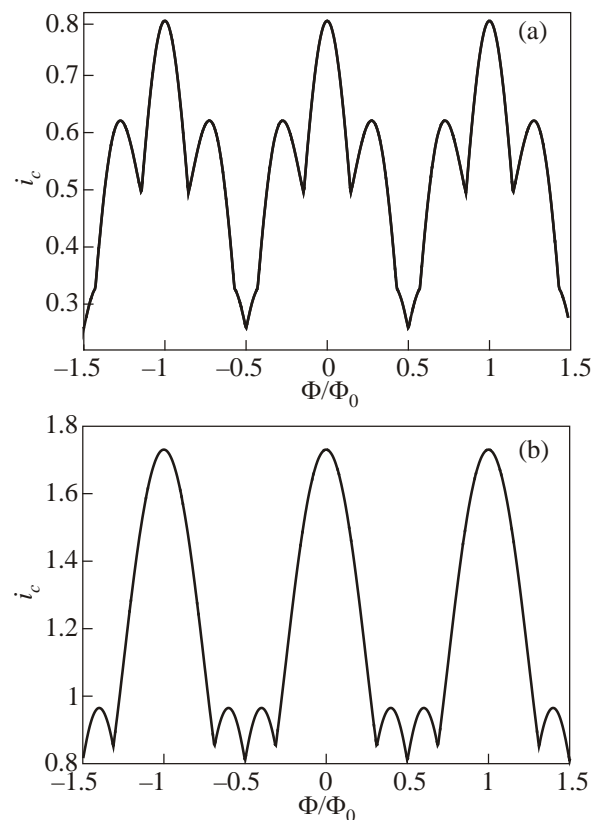


Рис. 30. Зависимость критического тока симметричного пт СКВИДа от приложенного магнитного потока для трехзонного сверхпроводника с нарушенной симметрией относительно обращения времени с фрустрированными основными состояниями $\phi = 0, 6\pi, \theta = 1, 2\pi$ и $\phi = 1, 4\pi, \theta = 0, 8\pi$ (a) и трехзонного сверхпроводника без нарушения симметрии относительно обращения времени с основным состоянием $\phi = 0, \theta = \pi$ и $\phi = \pi, \theta = \pi$ (b) [119].

ного потока через контур от внешнего магнитного потока для нулевого транспортного тока. В сравнении с гистерезисным поведением обычного пт СКВИДа, аналогичная система на основе трехзонного сверхпроводника с нарушением симметрии относительно обращения времени демонстрирует мультигистерезисный режим (рис. 32).

Другими словами, в процессе измерений полного магнитного потока от приложенного потока, должны иметь место дополнительные скачки на этих зависимостях. Последнее можно рассматривать как главную особенность пт СКВИДа, замкнутого диффузионными микроконтактами между однозонным и трехзонным сверхпроводником с нарушением симметрии относительно обращения времени.

Для пт СКВИДа, образованного джозефсоновскими микроконтактами между однозонным и многозонным (двух и трехзонным) сверхпроводником с баллистической проводимостью, специфика системы сохраняется, отличаясь лишь количественными характеристиками [114].

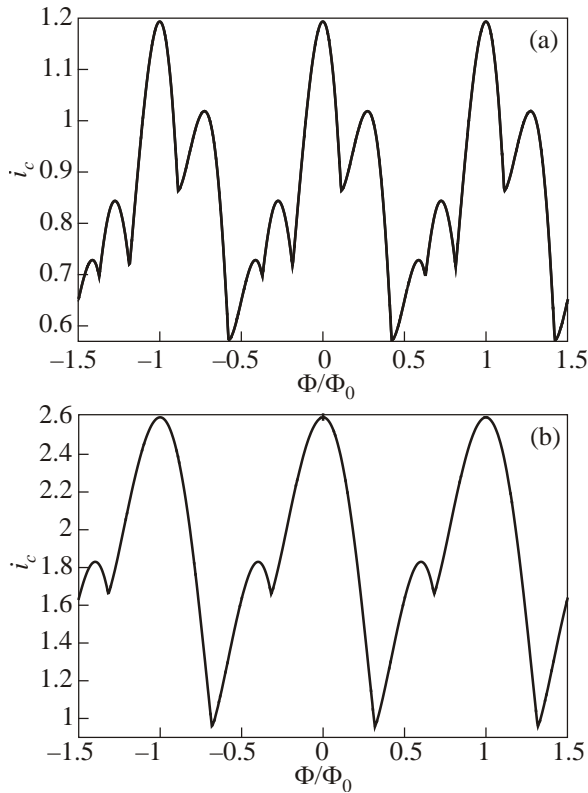


Рис. 31. Зависимость критического тока асимметричного пт СКВИДа от приложенного внешнего магнитного потока для трехзонного сверхпроводника с нарушенной симметрией относительно обращения времени с фрустрированными основными состояниями $\phi = 0, 6\pi$, $\theta = 1, 2\pi$ и $\phi = 1, 4\pi$, $\theta = 0, 8\pi$ (а) и трехзонного сверхпроводника без нарушения симметрии относительно обращения времени с основным состоянием $\phi = 0$, $\theta = \pi$ и $\phi = \pi$, $\theta = \pi$ (б) [119].

4. Экспериментальные результаты

Несмотря на преимущественно теоретический характер данного обзора, было бы несправедливым не упомянуть об экспериментальной деятельности в данном направлении. Джозефсоновские структуры на основе диборида магния подробно исследовались в работах [120–155]. Двухзонной моделью сверхпроводника с s_{++} -волновой симметрией, которая реализуется в MgB_2 , хорошо описывает большинство экспериментальных данных.

В железосодержащих сверхпроводниках, как в вероятных носителях s_{\pm} или более экзотической киральной симметрии параметра порядка, эффект Джозефсона впервые наблюдался в работе [156]. Объектами исследования являлись планарные и микроконтакты, образованные обычным сверхпроводящим свинцом и монокристаллом $Ba_{1-x}K_xFe_2As_2$. Измеренные вольт-амперные характеристики контакта не демонстрировали значительного гистерезиса и хорошо описывались RSJ моделью.

При микроволновом облучении на вольт-амперных характеристиках были также обнаружены ступеньки

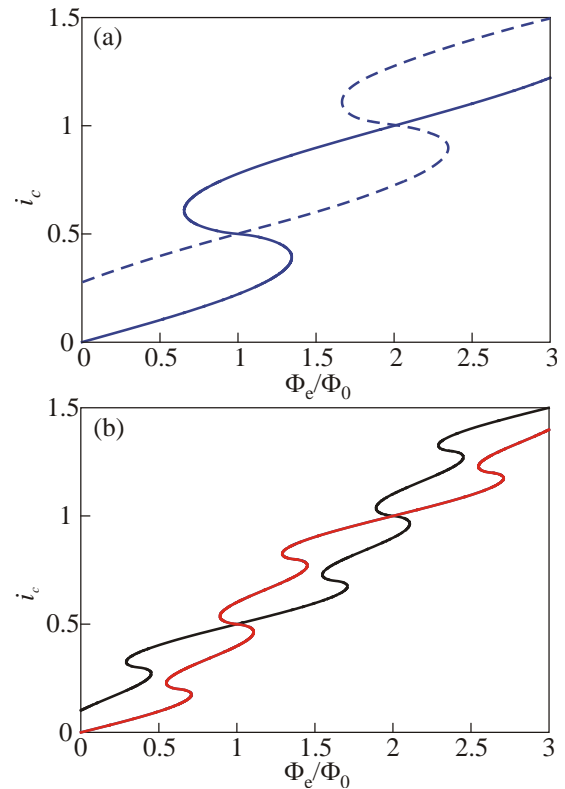


Рис. 32. (Онлайн в цвете) S состояния в обычном пт СКВИДе (а) и пт СКВИДе на основе трехзонного сверхпроводника с нарушенной симметрией относительно обращения времени (б). Синяя сплошная и пунктирная кривые демонстрируют два возможных типа S состояния для обычного пт СКВИДа. Зависимости $\Phi(\Phi_e)$ для случая трехзонного сверхпроводника с нарушенной симметрией относительно обращения времени соответствуют фрустрированному основному состоянию $\phi = 0, 6\pi$, $\theta = 1, 2\pi$ (черная кривая) и $\phi = 1, 4\pi$, $\theta = 0, 8\pi$ (красная кривая) [119].

Шапиро, которые возникали при напряжениях, соответствующих кратной частоте внешнего воздействия. Кроме того, имела место фраунгоферовская симметричная картина модуляции критического тока контактов во внешнем магнитном поле. Из полученных экспериментальных фактов был сделан предварительный вывод о том, что параметр порядка в $Ba_{1-x}K_xFe_2As_2$ по крайней мере не демонстрирует наличие нулей (нодов) и имеет s-волновую симметрию.

Данные экспериментальных работ по эффекту близости и эффектам Джозефсона в оксипникридах и халькогенидах железа, выполненных до 2011 года, были просуммированы в обзоре [157]. Последующие эксперименты подтвердили многозонную структуру «железных» сверхпроводников [158–165], при этом некоторые из результатов [163], а именно, температурное поведение критического тока контактов, можно интерпретировать как теоретически предсказанную возможность $0-\pi$ перехода. Более экзотические предсказания, описанные в обзоре, пока, по нашим сведениям, не получили свое экспериментальное подтверждение.

5. Заключение

Таким образом, в данном обзоре рассмотрены эффект близости и эффект Джозефсона в разнообразных гетероструктурах, в которых одной из компонент выступал многозонный сверхпроводник. Установлено, что в бислое между s и s_{\pm} сверхпроводниками возможно формирование аномальных особенностей в виде состояния с нарушенной симметрией относительно обращения времени, которые проявляют себя в виде уникальных пиков и провалов в плотности состояний на интерфейсе сэндвича. Показано, что величина этих пиков, равно как и провалов, регулируется разностью фаз параметров порядка в двухзонном сверхпроводнике, индуцированной нарушением симметрии относительно обращения времени.

Джозефсоновские SIS, SNS и ScS контакты демонстрируют существенно более богатое поведение. Для систем, в которых один или оба сверхпроводящих берега занимает s_{\pm} двухзонный или трехзонный сверхпроводник, в зависимости от температуры, а также типа и параметров барьера, возможна реализация обычного контакта с основным состоянием с джозефсоновской разностью фаз равной нулю, π -контакта с основным состоянием с разностью фаз π и экзотического ϕ -контакта, в котором может происходить фрустрация основного состояния, приводящая к нарушению симметрии относительно обращения времени. Показано, что в случае π -контакта или его «обобщения» в виде ϕ -контакта температурная зависимость критического тока терпит изломы, а ток-фазовая зависимость может приобретать сложную форму, демонстрируя наличие спонтанных токов. Более того, было найдено, что если один из сверхпроводящих берегов контакта является трехзонным сверхпроводником с нарушением в нем симметрии относительно обращения времени, то в такой системе в процессе измерений возможны два вида ток-фазовых зависимостей. Ее выбор в ходе эксперимента определяется тем, в каком из двух основных состояний находился до этого массивный трехзонный сверхпроводник. Если же джозефсоновский контакт создается идентичными трехзонными сверхпроводниками с нарушенной симметрией относительно обращения времени, то критический ток системы может менять свое значение от максимального, соответствующего тому, что оба сверхпроводящих берега находятся в одинаковых основных состояниях, до минимального, когда основные состояния являются комплексно сопряженными.

Многозонная природа сверхпроводящего состояния накладывает свой отпечаток и на нестационарный эффект

Джозефсона. Показано, что при микроволновом облучении контакта на его вольт-амперной характеристике образуются дробные ступеньки Шапиро, причем симметрия параметра порядка (s_{++} , s_{\pm} или киральность в случае трехзонного сверхпроводника) диктует свою неповторимую структуру в расположении этих ступенек.

Было обнаружено, что приведенные особенности в эффекте Джозефсона переносятся и на системы из джозефсоновских контактов, в частности пт СКВИДы, которые образованы обычным и многозонным сверхпроводником. Наличие s_{\pm} -волновой симметрии в двухзонном сверхпроводнике или нарушения симметрии относительно обращения времени в трехзонном сверхпроводнике формирует уникальный энергетический спектр СКВИДа, который находит свое отражение на необычных зависимостях критического тока от приложенного внешнего магнитного потока и специфической форме S состояний.

Данная работа была поддержана гарантом РФФИ # 15-12-10020.

Приложение. Микроскопическая и феноменологическая теория многозонной сверхпроводимости

Для теоретического исследования токовых состояний в многозонных сверхпроводниках в большинстве задач применяется квазиклассический формализм уравнений Эйленберга и их аппроксимация в случае сильного рассеивания на примесях в виде уравнений Узалея с соответствующим обобщением на несколько зон.

Из этих уравнений в пределе температур, близких к критической, стандартными процедурами может быть получен функционал и уравнения Гинзбурга–Ландау для сверхпроводника с многокомпонентным параметром порядка. В данном приложении излагается микроскопическая теория многозонной сверхпроводимости, основанная на уравнениях Эйленберга и уравнениях Узалея, а также феноменологический формализм теории Гинзбурга–Ландау в предположении, что волновая функция куперовских пар является изотропной (параметры порядка имеют s -волновую симметрию).

А. Уравнения Эйленберга и Узалея

Уравнения Эйленберга, описывающие анизотропный двухзонный сверхпроводник, для квазиклассических функций Грина $f_i(\mathbf{v}, \mathbf{r}, \omega)$, $f_i^*(\mathbf{v}, \mathbf{r}, \omega)$ и $g_i(\mathbf{v}, \mathbf{r}, \omega)$ в общем случае имеют вид [166]

$$\begin{aligned} (2\omega + v_{\mathbf{k}} \mathbf{\Pi}) f_1(\mathbf{k}) - 2\Delta_1 g_1(\mathbf{k}) = n_{\text{imp}} \int |u_{\mathbf{k}_1 \mathbf{q}_1}|^2 [g_1(\mathbf{k}_1) f_1(\mathbf{q}_1) - f_1(\mathbf{k}_1) g_1(\mathbf{q}_1)] \frac{dA_{\mathbf{q}_1}}{v_{\mathbf{q}_1}} + \\ + n_{\text{imp}} \int |u_{\mathbf{k}_1 \mathbf{q}_2}|^2 [g_1(\mathbf{k}_1) f_2(\mathbf{q}_2) - f_1(\mathbf{k}_1) g_2(\mathbf{q}_2)] \frac{dA_{\mathbf{q}_2}}{v_{\mathbf{q}_2}}, \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

$$(2\omega + v_{\mathbf{k}}\Pi) f_2(\mathbf{k}) - 2\Delta_2 g_2(\mathbf{k}) = n_{\text{imp}} \int |u_{\mathbf{k}_2\mathbf{q}_2}|^2 [g_2(\mathbf{k}_2) f_2(\mathbf{q}_2) - f_2(\mathbf{k}_2) g_2(\mathbf{q}_2)] \frac{dA_{\mathbf{q}_1}}{v_{\mathbf{q}_1}} +$$

$$+ n_{\text{imp}} \int |u_{\mathbf{k}_2\mathbf{q}_1}|^2 [g_2(\mathbf{k}_2) f_1(\mathbf{q}_1) - f_2(\mathbf{k}_2) g_1(\mathbf{q}_1)] \frac{dA_{\mathbf{q}_1}}{v_{\mathbf{q}_1}}, \quad (\text{A.2})$$

вместе с еще двумя комплексно-сопряженными уравнениями. Здесь $\Pi \equiv \nabla + \frac{2\pi i}{\Phi_0} \mathbf{A}$, \mathbf{A} — вектор-потенциал магнитного поля, Δ_i — энергетические щели, $\frac{dA_{\mathbf{q}}}{v_{\mathbf{q}}}$ означает интегрирование по поверхности Ферми с локальной плотностью состояний $\frac{1}{v_{\mathbf{q}}}$, подынтегральные члены учитывают рассеивание на немагнитных примесях, $u_{\mathbf{k}\mathbf{q}}$ — амплитуда рассеивания, n_{imp} — плотность примесей, $v_{\mathbf{q}}$ — нормальная компонента групповой скорости на анизотропной поверхности Ферми, волновые вектора \mathbf{k} и \mathbf{q} лежат на Ферми-поверхности, $\omega = (2n + 1)\pi T$ — мацубаровская частота ($n \in \mathbb{Z}$) и звездочка обозначает комплексное сопряжение. Уравнения (A.1) и (A.2) дополняются условием нормировки

$$ff^* + g^2 = 1, \quad (\text{A.3})$$

уравнением самосогласования для сверхпроводящей щели

$$\Delta(\mathbf{k}, \mathbf{r}) = 2\pi T \sum_{\omega > 0} \int V(\mathbf{k}, \mathbf{q}) f(\mathbf{q}, \mathbf{r}, \omega) \frac{dA_{\mathbf{q}}}{v_{\mathbf{q}}}, \quad (\text{A.4})$$

и выражением для плотности сверхпроводящего тока

$$j = -4\pi T e \text{Im} \sum_{\omega > 0} \int v_{\mathbf{q}} g(\mathbf{q}, \mathbf{r}, \omega) \frac{dA_{\mathbf{q}}}{v_{\mathbf{q}}}, \quad (\text{A.5})$$

где $V(\mathbf{k}, \mathbf{q})$ — потенциал спаривания.

В грязном пределе (сильное рассеивание на примесях) уравнения Эйленбергера посредством разложения функций Грина по сферическим гармоникам редуцируются к уравнениям Узаделя для двухзонной сверхпроводимости:

$$2\omega f_1 - D_1 [g_1 \Pi^2 f_1 - f_1 \nabla^2 g_1] =$$

$$= 2\Delta_1 g_1 + \Gamma_{12} (g_1 f_2 - g_2 f_1), \quad (\text{A.6})$$

$$2\omega f_2 - D_2 [g_2 \Pi^2 f_2 - f_2 \nabla^2 g_2] =$$

$$= 2\Delta_2 g_2 + \Gamma_{21} (g_2 f_1 - g_1 f_2), \quad (\text{A.7})$$

с уравнением самосогласования

$$\Delta_i = 2\pi T \sum_j \sum_{\omega > 0} \lambda_{ij} f_j, \quad (\text{A.8})$$

которое для удобства численного счета может быть переписано как

$$\left\{ \begin{aligned} 2\pi T \sum_{\omega > 0} \left(\frac{|\Delta_1|}{\sqrt{\omega^2 + |\Delta_1|^2}} - \frac{|\Delta_1|}{\omega} \right) + \frac{|\Delta_1|}{\Lambda} - |\Delta_1| \ln \frac{T}{T_c} &= \frac{\det \begin{pmatrix} |\Delta_1| & \lambda_{12} \\ |\Delta_2| & \lambda_{22} \end{pmatrix}}{\det \lambda_{ij}}, \\ 2\pi T \sum_{\omega > 0} \left(\frac{|\Delta_2|}{\sqrt{\omega^2 + |\Delta_2|^2}} - \frac{|\Delta_2|}{\omega} \right) + \frac{|\Delta_2|}{\Lambda} - |\Delta_2| \ln \frac{T}{T_c} &= \frac{\det \begin{pmatrix} \lambda_{11} & |\Delta_1| \\ \lambda_{21} & |\Delta_2| \end{pmatrix}}{\det \lambda_{ij}}. \end{aligned} \right. \quad (\text{A.9})$$

В уравнениях (A.6) и (A.7) D_i представляют собой внутризонные коэффициенты диффузии, $\Gamma_{ij} = \frac{n_{\text{imp}}}{N_i} \int |u_{\mathbf{k}, \mathbf{q}}|^2 \frac{dA_{\mathbf{q}}}{v_i(\mathbf{q})} \frac{dA_{\mathbf{k}}}{v_j(\mathbf{q})}$ обозначают коэффициенты межзонного рассеивания, $N_i = \int \frac{dA_{\mathbf{k}}}{v_i(\mathbf{k})}$ соответствует плотности состояний на уровне Ферми для каждой

зоны, $\lambda_{ij} = \frac{1}{N_i} \int \frac{V(\mathbf{k}, \mathbf{q})}{v_i(\mathbf{k}) v_j(\mathbf{q})} dA_{\mathbf{k}} dA_{\mathbf{q}}$ — матрица констант внутри- и межзонного взаимодействия, а Λ наибольшее собственное значение матрицы λ_{ij} .

Для трехзонного сверхпроводника уравнения Узаделя могут быть обобщены следующим образом [167]:

$$\omega f_1 - \frac{D_1}{2} (g_1 \Pi^2 f_1 - f_1 \nabla^2 g_1) = \Delta_1 g_1 + \Gamma_{12} (g_1 f_2 - g_2 f_1) + \Gamma_{13} (g_1 f_3 - g_3 f_1), \quad (\text{A.10})$$

$$\omega f_2 - \frac{D_2}{2} (g_2 \Pi^2 f_2 - f_2 \nabla^2 g_2) = \Delta_2 g_2 + \Gamma_{21} (g_2 f_1 - g_1 f_2) + \Gamma_{23} (g_2 f_3 - g_3 f_2), \quad (\text{A.11})$$

$$\omega f_3 - \frac{D_3}{2} (g_3 \Pi^2 f_3 - f_3 \nabla^2 g_3) = \Delta_3 g_3 + \Gamma_{31} (g_3 f_1 - g_1 f_3) + \Gamma_{32} (g_3 f_2 - g_2 f_3) \quad (\text{A.12})$$

при этом уравнение самосогласования (A.8) может быть представлено в виде

$$\left\{ \begin{array}{l} 2\pi T \sum_{\omega>0} \left(\frac{|\Delta_1|}{\sqrt{\omega^2 + |\Delta_1|^2}} - \frac{|\Delta_1|}{\omega} \right) + \frac{|\Delta_1|}{\Lambda} - |\Delta_1| \ln \frac{T}{T_c} = \frac{\det \begin{pmatrix} |\Delta_1| & \lambda_{12} & \lambda_{13} \\ |\Delta_2| \cos \phi & \lambda_{22} & \lambda_{23} \\ |\Delta_3| \cos \theta & \lambda_{32} & \lambda_{33} \end{pmatrix}}{\det \lambda_{ij}}, \\ 2\pi T \sum_{\omega>0} \left(\frac{|\Delta_2| \cos \phi}{\sqrt{\omega^2 + |\Delta_2|^2}} - \frac{|\Delta_2|}{\omega} \right) + \frac{|\Delta_2|}{\Lambda} - |\Delta_2| \ln \frac{T}{T_c} = \frac{\det \begin{pmatrix} \lambda_{11} & |\Delta_1| & \lambda_{13} \\ \lambda_{21} & |\Delta_2| \cos \phi & \lambda_{23} \\ \lambda_{31} & |\Delta_3| \cos \theta & \lambda_{33} \end{pmatrix}}{\det \lambda_{ij}}, \\ 2\pi T \sum_{\omega>0} \left(\frac{|\Delta_3| \cos \theta}{\sqrt{\omega^2 + |\Delta_3|^2}} - \frac{|\Delta_3|}{\omega} \right) + \frac{|\Delta_3|}{\Lambda} - |\Delta_3| \ln \frac{T}{T_c} = \frac{\det \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & |\Delta_1| \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & |\Delta_2| \cos \phi \\ \lambda_{31} & \lambda_{32} & |\Delta_3| \cos \theta \end{pmatrix}}{\det \lambda_{ij}}, \end{array} \right. \quad (\text{A.13})$$

где, как и раньше, Λ наибольшее собственное значение матрицы λ_{ij} , а ϕ и θ обозначают разности фаз параметров порядка. Последние могут быть найдены из вариации энергии многозонного сверхпроводника [113]

$$F = \frac{1}{2} \sum_{ij} \Delta_i \Delta_j^* N_i \lambda_{ij}^{-1} + F_i + F_{\text{imp}}, \quad (\text{A.14})$$

где λ_{ij}^{-1} — обратная матрица констант взаимодействия λ_{ij} и

$$F_i = 2\pi T \sum_{\omega>0} N_i \left[\omega(1 - g_i) - \text{Re}(f_i^* \Delta_i) + \frac{1}{4} D_i (\mathbf{\Pi} f_i \mathbf{\Pi}^* f_i^* + \nabla g_i \nabla g_i) \right], \quad (\text{A.15})$$

$$\begin{aligned} F_{\text{imp}} = 2\pi (N_1 \Gamma_{12} + N_2 \Gamma_{21}) \sum_{\omega>0} (1 - g_1 g_2 - \text{Re}(f_1^* f_2)) + 2\pi (N_1 \Gamma_{13} + N_3 \Gamma_{31}) \sum_{\omega>0} (1 - g_1 g_3 - \text{Re}(f_1^* f_3)) + \\ + 2\pi (N_2 \Gamma_{23} + N_3 \Gamma_{32}) \sum_{\omega>0} (1 - g_2 g_3 - \text{Re}(f_2^* f_3)). \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

Вводя обозначение

$$\Omega = \sqrt{1 - \frac{\left((\lambda_{13}^{-1})^2 (\lambda_{23}^{-1})^2 |\Delta_3|^2 - (\lambda_{12}^{-1})^2 (\lambda_{13}^{-1})^2 |\Delta_1|^2 - (\lambda_{12}^{-1})^2 (\lambda_{23}^{-1})^2 |\Delta_2|^2 \right)^2}{2 (\lambda_{12}^{-1})^2 \lambda_{13}^{-1} \lambda_{23}^{-1} |\Delta_1| |\Delta_2|}}$$

и предполагая отсутствие межзонных примесей для $\phi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$ и $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$ имеем

$$\begin{cases} \phi = \pm \arcsin \Omega, \\ \theta = \mp \arcsin \left(\frac{\lambda_{12}^{-1} |\Delta_2|}{\lambda_{13}^{-1} |\Delta_3|} \Omega \right), \end{cases} \quad (\text{A.17})$$

$$\begin{cases} \phi = 0, \\ \theta = 0, \end{cases} \quad (\text{A.18})$$

для $\phi \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right]$ и $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$

$$\begin{cases} \phi = \pi \pm \arcsin \Omega, \\ \theta = \pm \arcsin \left(\frac{\lambda_{12}^{-1} |\Delta_2|}{\lambda_{13}^{-1} |\Delta_3|} \Omega \right), \end{cases} \quad (\text{A.19})$$

$$\begin{cases} \phi = \pi, \\ \theta = 0, \end{cases} \quad (\text{A.20})$$

для $\phi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$ и $\theta \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right]$

$$\begin{cases} \phi = \pm \arcsin \Omega, \\ \theta = \pi \pm \arcsin \left(\frac{\lambda_{12}^{-1} |\Delta_2|}{\lambda_{13}^{-1} |\Delta_3|} \Omega \right), \end{cases} \quad (\text{A.21})$$

$$\begin{cases} \phi = 0, \\ \theta = \pi, \end{cases} \quad (\text{A.22})$$

и, наконец, для $\phi \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right]$ и $\theta \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right]$

$$\begin{cases} \phi = \pi \pm \arcsin \Omega, \\ \theta = \pi \mp \arcsin \left(\frac{\lambda_{12}^{-1} |\Delta_2|}{\lambda_{13}^{-1} |\Delta_3|} \Omega \right), \end{cases} \quad (\text{A.23})$$

$$\begin{cases} \phi = \pi, \\ \theta = \pi. \end{cases} \quad (\text{A.24})$$

Выбор соответствующих решений (A17)–(A24) определяется специальной системой неравенств, следующей из условия стабильности функции энергии $F(\phi, \theta)$ (см. уравнение (A14))

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 F}{\partial \phi^2} < 0, \\ \frac{\partial^2 F}{\partial \phi^2} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} - \left(\frac{\partial^2 F}{\partial \phi \partial \theta} \right)^2 > 0. \end{cases} \quad (\text{A.25})$$

В. Феноменологический подход

В чистом пределе функционал Гинзбурга–Ландау для двухзонного сверхпроводника имеет вид [168, 169]:

$$F = \int \left[\alpha_1 |\psi_1|^2 + \alpha_2 |\psi_2|^2 + \frac{1}{2} \beta_1 |\psi_1|^4 + \frac{1}{2} \beta_2 |\psi_2|^4 + K_1 |\mathbf{\Pi} \psi_1|^2 + K_2 |\mathbf{\Pi} \psi_2|^2 - \gamma (\psi_1^* \psi_2 + \psi_2^* \psi_1) \right] dV, \quad (\text{B.1})$$

где

$$\alpha_{1,2} = \left[\frac{\lambda_{22}}{(\lambda_{11} \lambda_{22} - \lambda_{12} \lambda_{21})} - \ln \frac{2\gamma \omega_D}{\pi T} \right] N_{1,2},$$

$$\beta_{1,2} = \frac{7\zeta(3) N_{1,2}}{16\pi^2 T_c^2}, \quad \gamma = \frac{\lambda_{12} N_1}{\det \lambda_{ij}} = \frac{\lambda_{21} N_2}{\det \lambda_{ij}},$$

$$K_{1,2} = \frac{7\zeta(3) N_{1,2}}{16\pi^2 T_c^2} \left\langle v_{F_{1,2}}^2 \right\rangle,$$

где γ под знаком натурального логарифма — постоянная Эйлера–Маскерони (не путать с феноменологическим коэффициентом, учитывающим межзонное взаимодействие), а интегрирование в (B1) ведется по всему одно-, двух- или трехмерному сверхпроводнику.

В грязном пределе для случая слабого межзонного рассеивания $\Gamma_{21}, \Gamma_{12} \ll 1$ функционал Гинзбурга–Ландау усложняется [170]:

$$F = \int \left[\alpha_1 |\psi_1|^2 + \alpha_2 |\psi_2|^2 + \frac{1}{2} \beta_1 |\psi_1|^4 + \frac{1}{2} \beta_2 |\psi_2|^4 + K_{1i} |\mathbf{\Pi} \psi_1|^2 + K_{2i} |\mathbf{\Pi} \psi_2|^2 - \gamma (\psi_1^* \psi_2 + \psi_2^* \psi_1) + \eta (\mathbf{\Pi}_i \psi_1 \mathbf{\Pi}_i^* \psi_2^* + \mathbf{\Pi}_i^* \psi_1^* \mathbf{\Pi}_i \psi_2) - \nu |\psi_1|^2 |\psi_2|^2 + 2\nu (|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2) \text{Re}(\psi_1 \psi_2) \right] dV, \quad (\text{B.2})$$

где

$$\alpha_1 = \frac{N_1}{2} \left(\ln \frac{T}{T_{c1}} + \frac{\pi \Gamma_{12}}{4T_c} \right), \quad \alpha_2 = \frac{N_2}{2} \left(\ln \frac{T}{T_{c2}} + \frac{\pi \Gamma_{21}}{4T_c} \right), \quad \beta_1 = N_1 \left(\frac{7\zeta(3)}{16\pi^2 T_c^2} - \frac{3\pi \Gamma_{12}}{384T_c^3} \right), \quad \beta_2 = N_2 \left(\frac{7\zeta(3)}{16\pi^2 T_c^2} - \frac{3\pi \Gamma_{21}}{384T_c^3} \right),$$

$$K_1 = N_1 D_1 \left(\frac{\pi}{16T_c} - \frac{7\zeta(3) \Gamma_{12}}{8\pi^2 T_c^2} \right), \quad K_2 = N_2 D_2 \left(\frac{\pi}{16T_c} - \frac{7\zeta(3) \Gamma_{21}}{8\pi^2 T_c^2} \right),$$

$$\gamma = \frac{N_1}{2} \left(\frac{\lambda_{12}}{\lambda_{11}\lambda_{22} - \lambda_{12}\lambda_{21}} + \frac{\pi\Gamma_{12}}{4T_c} \right) + \frac{N_2}{2} \left(\frac{\lambda_{21}}{\lambda_{11}\lambda_{22} - \lambda_{12}\lambda_{21}} + \frac{\pi\Gamma_{21}}{4T_c} \right), \quad \eta = \frac{7\zeta(3)}{(4\pi T_c)^2} (D_1 + D_2)(\Gamma_{12}N_1 + \Gamma_{21}N_2),$$

$$v = \frac{\pi}{384T_c^3} (\Gamma_{12}N_1 + \Gamma_{21}N_2).$$

Здесь

$$T_1 = T_c \exp \left(- \frac{\sqrt{(\lambda_{11} - \lambda_{22})^2 + 4\lambda_{12}\lambda_{21}} - (\lambda_{11} - \lambda_{22})}{2 \det \lambda} \right), \quad a T_2 = T_c \exp \left(- \frac{\sqrt{(\lambda_{11} - \lambda_{22})^2 + 4\lambda_{12}\lambda_{21}} + (\lambda_{11} - \lambda_{22})}{2 \det \lambda} \right)$$

представляют собой критические температуры отдельных, не взаимодействующих зон.

Если $\Gamma_{12}, \Gamma_{21} \approx T_c$, то функционал Гинзбурга–Ландау может быть приведен к диагональной форме

$$F = \int \left[\alpha_1 |\psi_1|^2 + \alpha_2 |\psi_2|^2 + \frac{1}{2} \beta_1 |\psi_1|^4 + \frac{1}{2} \beta_2 |\psi_2|^4 + \hbar^2 \left(\frac{|\psi_1|^2}{2m_1} + \frac{|\psi_2|^2}{2m_2} + 2\eta |\psi_1| |\psi_2| \cos \phi \right) (\nabla \theta)^2 + \right. \\ \left. + \hbar^2 \left(c_2^2 \frac{|\psi_1|^2}{2m_1} + c_1^2 \frac{|\psi_2|^2}{2m_2} - 2\eta c_1 c_2 |\psi_1| |\psi_2| \cos \phi \right) (\nabla \phi)^2 - 2\gamma |\psi_1| |\psi_2| \cos \phi \right] dV. \quad (\text{B.3})$$

Здесь $\phi = \varphi_1 - \varphi_2$ представляет собой разность фаз параметров порядка, а $\theta = c_1 \chi_1 + c_2 \chi_2$, где

$$c_1 = \frac{\frac{|\psi_1|^2}{m_1} + 2\eta |\psi_1| |\psi_2| \cos \phi}{\frac{|\psi_1|^2}{m_1} + \frac{|\psi_2|^2}{m_2} + 4\eta |\psi_1| |\psi_2| \cos \phi}, \quad c_2 = \frac{\frac{|\psi_2|^2}{m_2} + 2\eta |\psi_1| |\psi_2| \cos \phi}{\frac{|\psi_1|^2}{m_1} + \frac{|\psi_2|^2}{m_2} + 4\eta |\psi_1| |\psi_2| \cos \phi}. \quad (\text{B.4})$$

Для произвольных значений микроскопических коэффициентов межзонного рассеивания Γ_{12} и Γ_{21} функционал Гинзбурга–Ландау в однородном бестоковом состоянии может быть записан как [171]

$$F = \int \left[a_{11} |\psi_1|^2 + a_{22} |\psi_2|^2 + \frac{1}{2} b_{11} |\psi_1|^4 + \frac{1}{2} b_{22} |\psi_2|^4 + 2a_{12} |\psi_1| |\psi_2| \cos \phi + b_{12} |\psi_1|^2 |\psi_2|^2 + \right. \\ \left. + 2 \left(c_{11} |\psi_1|^2 |\psi_2| + c_{22} |\psi_1| |\psi_2|^2 \right) \cos \phi + c_{12} |\psi_1|^2 |\psi_2|^2 \cos 2\phi \right] dV, \quad (\text{B.5})$$

где ϕ — разность фаз параметра порядка, а феноменологические коэффициенты выражаются через микроскопические параметры:

$$a_{ii} = N_i \left(\frac{\lambda_{ii}}{\det \lambda_{ij}} - 2\pi T \sum_{\omega > 0}^{\omega_D} \frac{\omega + \Gamma_{ij}}{\omega(\omega + \Gamma_{ij} + \Gamma_{ji})} \right), \quad a_{ij} = -N_i \left(\frac{\lambda_{ij}}{\det \lambda_{ij}} + 2\pi T \sum_{\omega > 0}^{\omega_D} \frac{\Gamma_{ij}}{\omega(\omega + \Gamma_{ij} + \Gamma_{ji})} \right),$$

$$b_{ii} = N_i \pi T \sum_{\omega > 0}^{\omega_D} \frac{(\omega + \Gamma_{ij})^4}{\omega^3 (\omega + \Gamma_{ij} + \Gamma_{ji})^4} + N_i \pi T \sum_{\omega > 0}^{\omega_D} \frac{\Gamma_{ij} (\omega + \Gamma_{ji}) (\omega^2 + 3\omega \Gamma_{ji} + \Gamma_{ji}^2)}{\omega^3 (\omega + \Gamma_{ij} + \Gamma_{ji})^4},$$

$$b_{ij} = -N_i \pi T \sum_{\omega > 0}^{\omega_D} \frac{\Gamma_{ij}}{\omega^3 (\omega + \Gamma_{ij} + \Gamma_{ji})^4} + N_i \pi T \sum_{\omega > 0}^{\omega_D} \frac{\Gamma_{ij} (\Gamma_{ij} + \Gamma_{ji}) (\Gamma_{ji} (\omega + 2\Gamma_{ij}) + \omega \Gamma_{ij})}{\omega^3 (\omega + \Gamma_{ij} + \Gamma_{ji})^4},$$

$$c_{ii} = N_i \pi T \sum_{\omega > 0}^{\omega_D} \frac{\Gamma_{ij} (\omega + \Gamma_{ji}) (\omega^2 + \omega (\omega + \Gamma_{ji}) (\Gamma_{ij} + \Gamma_{ji}))}{\omega^3 (\omega + \Gamma_{ij} + \Gamma_{ji})^4}, \quad c_{ij} = N_i \pi T \sum_{\omega > 0}^{\omega_D} \frac{\Gamma_{ij} (\omega + \Gamma_{ij}) (\omega + \Gamma_{ji}) (\Gamma_{ij} + \Gamma_{ji})}{\omega^3 (\omega + \Gamma_{ij} + \Gamma_{ji})^4}.$$

Трехзонный сверхпроводник в чистом пределе и также в бестоковом режиме может быть описан следующим функционалом Гинзбурга–Ландау [167,172–177]

$$F = \int \left[\alpha_1 |\psi_1|^2 + \alpha_2 |\psi_2|^2 + \alpha_3 |\psi_3|^2 + \frac{1}{2} \beta_1 |\psi_1|^4 + \frac{1}{2} \beta_2 |\psi_2|^4 + \frac{1}{2} \beta_3 |\psi_3|^4 + K_{1i} |\mathbf{\Pi}\psi_1|^2 + K_{2i} |\mathbf{\Pi}\psi_2|^2 + K_{3i} |\mathbf{\Pi}\psi_3|^2 - \right. \\ \left. - \gamma_{12} (\psi_1^* \psi_2 + \psi_2^* \psi_1) - \gamma_{13} (\psi_1^* \psi_3 + \psi_1 \psi_3^*) - \gamma_{23} (\psi_2^* \psi_3 + \psi_2 \psi_3^*) \right] dV, \quad (B6)$$

где

$$\alpha_1 = \left(\ln \left(\frac{2\gamma \langle \omega_0 \rangle}{\pi T} \right) - \frac{\lambda_{22}\lambda_{33} - \lambda_{23}\lambda_{32}}{\det(\lambda)} \right) N_1, \quad \alpha_2 = \left(\ln \left(\frac{2\gamma \langle \omega_0 \rangle}{\pi T} \right) - \frac{\lambda_{11}\lambda_{33} - \lambda_{13}\lambda_{31}}{\det(\lambda)} \right) N_2, \\ \alpha_3 = \left(\ln \left(\frac{2\gamma \langle \omega_0 \rangle}{\pi T} \right) - \frac{\lambda_{11}\lambda_{22} - \lambda_{12}\lambda_{21}}{\det(\lambda)} \right) N_3, \quad K_i = \frac{\pi D_i N_i}{8T_c}, \quad \beta_i = \frac{7\zeta(3) N_i}{8\pi^2 T_c^2}, \quad \gamma_{12} = \frac{(\lambda_{12}\lambda_{33} - \lambda_{13}\lambda_{32}) N_2}{\det(\lambda)}, \\ \gamma_{13} = \frac{(\lambda_{13}\lambda_{22} - \lambda_{12}\lambda_{23}) N_3}{\det(\lambda)}, \quad \gamma_{23} = \frac{(\lambda_{11}\lambda_{23} - \lambda_{13}\lambda_{21}) N_3}{\det(\lambda)}.$$

В грязном пределе в отсутствие внешних токов свободная энергия выражается как [178]

$$F = \int \left[\alpha_1 |\psi_1|^2 + \alpha_2 |\psi_2|^2 + \alpha_3 |\psi_3|^2 + \frac{1}{2} \beta_1 |\psi_1|^4 + \frac{1}{2} \beta_2 |\psi_2|^4 + \frac{1}{2} \beta_3 |\psi_3|^4 + K_{1i} |\mathbf{\Pi}\psi_1|^2 + K_{2i} |\mathbf{\Pi}\psi_2|^2 + K_{3i} |\mathbf{\Pi}\psi_3|^2 - \right. \\ \left. - \gamma_{12} (\psi_1^* \psi_2 + \psi_2^* \psi_1) - \gamma_{13} (\psi_1^* \psi_3 + \psi_1 \psi_3^*) - \gamma_{23} (\psi_2^* \psi_3 + \psi_2 \psi_3^*) + b_{12} |\psi_1|^2 |\psi_2|^2 + b_{13} |\psi_1|^2 |\psi_3|^2 + b_{23} |\psi_2|^2 |\psi_3|^2 \times \right. \\ \times c_{11} (|\psi_1|^3 |\psi_2| + |\psi_1|^3 |\psi_3|) \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + c_{22} (|\psi_2|^3 |\psi_1| + |\psi_2|^3 |\psi_3|) \cos(\varphi_1 - \varphi_3) + c_{33} (|\psi_3|^3 |\psi_1| + |\psi_3|^3 |\psi_2|) \cos(\varphi_2 - \varphi_3) \times \\ \times c_{12} |\psi_1|^2 |\psi_2|^2 \cos 2(\varphi_1 - \varphi_2) + c_{13} |\psi_1|^2 |\psi_3|^2 \cos 2(\varphi_1 - \varphi_3) + c_{23} |\psi_2|^2 |\psi_3|^2 \cos 2(\varphi_2 - \varphi_3) + \\ \left. + d_{123} |\psi_1|^2 |\psi_2| |\psi_3| \cos(2\varphi_1 - \varphi_2 - \varphi_3) + d_{231} |\psi_2|^2 |\psi_3| |\psi_1| \cos(2\varphi_2 - \varphi_1 - \varphi_3) + d_{312} |\psi_3|^2 |\psi_1| |\psi_2| \cos(2\varphi_3 - \varphi_1 - \varphi_2) \right]. \quad (B7)$$

Коэффициенты в выражении (B7) также имеют микроскопическое представление.

Варьируя приведенные здесь функционалы свободной энергии по ψ_1 , ψ_2 и \mathbf{A} , можно получить соответствующие уравнения Гинзбурга–Ландау, описывающие многозонный сверхпроводник в чистом или грязном пределе.

1. J. Bardeen, L.N. Cooper, and J.R. Schrieffer, *Phys. Rev.* **106**, 162 (1957).
2. J. Bardeen, L.N. Cooper, and J.R. Schrieffer, *Phys. Rev.* **108**, 1204 (1957).
3. В.А. Москаленко, *ФММ* **8**, 513 (1959).
4. H. Suhl, B.T. Matthias, and L.R. Walker, *Phys. Rev. Lett.* **3**, 554 (1959).
5. J. Nagamatsu, N. Nakagawa, T. Muranaka, Y. Zenitani, and J. Akimitsu, *Nature* **410**, 63 (2001).
6. W.N. Kang, C.U. Jung, K.H.P. Kim, Min-Seok Park, S.Y. Lee, Hyeong-Jin Kim, Eun-Mi Choi, K.H. Kim, Mun-Seog Kim, and Sung-Ik Lee, *Appl. Phys. Lett.* **79**, 984 (2001).
7. R. Jin, M. Paranthaman, H.Y. Zhai, H.M. Christen, D.K. Christen, and D. Mandrus, *Phys. Rev. B*, **64**, 220506 (2001).
8. W.N. Kang, Hyeong-Jin Kim, Eun-Mi Choi, Heon Jung Kim, Kijoon H.P. Kim, H.S. Lee, and Sung-Ik Lee, *Phys. Rev. B* **65**, 134508 (2002).
9. W.N. Kang, Hyeong-Jin Kim, Eun-Mi Choi, Heon Jung Kim, Kijoon H.P. Kim, and Sung-Ik Lee, *Phys. Rev. B* **65**, 184520 (2002).
10. Yu. Eltsev, K. Nakao, S. Lee, T. Masui, N. Chikumoto, S. Tajima, N. Koshizuka, and M. Murakami, *Phys. Rev. B* **66**, 180504 (2002).
11. T. Takahashi, T. Sato, S. Souma, T. Muranaka, and J. Akimitsu, *Phys. Rev. Lett.* **86**, 4915 (2001).
12. G. Karapetrov, M. Iavarone, W.K. Kwok, G.W. Crabtree, and D.G. Hinks, *Phys. Rev. Lett.* **86**, 4377 (2001).
13. M. Iavarone, G. Karapetrov, A.E. Koshelev, W.K. Kwok, G.W. Crabtree, and D.G. Hinks, *Phys. Rev. Lett.* **89**, 187002 (2002).
14. F. Giubileo, D. Roditchev, W. Sacks, R. Lamy, D.X. Thanh, J. Klein, S. Miraglia, D. Fruchart, J. Marcus, and Ph. Monod, *Phys. Rev. Lett.* **87**, 177008 (2001).
15. P. Szabo, P. Samuely, J. Kacmarcik, T. Klein, J. Marcus, D. Fruchart, S. Miraglia, C. Mercenat, and A.G.M. Jansen, *Phys. Rev. Lett.* **87**, 137005 (2001).
16. H. Schmidt, J.F. Zasadzinski, K.E. Gray, and D.G. Hinks, *Phys. Rev. Lett.* **88**, 127002 (2002).
17. I.K. Yanson and Yu.G. Naidyuk, *Fiz. Nizk. Temp.* **30**, 355 (2004) [*Low Temp. Phys.* **30**, 261 (2004)].

18. Y. Wang, T. Plackonwski, and A. Junod, *Physica C* **355**, 179 (2001).
19. R.S. Gonnelli, D. Daghero, G.A. Ummarino, V.A. Stepanov, J. Jun, S.M. Kazakov, and J. Karpinski, *Phys. Rev. Lett.* **89**, 247004 (2002).
20. F. Manzano, A. Carrington, N.E. Hussey, S. Lee, A. Yamamoto, and S. Tajima, *Phys. Rev. Lett.* **88**, 047002 (2002).
21. F. Bouquet, Y. Wang, I. Sheikin, T. Plackowski, A. Junod, S. Lee, and S. Tajima, *Phys. Rev. Lett.* **89**, 257001 (2002).
22. B.B. Jin, T. Dahm, A.I. Gubin, Eun-Mi Choi, Hyun Jung Kim, Sung-IK Lee, W.N. Kang, and N. Klein, *Phys. Rev. Lett.* **91**, 127006 (2003).
23. S. Souma, Y. Machida, T. Sato, T. Takahashi, H. Matsui, S-C. Wang, H. Ding, A. Kaminski, J.C. Campuzano, S. Sasaki, and K. Kadowaki, *Nature* **423**, 65 (2003).
24. S. Tsuda, T. Yokoya, Y. Takano, H. Kito, A. Matsushita, F. Yin, J. Itoh, H. Harima, and S. Shin, *Phys. Rev. Lett.* **91**, 127001 (2003).
25. X.K. Chen, M.J. Konstantinovic, J.C. Irwin, D.D. Lawrie, and J.P. Franck, *Phys. Rev. Lett.* **87**, 157002 (2001).
26. Y. Kamihara, T. Watanabe, M. Hirano, and H. Hosono, *J. Am. Chem. Soc.* **130**, 3296 (2008).
27. Ю.А. Изюмов, Э.З. Курмаев, *Регулярная и хаотическая динамика*, НИИ, Москва (2009).
28. G.R. Stewart, *Rev. Mod. Phys.* **83**, 1589 (2011).
29. A.A. Kordyuk, *Fiz. Nizk. Temp.* **38**, 1119 (2012) [*Low Temp. Phys.* **38**, 888 (2012)].
30. I.I. Mazin, D.J. Singh, M.D. Johannes, and M.H. Du, *Phys. Rev. Lett.* **101**, 057003 (2008).
31. V. Barzykin and L.P. Gorkov, *JETP Lett.* **88**, 135 (2008).
32. A.V. Chubukov, D. Efremov, and I. Eremin, *Phys. Rev. B* **78**, 134512 (2008).
33. N. Bulut, D.J. Scalapino, and R.T. Scaletter, *Phys. Rev. B* **45**, 5577 (1992).
34. A.A. Golubov and I.I. Mazin, *Physica C* **243**, 159 (1995).
35. K. Kuroki and R. Arita, *Phys. Rev. B* **64**, 024501 (2001).
36. S. Onari, K. Kuroki, R. Arita, and H. Aoki, *Phys. Rev. B* **65**, 184525 (2002).
37. T. Takimoto, T. Hotta, and K. Ueda, *Phys. Rev. B* **69**, 104504 (2004).
38. C.-T. Chen, C.C. Tsuei, M.B. Ketchen, Z.-A. Ren, and Z.X. Zhao, *Nature Phys.* **6**, 260 (2010).
39. Wei-Cheng Lee, Shou-Cheng Zhang, and Congjun Wu, *Phys. Rev. Lett.* **102**, 217002 (2009).
40. V. Stanev and A.E. Koshelev, *Phys. Rev. B* **89**, 100505(R) (2014).
41. G.A. Ummarino, M. Tortello, D. Daghero, and R.S. Gonnelli, *Phys. Rev. B* **80**, 172503 (2009).
42. S. Johnston, M. Abdel-Hafiez, L. Harnagea, V. Grinenko, D. Bombor, Y. Krupskaya, C. Hess, S. Wurmehl, A.U.B. Wolter, B. Büchner, H. Rosner, and S.-L. Drechsler, *Phys. Rev. B* **89**, 134507 (2014).
43. Shi-Zeng Lin, *J. Phys.: Condens. Matter* **26**, 493202 (2014).
44. Y Tanaka, *Supercond. Sci. Technol.* **28**, 034002 (2015).
45. R. Mahmoodi, Y.A. Kolesnichenko, and S.N. Shevchenko, *Fiz. Nizk. Temp.* **28**, 262 (2002) [*Low Temp. Phys.* **28**, 184 (2002)].
46. Y.A. Kolesnichenko, A.N. Omelyanchouk, and S.N. Shevchenko, *Fiz. Nizk. Temp.* **30**, 288 (2004) [*Low Temp. Phys.* **30**, 213 (2004)].
47. Y.A. Kolesnichenko and S.N. Shevchenko, *Fiz. Nizk. Temp.* **31**, 182 (2005) [*Low Temp. Phys.* **31**, 137 (2005)].
48. Y.A. Kolesnichenko, A.N. Omelyanchouk, and AM Zagoskin, *Fiz. Nizk. Temp.* **30**, 714 (2004) [*Low Temp. Phys.* **30**, 535 (2004)].
49. L.N. Cooper, *Phys. Rev. Lett.* **6**, 689 (1961).
50. N.R. Werthamer, *Phys. Rev.* **132**, 2440 (1963).
51. P.G. de Gennes, *Rev. Mod. Phys.* **36**, 225 (1964).
52. W.L. McMillan, *Phys. Rev.* **175**, 537 (1968).
53. M.Yu. Kupriyanov and V.F. Lukichev, *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **94**, 139 (1988) [*Sov. Phys. JETP* **67**, 1163 (1988)].
54. A.A. Golubov, E.P. Houwman, J.G. Gijsbertsen, V.M. Krasnov, J. Flokstra, H. Rogalla, and M.Yu. Kupriyanov, *Phys. Rev. B* **51**, 1073 (1995).
55. Ya.V. Fominov and M.V. Feigel'man, *Phys. Rev. B* **63**, 094518 (2001).
56. C.W.J. Beenakker, *Rev. Mod. Phys.* **69**, 731 (1997).
57. W. Belzig, F.K. Wilhelm, C. Bruder, G. Schön, and A.D. Zaikin, *Superlattices Microstruct.* **25**, 1251 (1999).
58. A. Brinkman, A.A. Golubov, and M.Yu. Kupriyanov, *Phys. Rev. B* **69**, 214407 (2004).
59. K.D. Usadel, *Phys. Rev. Lett.* **25**, 507 (1970).
60. A.V. Zaitsev, *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **86**, 1742 (1984) [*Sov. Phys. JETP* **59**, 1015 (1984)].
61. M.Yu. Kupriyanov, and V.F. Lukichev, *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **94**, 139 (1988) [*Sov. Phys. JETP* **67**, 1163 (1988)].
62. A.E. Koshelev and V. Stanev, *Europhys. Lett.* **96**, 27014 (2011).
63. T.K. Ng and N. Nagaosa, *Europhys. Lett.* **87**, 17003 (2009).
64. A.E. Koshelev, *Phys. Rev. B* **86**, 214502 (2012).
65. A. Buzdin and A.E. Koshelev, *Phys. Rev. B* **67**, 220504(R) (2003).
66. V.G. Stanev and A.E. Koshelev, *Phys. Rev. B* **86**, 174515 (2012).
67. E. Berg, N.H. Lindner, and T. Pereg-Barnea, *Phys. Rev. Lett.* **106**, 147003 (2011).
68. R. Rodríguez-Mota, E. Berg, and T. Pereg-Barnea, *Phys. Rev. B* **93**, 214507 (2016).
69. M.A.N. Araújo and P.D. Sacramento, *Phys. Rev. B* **79**, 174529 (2009).
70. Angelina V. Burmistrova, Igor A. Devyatov, Alexander A. Golubov, Keiji Yada, and Yukio Tanaka, *J. Phys. Soc. Jpn.* **82**, 034716 (2013).
71. F. Romeo and R. Citro, *Phys. Rev. B* **91**, 035427 (2015).
72. Yu.G. Naidyuk, O.E. Kvitnitskaya, S. Aswartham, G. Fuchs, K. Nenkov, and S. Wurmeh, *Phys. Rev. B* **89**, 104512 (2014).
73. Yu.G. Naidyuk, O.E. Kvitnitskaya, N.V. Gamayunova, L. Boeri, S. Aswartham, S. Wurmeh, B. Büchner, D.V. Efremov, G. Fuchs, S.-L. Drechsler, *Phys. Rev. B* **90**, 094505 (2014).
74. V.V. Fisun, O.P. Balkashin, O.E. Kvitnitskaya, I.A. Korovkin, N.V. Gamayunova, S. Aswartham, S. Wurmeh, and Yu.G. Naidyuk, *Fiz. Nizk. Temp.* **40**, 1175 (2014) [*Low Temp. Phys.* **40**, 919 (2014)].

75. Yu.G. Naidyuk, N.V. Gamayunova, O.E. Kvitnitskaya, G. Fuchs, D.A. Chareev, and A.N. Vasiliev, *Fiz. Nizk. Temp.* **42**, 31 (2016) [*Low Temp. Phys.* **42**, 31 (2016)].
76. Yu.G. Naidyuk, G. Fuchs, D.A. Chareev, and A.N. Vasiliev, *Phys. Rev. B* **93**, 144515 (2016).
77. B.D. Josephson, *Phys. Lett.* **1**, 251 (1962).
78. B. D. Josephson, *Rev. Mod. Phys.* **46**, 251 (1974).
79. P.W. Anderson and J.M. Rowell, *Phys. Rev. Lett.* **10**, 230 (1963).
80. S. Shapiro, *Phys. Rev. Lett.* **11**, 80 (1963).
81. В.К. Янсон, В.М. Свистунов, И.М. Дмитренко, *ЖЕТФ* **48**, 976 (1965).
82. A.J. Leggett, *Progr. Theor. Phys.* **36**, 901 (1966).
83. A.A. Golubov, M. Yu. Kupriyanov, and E. Il'ichev, *Rev. Mod. Phys.* **76**, 411 (2004).
84. A. Brinkman, A.A. Golubov, H. Rogalla, O.V. Dolgov, J. Kortus, Y. Kong, O. Jepsen, and O.K. Andersen, *Phys. Rev. B* **65**, 180517(R) (2002).
85. Yukihiro Ota, Noriyuki Nakai, Hiroki Nakamura, Masahiko Machida, Daisuke Inotani, Yoji Ohashi, Tomio Koyama, and Hideki Matsumoto, *Phys. Rev. B* **81**, 214511 (2010).
86. D.F. Agterberg, E. Demler, and B. Janko, *Phys. Rev. B* **66**, 214507 (2002).
87. Iver Bakken Sperstad, Jacob Linder, and Asle Sudbø, *Phys. Rev. B* **80**, 144507 (2009).
88. Wang Da, Lu Hong-Yan, Wang Qiang-Hua, *Chin. Phys. Lett.* **30**, 077404 (2013).
89. A.V. Burmistrova and I.A. Devyatov, *Europhys. Lett.* **107**, 67006 (2014).
90. A.V. Burmistrova, I.A. Devyatov, Alexander A. Golubov, Keiji Yada, Yukio Tanaka, M. Tortello, R.S. Gonnelli, V.A. Stepanov, Xiixin Ding, Hai-Hu Wen, and L.H. Greene, *Phys. Rev. B* **91**, 214501 (2015).
91. Andreas Moor, Anatoly F. Volkov, and Konstantin B. Efetov, *Phys. Rev. B* **87**, 100504(R) (2013).
92. Jacob Linder, Iver B. Sperstad, and Asle Sudbø, *Phys. Rev. B* **80**, 020503(R) (2009).
93. S. Apostolov and A. Levchenko, *Phys. Rev. B* **86**, 224501 (2012).
94. C. Nappi, S. De Nicola, M. Adamo, and E. Sarnelli, *Europhys. Lett.* **102**, 47007 (2013).
95. C. Nappi, F. Romeo, E. Sarnelli, and R. Citro, *Phys. Rev. B* **92**, 224503 (2015).
96. Shi-Zeng Lin, *Phys. Rev. B* **86**, 014510 (2012).
97. Yukihiro Ota, Masahiko Machida, and Tomio Koyama, *Phys. Rev. B* **82**, 140509(R) (2010).
98. Y. Ota, M. Machida, T. Koyama, and H. Matsumoto, *Physica C: Superconductivity* **470**, 1137 (2010).
99. Yukihiro Ota, Masahiko Machida, Tomio Koyama, and Hideki Matsumoto, *Phys. Rev. B* **81**, 014502 (2010).
100. Ju H. Kim, Bal-Ram Ghimire, and Hao-Yu Tsai, *Phys. Rev. B* **85**, 134511 (2012).
101. Yu.V. Sharvin, *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **48**, 984 [*Sov. Phys. JETP* **21**, 655 (1965)].
102. I.O. Kulik, and A.N. Omelyanchuk, *Pis'ma Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **21**, 216 [*JETP Lett.* **21**, 96 (1975)].
103. L.G. Aslamazov, and A.I. Larkin, *Pis'ma Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **9**, 150 (1969) [*JETP Lett.* **9**, 87 (1969)].
104. A.A. Zubkov, M.Yu. Kupriyanov, and V.K. Semenov, *Fiz. Nizk. Temp.* **7**, 1365 (1981) [*Sov. J. Low Temp. Phys.* **7**, 661 (1981)].
105. I.O. Kulik, and A.N. Omelyanchuk, *Fiz. Nizk. Temp.* **3**, 945 (1977) [*Sov. J. Low Temp. Phys.* **3**, 459 (1977)].
106. W. Haberkorn, H. Knauer, and J. Richter, *Phys. Status Solidi A* **47**, K161 (1978).
107. A.V. Zaitsev, *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **86**, 1742 (1984) [*Sov. Phys. JETP* **59**, 1015 (1984)].
108. Y.S. Yerin and A.N. Omelyanchouk, *Fiz. Nizk. Temp.* **33**, 538 (2007) [*Low Temp. Phys.* **33**, 401 (2007)].
109. Y.S. Yerin, S.V. Kuplevakhskii, and A.N. Omelyanchuk, *Fiz. Nizk. Temp.* **34**, 1131 (2008) [*Low Temp. Phys.* **34**, 891 (2008)].
110. A.N. Omelyanchouk and Y.S. Yerin, *Physical Properties of Nanosystems. NATO Science for Peace and Security Series B: Physics and Biophysics*, pp. 111–119 Dordrecht (2009).
111. Y.S. Yerin and A.N. Omelyanchouk, *Fiz. Nizk. Temp.* **36**, 1204 (2010) [*Low Temp. Phys.* **36**, 969 (2010)].
112. Zhao Huang and Xiao Hu, *Appl. Phys. Lett.* **104**, 162602 (2014).
113. Y.S. Yerin and A.N. Omelyanchouk, *Fiz. Nizk. Temp.* **40**, 1213 (2014) [*Low Temp. Phys.* **40**, 943 (2014)].
114. Y.S. Yerin, A.S. Kiyko, A.N. Omelyanchouk, and E. Il'ichev, *Fiz. Nizk. Temp.* **41**, 1133 (2015) [*Low Temp. Phys.* **41**, 885 (2015)].
115. Xiao Hu and Zhi Wang, *Phys. Rev. B* **85**, 064516 (2012).
116. А.Н. Омелянчук, Е.В. Ильичев, С.Н. Шевченко, *Квантовые явления в джозефсоновских кубитах*, Наукова думка, Киев (2013).
117. D.A. Wollman, D.J. Van Harlingen, W.C. Lee, D.M. Ginsberg, and A.J. Leggett, *Phys. Rev. Lett.* **71**, 2134 (1993).
118. P.V. Komissinski, E. Il'ichev, G.A. Ovsyannikov, S.A. Kovtonyuk, M. Grajcar, R. Hlubina, Z. Ivanov, Y. Tanaka, N. Yoshida, and S. Kashiwaya, *Europhys. Lett.* **57**, 585 (2002).
119. Y.S. Yerin, A.N. Omelyanchouk, E. Il'ichev, *Supercond. Sci. Technol.* **28**, 095006 (2015).
120. Y. Zhang, D. Kinion, J. Chen, J. Clarke, D.G. Hinks, and G.W. Crabtree, *Appl. Phys. Lett.* **79**, 3995 (2001).
121. D. Mijatovic, A. Brinkman, I. Oomen, G. Rijnders, H. Hilgenkamp, H. Rogalla, and D.H.A. Blank, *Appl. Phys. Lett.* **80**, 2141 (2002).
122. R. Gonnelli, D. Daghero, G. Ummerino, V. Stepanov, J. Jun, S. Kazakov, and J. Karpinski, *Phys. Rev. Lett.* **89**, 247004 (2002).
123. O.V. Dolgov, R.S. Gonnelli, G.A. Ummerino, A.A. Golubov, S.V. Shulga, and J. Kortus, *Phys. Rev. B* **68**, 132503 (2003).
124. I. Yanson, V. Fisun, N. Bobrov, Yu. Naidyuk, W. Kang, Eun-Mi Choi, Hyun-Jung Kim, and Sung-Ik Lee, *Phys. Rev. B* **67**, 024517 (2003).
125. A. Brinkman, D. Mijatovic, H. Hilgenkamp, G. Rijnders, I. Oomen, D. Veldhuis, F. Roesthuis, H. Rogalla, and D.H.A. Blank, *Supercond. Sci. Technol.* **16**, 246 (2003).

126. J.I. Kye, H.N. Lee, J.D. Park, S.H. Moon, and B. Oh, *IEEE Trans. Appl. Supercond.* **13**, 1075 (2003).
127. P Szab, P. Samuely, J. Kacmarcik, A.G.M. Jansen, T. Klein, J. Marcus, and C. Marcenat, *Supercond. Sci. Technol.* **16**, 162 (2003).
128. Z. Hořanová, P. Szabó, P. Samuely, R. Wilke, S. Bud'ko, and P. Canfield, *Phys. Rev. B* **70**, 064520 (2004).
129. , and T. Klein, *Physica C: Superconductivity* **404**, 460 (2004).
130. R.S. Gonnelli, D. Daghero, G.A. Ummarino, Valeria Dellarocca, A. Calzolari, V.A. Stepanov, J. Jun, S.M. Kazakov, and J. Karpinski, *Physica C: Superconductivity* **408–410**, 796 (2004).
131. R.S. Gonnelli, D. Daghero, A. Calzolari, G.A. Ummarino, V. Dellarocca, V.A. Stepanov, S.M. Kazakov, J. Karpinski, C. Portesi, E. Monticone, V. Ferrando, and C. Ferdeghini, *Supercond. Sci. Technol.* **17**, S93 (2004).
132. R. Gonnelli, D. Daghero, A. Calzolari, G. Ummarino, Valeria Dellarocca, V. Stepanov, S. Kazakov, N. Zhigadlo, and J. Karpinski, *Phys. Rev. B* **71**, 060503 (2005).
133. H. Shimakage, K. Tsujimoto, Z. Wang, and M. Tonouchi, *Appl. Phys. Lett.* **86**, 072512 (2005); K. Ueda, S. Saito, K. Semba, and T. Makimoto, *Appl. Phys. Lett.* **86**, 172502 (2005).
134. Yu.G. Naidyuk, O.E. Kvitnitskaya, I.K. Yanson, S. Lee, and S. Tajima, *Solid State Commun.* **133**, 363 (2005).
135. T.H. Kim and J.S. Moodera, *J. Appl. Phys.* **100**, 113904 (2006).
136. A. Brinkman, S.H.W. van der Ploeg, A.A. Golubov, H. Rogalla, T.H. Kim, and J.S. Moodera, *J. Phys. Chem. Solids* **67**, 407 (2006).
137. R.S. Gonnelli, D. Daghero, G.A. Ummarino, A. Calzolari, Valeria Dellarocca, V.A. Stepanov, S.M. Kazakov, J. Jun, and J. Karpinski, *J. Phys. Chem. Solids* **67**, 360 (2006).
138. R. Gonnelli, D. Daghero, G. Ummarino, A. Calzolari, M. Tortello, V. Stepanov, N. Zhigadlo, K. Rogacki, J. Karpinski, F. Bernardini, and S. Massidda, *Phys. Rev. Lett.* **97**, 037001 (2006).
139. R.S. Gonnelli, D. Daghero, A. Calzolari, G.A. Ummarino, M. Tortello, V.A. Stepanov, N.D. Zhigadlo, K. Rogacki, J. Karpinski, C. Portesi, E. Monticone, D. Mijatovic, D. Veldhuis, and A. Brinkman, *Physica C: Superconductivity* **435**, 59 (2006).
140. P. Szabó, P. Samuely, Z. Pribulová, M. Angst, S. Bud'ko, P. Canfield, and J. Marcus, *Phys. Rev. B* **75**, 144507 (2007).
141. B. Soodchomshom, R. Hoonsawat, and I-Ming Tang, *Physica C: Superconductivity* **455**, 33 (2007).
142. A. Brinkman and J.M. Rowell, *Physica C: Superconductivity* **456**, 188 (2007).
143. R.S. Gonnelli, D. Daghero, G.A. Ummarino, M. Tortello, D. Delaude, V.A. Stepanov, and J. Karpinski, *Physica C: Superconductivity* **456**, 134 (2007).
144. Poon Yingpratanporn, Rassmidara Hoonsawat, and I-Ming Tang, *Physica C: Superconductivity* **466**, 142 (2007).
145. K. Chen, Y. Cui, Q. Li, X.X. Xi, S.A. Cybart, R.C. Dynes, X. Weng, E.C. Dickey, and J.M. Redwing, *Appl. Phys. Lett.* **88**, 222511 (2006).
146. Ke Chen, Y. Cui, Qi Li, C.G. Zhuang, Zi-Kui Liu, and X.X. Xi, *Appl. Phys. Lett.* **93**, 012502 (2008).
147. Huang Yan, Wang Yong-Lei, Shan Lei, Jia Ying, Yang Huan, Wen Hai-Hu, Zhuang Cheng-Gang, Li Qi, Cui Yi, and Xi Xiao-Xing, *Chinese Phys. Lett.* **25**, 2228 (2008).
148. D. Daghero, Debora Delaude, A. Calzolari, M. Tortello, G.A. Ummarino, R.S. Gonnelli, V.A. Stepanov, N.D. Zhigadlo, S. Katrych, and J. Karpinski, *J. Phys.: Condens. Matter* **20**, 085225 (2008).
149. Ke Chen, Qi Li, and Xiaoxing Xi, *IEEE Trans. Appl. Supercond.* **19**, 261 (2009).
150. B. Soodchomshom, I-Ming Tang, and R. Hoonsawat, *Solid State Commun.* **149**, 1012 (2009).
151. Ke Chen, C.G. Zhuang, Qi Li, Y. Zhu, P.M. Voyles, X. Weng, J.M. Redwing, R.K. Singh, A.W. Kleinsasser, and X.X. Xi, *Appl. Phys. Lett.* **96**, 042506 (2010).
152. M.V. Costache and J.S. Moodera, *Appl. Phys. Lett.* **96**, 082508 (2010).
153. Ke Chen, C.G. Zhuang, Qi Li, X. Weng, J.M. Redwing, Y. Zhu, P.M. Voyles, and X.X. Xi, *IEEE Trans. Appl. Supercond.* **21**, 115 (2011).
154. S.A. Kuzmichev, T.E. Shanygina, S.N. Tchesnokov, and S.I. Krasnosvobodtsev, *Solid State Commun.* **152**, 119 (2012).
155. Steven Carabello, Joseph G Lambert, Jerome Mlack, Wenqing Dai, Qi Li, Ke Chen, Daniel Cunnane, C.G. Zhuang, X.X. Xi, and Roberto C. Ramos, *Supercond. Sci. Technol.* **28**, 055015 (2015).
156. Xiaohang Zhang, Yoon Seok Oh, Yong Liu, Liqin Yan, Kee Hoon Kim, Richard L. Greene, and Ichiro Takeuchi, *Phys. Rev. Lett.* **102**, 147002 (2009).
157. P. Seidel, *Supercond. Sci. Technol.* **24**, 043001 (2011).
158. H. Hiramatsu, T. Katase, Y. Ishimaru, A. Tsukamoto, T. Kamiya, K. Tanabe, and H. Hosono, *Mater. Sci. Eng.* **177**, 515 (2012).
159. S. Döring, S. Schmidt, F. Schmidl, V. Tympel, S. Haindl, F. Kurth, K. Iida, I. Mönch, B. Holzapfel, and P. Seidel, *Supercond. Sci. Technol.* **25**, 084020 (2012).
160. X. Zhang, B. Lee, S. Khim, K.H. Kim, R.L. Greene, and I. Takeuchi, *Phys. Rev. B* **85**, 094521 (2012).
161. S. Döring, S. Schmidt, F. Schmidl, V. Tympel, S. Haindl, F. Kurth, K. Iida, I. Mönch, B. Holzapfel, and P. Seidel, *Physica C* **478**, 15 (2012).
162. S. Schmidt, S. Döring, F. Schmidl, V. Tympel, S. Haindl, K. Iida, F. Kurth, B. Holzapfel, and P. Seidel, *IEEE Trans. Appl. Supercond.* **23**, 7300104 (2013).
163. Sebastian Döring, David Reifert, Noor Hasan, Stefan Schmidt, Frank Schmid, Volker Tympe, Fritz Kurth, Kazumasa Iida, Bernhard Holzapfel, Thomas Wolf, Paul Seidel, *Phys. Status Solidi B* **252**, 2858 (2015).
164. Sebastian Döring, Stefan Schmidt, David Reifert, Martin Feltz, Manuel Monecke, Noor Hasan, Volker Tympel, Frank Schmid, Jan Engelmann, Fritz Kurth, Kazumasa Iida, Ingolf Mönch, Bernhard Holzapfel, Paul Seidel, *J. Supercond. Nov. Magn.* **28**, 1117 (2015).
165. Ya Huang, Xian-Jing Zhou, Zhao-Shun Gao, Hao Wu, Ge He, Jie Yuan, Kui Jin, Paulo J Pereira, Min Ji, De-Yue An,

- Jun Li, Takeshi Hatano, Biao-Bing Jin, Hua-Bing Wang and Pei-Heng Wu, *Supercond. Sci. Technol.* **30**, 015006 (2017).
166. A. Gurevich, *Phys. Rev. B* **67**, 184515 (2003).
167. Y. Yerin, S.-L. Drechsler, G. Fuchs, *J. Low Temp. Phys.* **173**, 247 (2013).
168. M.E. Zhitomirsky and V.-H. Dao, *Phys. Rev. B* **69**, 054508 (2004).
169. M. Silaev and E. Babaev, *Phys. Rev. B* **85**, 134514 (2012).
170. A. Gurevich, *Physica C: Superconductivity* **456**, 160 (2007).
171. V. Stanev and A.E. Koshelev, *Phys. Rev. B* **89**, 100505(R) (2014).
172. Y.Y. Tanaka, I. Hase, and K. Yamaji, *J. Phys. Soc. Jpn.* **81**, 024712 (2012).
173. R.G. Dias and A.M. Marques, *Supercond. Sci. Technol.* **24**, 085009 (2011).
174. V. Stanev and Z. Tešanović, *Phys. Rev. B* **81**, 134522 (2010).
175. V. Stanev, *Phys. Rev. B* **85**, 174520 (2012).
176. S.-Z. Lin and X. Hu, *Phys. Rev. Lett.* **108**, 177005 (2012).
177. M. Nitta, M. Eto, T. Fujimori, and K. Ohashi, *J. Phys. Soc. Jpn.* **81**, 084711 (2012).
178. V. Stanev, *Supercond. Sci. Technol.* **28**, 014006 (2015).

Proximity effects and Josephson effect in the microstructures on the base of multiband superconductors
(Review Article)

Y. Yerin and A.N. Omelyanchouk

Appearing in 50-ies of XX Century the multiband superconductivity was considered for a long time as an

approximate model in the form of generalization of the BCS theory on the case of two bands for more precise quantitative description of properties and characteristics of the superconductors such as: cuprates, heavy fermions compounds, metal boron carbides, fullerides, strontium ruthenate etc. due to their complex piecewise-continuous Fermi surfaces. However the discovery of multiband structure of the superconducting state in magnesium diborid in 2001 and in iron oxypnictides and halides in 2008 led to the appearance of many papers in which effects and different dependences well known for usual one-band s-wave superconductors were investigated anew. The main purpose of these investigations consisted in revealing the symmetry type of the order parameter to obtain important information about mechanism of Cooper pairing in these superconductors. One of the most effective methods to obtain information about symmetry properties of the order parameter in the multiband superconductors is phase-sensitive method. This review summarizes results of theoretical and experimental investigations of the proximity effect and Josephson effect in the systems based on multiband superconductors contacted with normal metals, insulators and other superconductors.

PACS: **74.45.+c** Proximity effects; Andreev reflection; SN and SNS junctions;
74.50.+r Tunneling phenomena; Josephson effects.

Keywords: multiband superconductor, BCS, order parameter symmetry.