

# Электрон-дырочная сверхпроводимость

(Обзор)

Д.В. Филь

*Институт монокристаллов НАН Украины, пр. Науки, 60, г. Харьков, 61072, Украина*

*Харьковский национальный университет имени В.Н. Каразина, пл. Свободы, 4, г. Харьков, 61022, Украина*

E-mail: fil@isc.kharkov.ua

С.И. Шевченко

*Физико-технический институт низких температур им. Б.И. Веркина НАН Украины*

*пр. Науки, 47, г. Харьков, 61103, Украина*

Статья поступила в редакцию 30 марта 2018 г., опубликована онлайн 26 июля 2018 г.

Настоящий обзор посвящен теории электрон-дырочной сверхтекучести в двухслойных системах. Речь идет о состоянии, в котором электроны и дырки из соседних слоев образуют связанные пары и бездиссипативный перенос заряда обусловлен движением пар как целого. Наличие потока связанных пар эквивалентно протеканию в проводящих слоях равных по модулю и противоположно направленных электрических токов. Поэтому такую сверхтекучесть можно рассматривать как своеобразную сверхпроводимость, которую часто называют противотоковой (counterflow) сверхпроводимостью. Это явление было предсказано около 40 лет назад, но изучение проблемы электрон-дырочной сверхпроводимости в двухслойных системах интенсивно продолжается до сих пор. В обзоре представлено развернутое описание теоретических представлений и подходов к проблеме электрон-дырочной сверхпроводимости.

Ключевые слова: электрон-дырочное спаривание, экситонная сверхтекучесть, двухслойные системы.

## Содержание

|   |      |
|---|------|
| 1. Введение .....   | 1111 |
| 2. БКШ спаривание электронов и дырок и электрон-дырочная сверхпроводимость.....                             | 1114 |
| 3. Сверхпроводимость разреженного газа электрон-дырочных пар .....  | 1119 |
| 4. Аномальный диамагнетизм и индуцирование вихрей скрещенными электрическим и магнитным полями .....        | 1124 |
| 5. Двухслойные квантовые холловские системы с межслоевой спонтанной фазовой когерентностью .....            | 1128 |
| 6. Заряженные вихри и их влияние на транспортные свойства двухслойных квантовых холловских систем.....      | 1137 |
| 7. Стационарный и нестационарный эффекты Джозефсона в системах с электрон-дырочной сверхпроводимостью ..... | 1142 |
| 8. Электрон-дырочная сверхпроводимость в графеновых системах и топологических изоляторах .....              | 1150 |
| 9. Заключение .....   | 1156 |
| Литература.....   | 1157 |

## 1. Введение

В XX веке были открыты два замечательных и таинственных явления в физике конденсированных сред — сверхпроводимость и сверхтекучесть. Эти открытия были совершенно неожиданными как с точки зрения здравого смысла, так и с точки зрения существовавших

в то время теоретических представлений. Потребовалось много лет, чтобы природа этих явлений была понята и описана в рамках микроскопической теории.

Явления сверхпроводимости и сверхтекучести удивительны не только отсутствием сопротивления. Они сопровождаются рядом ярких эффектов. В сверхтекучих системах это, в частности, эффект фонтанирования

и второй звук, в сверхпроводниках — эффект Мейснера и эффект Джозефсона. Кроме того, как в сверхпроводниках, так и в сверхтекучих системах могут возникать квантовые вихри. В сверхтекучих системах это вихри Онзагера–Фейнмана, а в сверхпроводниках — вихри Абрикосова.

Сверхпроводимость была открыта в 1911 году Камерлинг-Оннесом, который установил, что при температуре ниже  $T_c = 4,15$  К электрическое сопротивление ртути скачком падает до нуля. Открытию сверхпроводимости предшествовала разработка основ получения жидкого гелия, который Камерлинг-Оннес рассматривал больше как инструмент, а не как объект исследования. Наверное, это и привело к тому, что явление сверхтекучести, родственное сверхпроводимости, но возникающее в самом жидком гелии, в этих исследованиях открыто не было.

Физический словарь определяет сверхтекучесть как «состояние квантовой жидкости, при котором она протекает через узкие щели и капилляры без трения». Сверхтекучесть жидкого  $^4\text{He}$  (изотоп гелия, который является бозоном) была открыта независимо Капицей [1] и Алленом и Мисенером [2] в 1938 году. Так как статья Капицы поступила в журнал раньше, приоритет открытия отдается Капице. Более того, именно Капица в работе [1] предложил называть наблюдаемое состояние гелия сверхтекучим.

Теория сверхтекучести прошла большой путь. История этого пути начинается (как всегда, в физике XX столетия) с гениальной по своей простоте идеи Эйнштейна о бозе-конденсации в идеальном газе [3]. Первая попытка объяснить сверхтекучесть была предпринята Ф. Лондоном [4], который рассматривал переход в сверхтекучее состояние как определенного вида бозе-конденсацию. Следующий важный шаг — двухжидкостная модель сверхтекучей фазы, предложенная Тиссой [5]. Тисса предсказал существование в сверхтекучем гелии второго звука, но скорость этого звука была вычислена неправильно. Ошибка связана с тем, что сверхтекучая компонента была идентифицирована с бозе-конденсатом, а нормальная — с надконденсатными частицами. В действительности, как показал Ландау в своей знаменитой теории сверхтекучести  $^4\text{He}$  [6], нормальная компонента связана с квазичастицами — фононами и ротонами. Ландау построил феноменологическую теорию сверхтекучести и сформулировал уравнения двухжидкостной гидродинамики, дающие полное макроскопическое описание поведения  $\text{He II}$  (сверхтекучей фазы  $^4\text{He}$ ). Боголюбовым [7] была построена микроскопическая теория сверхтекучести слабо неидеального бозе-газа. Теория Боголюбова стала первым примером последовательного микроскопического вывода спектра квантовых жидкостей и описания динамики системы в терминах квазичастиц.

В отличие от теории сверхтекучести бозе-систем, построение микроскопической теории сверхпроводимости потребовало существенно большего времени — порядка 50 лет. Долгое время не хватало ключевой физической идеи, а именно, идеи о спаривании электронов при наличии притяжения между ними, высказанной Купером в 1956 году [8]. В этой идее есть две необычные составляющие: источник притяжения и возможность образования связанного состояния при сколь угодно слабом притяжении. На основании изотопического эффекта (влияние изотопического состава на температуру сверхпроводящего перехода) стало понятно, что притяжение обусловлено фононами. Возможность образования связанного состояния, несмотря на слабость притяжения, определяется тем, что спариваются электроны на поверхности Ферми, и задача из трехмерной превращается в двумерную. Полная микроскопическая теория сверхпроводимости была построена Бардином, Купером и Шриффером (БКШ) [9], в работе которых была получена знаменитая волновая функция БКШ.

С точки зрения практических приложений крайне важной характеристикой является температура перехода в сверхпроводящее состояние (обычно ее называют критической температурой). Из теории БКШ следует, что критическая температура определяется величиной потенциала спаривания. В обычных сверхпроводниках спаривание электронов происходит за счет обмена виртуальными фононами. К спариванию может приводить обмен и другими квазичастицами, например плазмонами. Такие возможности в течение ряда лет интенсивно изучались теоретически [10], однако это не привело к созданию новых сверхпроводников с высокой критической температурой. Идея о возможности существенного повышения этой температуры за счет необычного механизма спаривания все же сыграла важную роль в открытии в 1986 г. нового класса сверхпроводников, названных высокотемпературными [11]. Изучение высокотемпературных сверхпроводников интенсивно продолжается и в настоящее время, как экспериментально, так и теоретически, но механизм, ответственный за спаривание электронов в этих сверхпроводниках, до сих пор остается дискуссионным.

В теории БКШ рассматривается проблема спаривания одинаковых фермионов. Однако в физике конденсированного состояния уже давно обсуждается задача об образовании связанного состояния между электроном и дыркой. Такую связанную электрон-дырочную пару называют экситоном. Различают экситоны Френкеля [12] (именно Френкель ввел представление об экситонах) и экситоны Ванье [13]. Экситоны Френкеля являются экситонами малого радиуса и представляют собой внутримолекулярные электронные возбуждения, которые распространяются по кристаллу не диффузионным, а волновым образом. Экситоны Ванье представляют собой связанную пару электрона из зоны

проводимости и дырки (незаполненного состояния) из валентной зоны. Размер такого экситона порядка эффективного боровского радиуса  $a_0 = \hbar^2 \varepsilon / m e^2$ , где  $\varepsilon$  — диэлектрическая проницаемость среды и  $m$  — приведенная эффективная масса для электрон-дырочной пары. Благодаря большой величине  $\varepsilon$  и малой эффективной массе размер экситона Ванье обычно существенно превышает межатомное расстояние. Энергия связи экситона порядка эффективного Ридберга  $Ry^* = (m / m_0 \varepsilon^2) Ry$  ( $m_0$  — масса свободного электрона). Энергия связи может достигать  $10^3$  К.

Экситоны Френкеля впервые наблюдались в работах Приходько [14] и Мак-Клюра [15]. Экспериментальное доказательство существования экситонов Ванье впервые получено в работах Гросса с сотрудниками [16], а в работах Томаса и Хопфельда [17] впервые наблюдалось движение таких экситонов.

Так как образующие экситон частицы (электрон и дырка) являются фермионами, то экситоны представляют собой бозоны, что делает возможным их бозе-конденсацию. Теоретически эту возможность впервые проанализировали Москаленко [18] и Блатт, Боер, Брандт [19] для случая, когда размер электрон-дырочных пар мал по сравнению со средним расстоянием между парами. Задача об электрон-дырочных куперовских парах (противоположный предельный случай) впервые рассмотрена в работе Келдыша и Копаева [20].

Проводя аналогию со сверхтекучим гелием и сверхпроводниками, можно ожидать, что бозе-конденсация экситонов проявится в переходе экситонного газа в сверхтекучее состояние. Поскольку экситоны не переносят ни заряд, ни массу, то возникает вопрос, в чем проявится их сверхтекучесть. В работе Кона и Шерингтона [21] отсутствие переноса заряда и массы было использовано в качестве аргумента, говорящего о невозможности экситонной сверхтекучести. Келдыш, анализируя аргументы Кона и Шерингтона, нашел их неубедительными [22]. Если, следуя [21], понимать сверхтекучесть только как такой перенос, то экситонная сверхтекучесть отсутствует по определению. Однако экситоны переносят энергию, и сверхтекучесть экситонов приведет к переносу энергии без диссипации.

В работах [18–20] речь шла об оптически возбужденных экситонах в системах, в которых дно зоны проводимости расположено выше потолка валентной зоны. В этом случае электроны, переходящие из валентной зоны в зону проводимости, имеют конечное время жизни, обратно пропорциональное амплитуде межзонных переходов. Поэтому говорить о сверхтекучести таких экситонов можно только, понимая ее как некое метастабильное состояние, которое в строгом смысле слова не является сверхтекучим.

Время жизни экситонов можно существенно увеличить и даже сделать бесконечным в двухслойных системах с разным типом проводимости слоев. Спарива-

ние пространственно разделенных электронов и дырок в таких системах может привести к истинной сверхтекучести пар. Возможность такой сверхтекучести была предсказана в работах [23–25]. Речь шла о системах типа сэндвич, в которых электронный и дырочный проводящие слои разделены тонкой диэлектрической прослойкой. Системы со спариванием пространственно разделенных носителей имеют ряд существенных преимуществ по сравнению с системами, где электроны и дырки не разделены в пространстве. Во-первых, в таких системах межзонные переходы связаны с туннелированием между слоями. Амплитуда туннелирования экспоненциально зависит от толщины диэлектрической прослойки  $d$ , и при  $d \sim 10^{-6}$  см (в случае гетероструктур GaAs это отвечает  $d \sim a_0$ ) ее величина пренебрежимо мала. В то же время энергия связи пар при  $d < a_0$  остается практически неизменной, а при больших  $d$  спадает степенным образом. Во-вторых, электрон-дырочные пары в двухслойных системах представляют собой диполи, которые отталкиваются друг от друга, что предотвращает слипание пар в капли. И наконец, пространственное разделение компонентов пары проявляется в том, что при движении пар в проводящих слоях возникают равные по модулю и противоположно направленные электрические токи, доступные для регистрации. Поэтому сверхтекучесть пар с пространственно разделенными компонентами можно рассматривать как своеобразную сверхпроводимость, которую часто называют противотоковой (counterflow) электрон-дырочной сверхпроводимостью. Имея в виду электрон-дырочную сверхпроводимость, мы будем иногда использовать термины «сверхтекучесть электрон-дырочных пар» и «сверхтекучий переход».

Работы [23–25] опубликованы более 40 лет назад. За прошедшие годы высказанная в них идея получила существенное развитие. В начале 90-х годов прошлого века было показано, что электрон-дырочное спаривание может иметь место не только в двухслойных  $n$ - $p$ -системах, но и в системах, в которых оба слоя имеют одинаковый тип проводимости, если последние помещены в сильное нормальное к слоям магнитное поле. Дополнительно требуется, чтобы суммарный по слоям фактор заполнения нижнего уровня Ландау был равен единице. При таком факторе заполнения число электронов в одном слое совпадает с числом незаполненных состояний (дырок) на нижнем уровне Ландау в другом слое. Такие системы интенсивно изучались не только теоретически, но и экспериментально, и были получены веские экспериментальные аргументы в пользу спаривания пространственно разделенных носителей.

Новый всплеск интереса к электрон-дырочному спариванию связан с экспериментальным открытием графена и последующим развитием технологии синтеза двумерных кристаллов. Электрон-дырочное спари-

вание в этих системах стало предметом большого числа теоретических и экспериментальных исследований. Транспортные свойства двухслойных графеновых систем, в частности аномальное межслоевое увлечение, рассматриваются как экспериментальное подтверждение спаривания.

Таким образом, сверхтекучесть в системах со спариванием пространственно разделенных носителей остается одной из актуальных проблем физики конденсированного состояния. Одна из причин такого интереса связана с принципиальной возможностью получения сверхтекучести (и сверхпроводимости) при достаточно высоких температурах (в частности, для графеновых систем теория предсказывает критические температуры вплоть до комнатной). Однако явление это весьма деликатное. Например, температура сверхтекучего перехода уменьшается как при малой, так и при большой толщине диэлектрической прослойки  $d$ . Также существенным негативным фактором является экранирование межслоевого взаимодействия. Часть вопросов, связанных с электрон-дырочной сверхпроводимостью, остается не до конца понятной и дискуссионной.

Несмотря на долгую историю изучения проблемы, существует лишь небольшое число обзоров, посвященных бозе-конденсации и сверхтекучести экситонов в двухслойных системах с пространственно разделенными носителями. Обзоры [26,27] посвящены в основном изложению результатов экспериментальных исследований электрон-дырочной сверхпроводимости в двухслойных квантовых холловских системах со спонтанной межслоевой фазовой когерентностью (термин «спонтанная межслоевая фазовая когерентность» используется применительно к квантовым холловским системам как синоним термина «экситонный конденсат»). В книге [28] проблеме электрон-дырочной сверхпроводимости посвящена одна глава, в которой рассмотрена теория транспортных свойств двухслойных квантовых холловских систем со спонтанной межслоевой фазовой когерентностью. Более развернуто этот же вопрос рассмотрен в обзоре [29]. Краткое описание исследований электрон-дырочной сверхпроводимости в двухслойных квантовых холловских системах, а также работ, посвященных двухслойным системам на основе графена, представлено в одном из разделов обзора [30]. Краткий обзор явления бозе-эйнштейновской конденсации экситонов в двухслойных системах с акцентом на возможные технические применения дан в [31]. Обзоры [32,33] посвящены бозе-эйнштейновской конденсации экситонов, возбуждаемых в двухслойных системах оптическими методами.

В настоящем обзоре мы видим свою задачу в том, чтобы дать развернутое описание теоретических представлений и подходов к проблеме электрон-дырочной сверхпроводимости и указать «окна существования» этого явления.

Раздел 2 основан на пионерских работах, в которых описана возможность противотоковой сверхпроводимости в двухслойных  $n$ - $p$ -структурах. В этом разделе рассматривается предел слабой связи, т.е. предел, которому отвечает теория БКШ. В разд. 3 рассмотрен предел сильной связи, когда система представляет собой разреженный газ электрон-дырочных пар. Раздел 4 посвящен аномальному диамагнетизму двухслойных систем со спариванием пространственно разделенных носителей, а также свойствам квантовых планарных вихрей в таких системах. В разд. 5 представлена теория электрон-дырочного спаривания в двухслойных электрон-электронных системах в квантующем магнитном поле. В разд. 6 рассмотрены особенности транспортных свойств двухслойных квантовых холловских систем с межслоевой спонтанной фазовой когерентностью, обусловленные наличием электрического заряда у планарных вихрей. В разд. 7 обсуждается влияние на электрон-дырочную сверхпроводимость межслоевого туннелирования. Рассматриваются условия реализации стационарного и нестационарного эффекта Джозефсона и описаны механизмы диссипации туннельного тока, связанные с наличием джозефсоновских и планарных вихрей. Раздел 8 посвящен описанию недавних исследований электрон-дырочного спаривания и противотоковой сверхпроводимости в двухслойных графеновых системах и топологических изоляторах.

## 2. БКШ спаривание электронов и дырок и электрон-дырочная сверхпроводимость

В пределе слабой связи теория электрон-дырочного спаривания строится по аналогии с теорией БКШ. Соответствующее рассмотрение выполнено в работах [24,25]. Хотя можно было бы ожидать, что результаты теории БКШ почти без изменений переносятся на электрон-дырочные системы, в теории электрон-дырочной сверхпроводимости имеется ряд существенных отличий. Во-первых, электроны и дырки имеют разные законы дисперсии. В случае анизотропного спектра это проявляется в неконгруэнтности поверхностей Ферми электронов и дырок, что является негативным фактором для спаривания. Во-вторых, из-за асимметрии рассеяния электронов и дырок на примесях влияние немагнитных примесей на электрон-дырочную сверхпроводимость подобно влиянию магнитных примесей на обычную сверхпроводимость. Третьим важным фактором является экранирование кулоновского взаимодействия. С одной стороны, экранирование уменьшает константу связи. С другой стороны, экранирующая способность электрон-дырочного газа существенно ослабляется при связывании электронов и дырок в пары. Поэтому при описании спаривания, вызываемого кулоновским притяжением, эффекты экранирования нужно учитывать самосогласованным образом.

В работах [24,25] рассматривалась система, состоящая из двух проводящих слоев с одинаковой плотностью носителей и разным (электронным и дырочным) типом проводимости. Предполагалось, что слои расположены параллельно друг другу и расстояние между ними достаточно для того, чтобы можно было пренебречь межслоевыми переходами носителей. Считалось, что слои помещены в однородную диэлектрическую среду с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon$ . Гамильтониан системы записывался в виде

$$H = \sum_{\mathbf{k}, \alpha=e,h} \xi_{\alpha}(\mathbf{k}) c_{\alpha,\mathbf{k}}^{\dagger} c_{\alpha,\mathbf{k}} + \frac{1}{S} \sum_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{q}} V_{eh}(\mathbf{q}) c_{e,\mathbf{k}_1+\mathbf{q}}^{\dagger} c_{h,\mathbf{k}_2-\mathbf{q}}^{\dagger} c_{h,\mathbf{k}_2} c_{e,\mathbf{k}_1}, \quad (2.1)$$

где  $\xi_{e(h)}(\mathbf{k}) = \epsilon_{e(h)}(\mathbf{k}) - \mu_{e(h)}$  — энергия электрона (дырки), отсчитанная от химического потенциала  $\mu_{e(h)}$ ,  $c_{e(h),\mathbf{k}}^{\dagger}$  и  $c_{e(h),\mathbf{k}}$  — операторы рождения и уничтожения электронов (дырок),  $V_{eh}(\mathbf{q})$  — фурье-компонента потенциала экранированного кулоновского взаимодействия между электронами и дырками,  $S$  — площадь системы. В (2.1) взаимодействие внутри электронной и дырочной подсистем учтено в перенормировке величин  $\xi_{e(h)}(\mathbf{q})$ . Гамильтониан (2.1) записан для одной спиновой компоненты в электронной подсистеме и одной спиновой компоненты (с противоположным спином) в дырочной подсистеме. Так как и в теории БКШ, считается, что спариваются носители с противоположными проекциями спина, т.е. имеет место синглетное спаривание. Здесь и ниже, для сокращения записи, спиновые индексы опущены. Полный гамильтониан представляет собой сумму по двум спиновым компонентам.

При наличии притяжения между электронами и дырками основное состояние системы будет фазово-когерентной суперпозицией электрон-дырочных пар. Фазовая когерентность означает, что произведение операторов  $c_{e,-\mathbf{k}} c_{h,\mathbf{k}}$  имеет ненулевое среднее  $b_{\mathbf{k}}$  и флуктуации относительно этого среднего будут малы. Указанное произведение можно записать в виде

$$c_{e,-\mathbf{k}} c_{h,\mathbf{k}} = b_{\mathbf{k}} + (c_{e,-\mathbf{k}} c_{h,\mathbf{k}} - b_{\mathbf{k}}) \quad (2.2)$$

и пренебречь в исходном гамильтониане величинами, квадратичными по малой разности  $c_{e,-\mathbf{k}} c_{h,\mathbf{k}} - b_{\mathbf{k}}$  [34]. В результате исходный гамильтониан заменяется эффективным гамильтонианом, квадратичным по операторам рождения и уничтожения,

$$H_{\text{eff}} = \sum_{\mathbf{k}} \left[ \xi_e(\mathbf{k}) c_{e,\mathbf{k}}^{\dagger} c_{e,\mathbf{k}} + \xi_h(\mathbf{k}) c_{h,\mathbf{k}}^{\dagger} c_{h,\mathbf{k}} - (\Delta(\mathbf{k}) c_{h,\mathbf{k}}^{\dagger} c_{e,-\mathbf{k}}^{\dagger} + \text{H.c.}) + \Delta(\mathbf{k}) b_{\mathbf{k}}^* \right] \quad (2.3)$$

где

$$\Delta(\mathbf{k}) = -\frac{1}{S} \sum_{\mathbf{k}'} V_{eh}(\mathbf{k}-\mathbf{k}') \langle c_{e,-\mathbf{k}'} c_{h,\mathbf{k}'} \rangle. \quad (2.4)$$

Как и в теории БКШ, гамильтониан (2.3) диагоналізується с помощью  $u$ - $v$ -преобразования Боголюбова

$$\begin{aligned} c_{e,\mathbf{k}} &= u_{\mathbf{k}} \alpha_{\mathbf{k}} + v_{\mathbf{k}} \beta_{-\mathbf{k}}^{\dagger}, \\ c_{h,\mathbf{k}} &= u_{\mathbf{k}} \beta_{\mathbf{k}} - v_{\mathbf{k}} \alpha_{-\mathbf{k}}^{\dagger}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Операторы  $\alpha_{\mathbf{k}}$  и  $\beta_{\mathbf{k}}$  удовлетворяют фермиевским коммутационным соотношениям. Коэффициенты  $u$  и  $v$  подчиняются уравнениям

$$u_{\mathbf{k}}^2 = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{\xi_{\mathbf{k}}}{E_{\mathbf{k}}} \right), \quad v_{\mathbf{k}}^2 = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{\xi_{\mathbf{k}}}{E_{\mathbf{k}}} \right), \quad 2u_{\mathbf{k}} v_{\mathbf{k}} = \frac{\Delta_{\mathbf{k}}}{E_{\mathbf{k}}}, \quad (2.6)$$

где  $\xi_{\mathbf{k}} = [\xi_e(\mathbf{k}) + \xi_h(\mathbf{k})]/2$  и  $E_{\mathbf{k}} = \sqrt{\xi_{\mathbf{k}}^2 + \Delta_{\mathbf{k}}^2}$ .

Преобразованный гамильтониан принимает вид

$$H = \sum_{\mathbf{k}} \left[ (E_{\mathbf{k}} + \eta_{\mathbf{k}}) \alpha_{\mathbf{k}}^{\dagger} \alpha_{\mathbf{k}} + (E_{\mathbf{k}} - \eta_{\mathbf{k}}) \beta_{\mathbf{k}}^{\dagger} \beta_{\mathbf{k}} \right], \quad (2.7)$$

где  $\eta_{\mathbf{k}} = [\xi_e(\mathbf{k}) - \xi_h(\mathbf{k})]/2$ . В выражении (2.7) опущена энергия основного состояния. Поскольку в рассматриваемой системе спариваются носители, законы дисперсии которых не совпадают, спектр элементарных возбуждений в (2.7) отличается от спектра возбуждений в сверхпроводниках.

Параметр порядка  $\Delta_{\mathbf{k}}$  выражается через термодинамическое среднее от операторов рождения электронов и дырок, что с учетом (2.5) дает уравнение самосогласования

$$\begin{aligned} \Delta_{\mathbf{k}} &= -\frac{1}{S} \sum_{\mathbf{k}'} V_{eh}(\mathbf{k}-\mathbf{k}') \frac{\Delta_{\mathbf{k}'}}{2E_{\mathbf{k}'}} \times \\ &\times \left[ 1 - N_F(E_{\mathbf{k}'} + \eta_{\mathbf{k}'}) - N_F(E_{\mathbf{k}'} - \eta_{\mathbf{k}'}) \right], \end{aligned} \quad (2.8)$$

где  $N_F(E) = [\exp(E/T) + 1]^{-1}$  — фермиевская функция распределения квазичастиц.

Такое же уравнение самосогласования возникает для второй спиновой компоненты. В результате в системе возникает два сорта электрон-дырочных пар, а именно, пары, образованные электроном со спином  $+1/2$  и дыркой со спином  $-1/2$ , и пары, образованные электроном со спином  $-1/2$  и дыркой со спином  $+1/2$ .

Несовпадение законов дисперсии электронов и дырок (неконгруэнтность поверхностей Ферми) может оказаться критическим для реализации сверхпроводимости электрон-дырочных пар — даже небольшая неконгруэнтность будет приводить к исчезновению щели в спектре. Применительно к проблеме экситонного диэлектрика этот вопрос обсуждался в [35]. Ситуация с электрон-дырочным спариванием в двухслойной системе аналогична ситуации с образованием экситонной фазы в полуметалле [35], в котором плотности элек-



тронов и дырок совпадают. Как показано в [35], при слабом взаимодействии между электронами и дырками уравнение самосогласования для параметра порядка экситонной фазы не имеет решения даже при  $T = 0$ . Другими словами, образование экситонной фазы при наличии такой неконгруэнтности носит пороговый по взаимодействию характер.

Ниже при обсуждении других факторов, влияющих на спаривание, мы ограничимся случаем изотропных законов дисперсии  $\varepsilon_{e(h)}(\mathbf{k}) = \hbar^2 k^2 / 2m_{e(h)}$ , где  $m_e$  и  $m_h$  — эффективные массы электрона и дырки.

Для нахождения экранированного потенциала кулоновского взаимодействия обычно используется приближение хаотических фаз. В пренебрежении влиянием спаривания на поляризационный оператор экранированный потенциал записывается в виде

$$V_{eh}(q) = -\frac{2\pi e^2}{\varepsilon q} \times \frac{\exp(-qd)}{1 - \frac{2\pi e^2}{\varepsilon q} (\Pi_e + \Pi_h) + \left(\frac{2\pi e^2}{\varepsilon q}\right)^2 \Pi_e \Pi_h [1 - \exp(-2qd)]}, \quad (2.9)$$

где  $\Pi_{e(h)}$  — поляризационный оператор для электронного (дырочного) слоя.

При температуре  $T = 0$  поляризационная функция для двумерного электронного газа определяется выражением [36]

$$\Pi_{e(h)} = -g_s \frac{\varepsilon}{2\pi e^2 a_{e(h)}} \left[ 1 - \theta(q - 2k_F) \sqrt{1 - \left(\frac{2k_F}{q}\right)^2} \right], \quad (2.10)$$

где  $a_{e(h)} = \hbar^2 \varepsilon / m_{e(h)} e^2$  — эффективный боровский радиус электрона-(дырки), и  $g_s = 2$  — число спиновых компонент.

В пренебрежении зависимостью параметра порядка от волнового вектора ( $\Delta_{\mathbf{k}} = \Delta$ ) уравнение самосогласования (2.8) с потенциалом (2.9) дает следующее значение параметра порядка при  $T = 0$ :

$$\Delta_0 = 2\varepsilon_0 \exp\left(-\frac{1}{\lambda}\right), \quad (2.11)$$

где  $\varepsilon_0$  — энергия обрезания, которую можно принять равной энергии Ферми электронов или дырок (меньшей из них),

$$\lambda = \frac{m}{\pi \hbar^2} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{2\pi} \left| V_{eh} \left( 2k_F \sin \frac{\varphi}{2} \right) \right| \quad (2.12)$$

— безразмерная константа связи и  $m = m_e m_h / (m_e + m_h)$  — приведенная масса. Температура спаривания  $T_c$  связана с  $\Delta_0$  соотношением

$$T_c = \frac{\gamma}{\pi} \Delta_0 \sqrt{\frac{4m}{M}}, \quad (2.13)$$

где  $M = m_e + m_h$  — масса пары,  $\gamma = e^C$  и  $C \approx 0,577$  — постоянная Эйлера. Выражение (2.13) отличается от аналогичного соотношения в теории БКШ последним множителем. При равных эффективных массах электрона и дырки этот множитель равен единице.

С учетом (2.9) и (2.10) выражение (2.12) записывается в виде

$$\lambda = \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{2\pi} \tilde{V} \left( 2 \sin \frac{\varphi}{2} \right), \quad (2.14)$$

где

$$\tilde{V}(x) = \frac{m}{M} \frac{\exp(-xk_F d)}{1 + \frac{xk_F a_0}{2} \frac{m}{M} + \frac{2}{xk_F a_0} (1 - e^{-2xk_F d})} \quad (2.15)$$

и  $a_0 = \hbar^2 \varepsilon / m e^2$  — введенный выше эффективный боровский радиус электрон-дырочной пары.

Из (2.14), (2.15) следует, что константа связи удовлетворяет условию

$$\lambda < \frac{m}{M} \leq \frac{1}{4}. \quad (2.16)$$

Значение  $\lambda$ , близкое к максимальному ( $\lambda = m/M$ ), достигается в пределе  $d/a_0 \ll 1$ . В частности, при  $d/a_0 = 0,1$  вычисление интеграла (2.14) дает критическую температуру  $T_c \approx 10^{-3} Ry^*$  в интервале параметров  $1 < k_F a_0 < 5$ , ( $Ry^* = me^4 / 2\varepsilon^2 \hbar^2$  — введенный выше эффективный Ридберг). При увеличении  $d/a_0$  экранирование возрастает и критическая температура уменьшается. При  $d/a_0 = 0,4$  критическая температура не превышает  $T_c \approx 10^{-4} Ry^*$ . Максимум достигается при  $k_F a_0 \approx 2$ , т.е. при некоторой оптимальной плотности носителей. Для гетероструктуры на основе GaAs эффективный Ридберг  $Ry^* \approx 100$  К, эффективный боровский радиус  $a_0 \approx 10$  нм, и приведенная выше оценка соответствует  $T_c \approx 10^{-2}$  К при  $d \approx 4$  нм.

Строго говоря, полученная оценка является заниженной, так как в (2.15) не учтено влияние спаривания на экранирование. Такое влияние рассматривалось в основном применительно к двухслойным графеновым системам (см. разд. 8 настоящего обзора). Можно ожидать, что в пределе слабой связи в системах с квадратичным законом дисперсии носителей влияние спаривания на экранирование будет незначительным. Тем не менее это влияние оказывается существенным при уменьшении плотности носителей [37], когда имеет место переход из режима БКШ в режим бозе-эйнштейновской конденсации.

В изложенном выше подходе не учитывалась возможность появления в системе квантовых вихрей. Вихри представляют собой образования, в которых пары как целое вращаются вокруг сингулярных точек фазы параметра порядка. При этом связанные с вихрями круговые электрические токи в слоях имеют противоположные направления. В результате, в отличие от обычной сверхпроводимости, происходит компенсация магнитных полей, создаваемых этими токами, и поле скоростей вихря падает при удалении от его центра как  $1/r$ . Это приводит к логарифмическому закону взаимодействия вихрей с противоположной циркуляцией.

Как известно, вихри играют решающую роль в разрушении сверхтекучести. На вихрь в сверхтекучем потоке действует сила Магнуса, которая заставляет его двигаться поперек потока, что приводит к уменьшению градиента фазы параметра порядка в потоке, т.е. падению скорости потока. Направление движения вихря в потоке определяется знаком циркуляции. Вихри с противоположной циркуляцией движутся в противоположные стороны. При связывании таких вихрей в пары уменьшение скорости потока не происходит. Как показали Костерлиц и Таулесс [38,39], благодаря логарифмическому закону взаимодействия вихрей с противоположной циркуляцией связывание их в пары происходит как фазовый переход. Связывание вихрей и антивихрей в пары при низких температурах было описано в более ранней работе Березинского [40]. Фазовый переход получил название перехода Березинского–Костерлица–Таулесса (БКТ). В точке перехода имеет место диссоциация пар, и выше критической температуры в системе появляются свободные, не связанные в пары, вихри. Такие вихри могут двигаться поперек потока, и протекание стационарного сверхтекучего потока становится невозможным. Это есть переход из сверхтекучего в нормальное состояние. Температура перехода  $T_{BKT}$  определяется уравнением

$$T_{BKT} = \frac{\pi \hbar^2}{2M} n_s(T_{BKT}), \quad (2.17)$$

где  $n_s(T)$  — сверхтекучая плотность при температуре  $T$ .

Уравнение (2.17) можно применять и для сверхпроводящего газа электрон-дырочных пар. В этом случае  $n_s$  нужно понимать как сверхтекучую плотность в пересчете на одну спиновую компоненту. Температура перехода  $T_{BKT}$ , которую дает уравнение (2.17), ниже критической температуры (2.13). В пределе слабой связи разница между этими температурами мала, и температура перехода в сверхпроводящее состояние практически совпадает с критической температурой (2.13).

Выше речь шла о чистых системах, т.е. системах, в которых отсутствуют примеси или искажения решетки. В случае идеальной решетки сопротивление равно нулю даже в отсутствие спаривания. Поэтому исследо-

вание влияния примесей на токовые состояния носит принципиальный характер. Как известно [41], в традиционных сверхпроводниках следует различать ситуации с магнитными и немагнитными примесями. В случае немагнитных примесей плотность состояний и спектр возбуждений мало отличаются от их значений в чистом металле. В результате эти примеси почти не влияют на температуру перехода [42]. Совершенно иное влияние на сверхпроводимость оказывают парамагнитные примеси. Рассеяние на такой примеси куперовской пары, образованной электронами с противоположными спинами, приводит к переходу пары из синглетного в триплетное состояние, т.е. к разрушению пары и понижению температуры сверхпроводящего перехода [43]. Существует критическая концентрация парамагнитных примесей, которая полностью разрушает сверхпроводимость. Разрушение наступает при условии, что длина свободного пробега с переворотом спина сравнивается с длиной когерентности. Критическая концентрация парамагнитных примесей весьма мала. Она порядка нескольких атомных процентов.

В системах с электрон-дырочным спариванием разрушать пары могут и немагнитные примеси [44,45]. Если взаимодействие примесей с носителями является короткодействующим, то данный дефект будет рассеивать только носители в одном слое (несимметричное рассеяние). Аналогичная ситуация будет иметь место и для кулоновской примеси, для которой потенциалы взаимодействия с электроном и дыркой имеют разные знаки. В случае несимметричного рассеяния влияние примесей на электрон-дырочные пары аналогично влиянию парамагнитных примесей на куперовские пары, т.е. обычные (непарамагнитные) примеси приводят к разрушению электрон-дырочной сверхпроводимости. Физическая причина влияния примесей на спаривание электронов и дырок состоит в следующем. Если в системе присутствуют примеси, то в качестве состояний, между которыми происходит спаривание, следует брать не блоховские функции, а волновые функции носителей в поле примесей. В обычных сверхпроводниках в случае немагнитных примесей волновые функции спаривающихся электронов одинаковы. В результате эти функции выпадают из уравнения для параметра порядка (теорема Андерсона [46]). В системах со спариванием электронов и дырок из-за различия потенциала, создаваемого примесями в электронном и дырочном слоях, волновые функции спаривающихся частиц будут разными. Это приводит к изменению уравнения для параметра порядка и уменьшению критической температуры. Только в специальном случае, когда примеси одинаковым образом рассеивают электроны и дырки (симметричное рассеяние) и эффективные массы электрона и дырки одинаковы, примеси не меняют температуру перехода в сверхпроводящее состояние.

В [44] для изучения влияния примесей на электрон-дырочное спаривание использовался аппарат температурных функций Грина. Нормальная  $G$  и аномальная  $F$  функции Грина определены стандартными уравнениями

$$G_{e(h)}(\mathbf{k}, \tau - \tau') = -\langle T_{\tau} c_{e(h),\mathbf{k}}(\tau) c_{e(h),\mathbf{k}}^{\dagger}(\tau') \rangle, \quad (2.18)$$

$$F(\mathbf{k}, \tau - \tau') = -\langle T_{\tau} c_{e,\mathbf{k}}(\tau) c_{h,-\mathbf{k}}(\tau') \rangle, \quad (2.19)$$

где  $T_{\tau}$  — оператор упорядочения по мнимому времени, зависимость операторов от мнимого времени  $\tau$  имеет вид  $c_{e(h),\mathbf{k}}(\tau) = e^{H\tau} c_{e(h),\mathbf{k}} e^{-H\tau}$ , и угловые скобки означают усреднение по положениям примесей и температурное усреднение. Параметр порядка связан с аномальной функцией Грина соотношением

$$\Delta = \frac{T}{S} \sum_{\mathbf{q}, \omega_n} V_{eh}^{sqr}(\mathbf{q}) F(\mathbf{k} - \mathbf{q}, i\omega_n), \quad (2.20)$$

где  $\omega_n = (2n + 1)\pi T$  — мацубаровские частоты.

Уравнения для функции Грина удобно представить в форме диаграмм. В случае рассеяния на короткодействующих примесях они имеют вид, приведенный на рис. 1.

Уравнения, представленные на рис. 1, отличаются от аналогичных уравнений для сверхпроводника с немагнитными примесями [47] отсутствием диаграммы, в которой пунктирная линия взаимодействия с примесью охватывает аномальные функции. Это связано с тем, что в случае электрон-дырочных систем после усреднения по положению примесей выпадают члены, содержащие множитель  $U_e(\mathbf{r} - \mathbf{r}_n) U_h(\mathbf{r} - \mathbf{r}_n')$ , где  $U_{e(h)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_n)$  — потенциал поля  $n$ -й примеси в электронном (дырочном) слое. С формальной точки зрения именно это обстоятельство приводит к подавлению электрон-дырочной сверхпроводимости немагнитными примесями в системах с электрон-дырочным спариванием.

Решение системы уравнений рис. 1 имеет вид

$$\begin{pmatrix} G_e(\mathbf{k}, i\omega_n) & F(\mathbf{k}, i\omega_n) \\ F^+(\mathbf{k}, i\omega_n) & G_h(\mathbf{k}, i\omega_n) \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} i\tilde{\omega}_{n,e} - \xi_e(\mathbf{k}) & -\Delta \\ -\Delta^* & i\tilde{\omega}_{n,h} - \xi_h(\mathbf{k}) \end{pmatrix}, \quad (2.21)$$

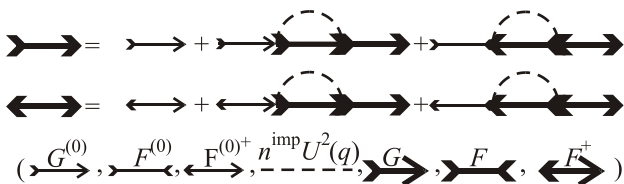


Рис. 1. Графическое представление уравнений для нормальных и аномальных функций Грина с учетом рассеяния на примесях. Тонкими и толстыми стрелками обозначены затравочная и полная функции Грина, соответственно.

где

$$i\tilde{\omega}_{n,e(h)} = i\omega_n - \frac{n_{e(h),\text{imp}}}{2\pi^2} \times \int d\mathbf{k} |U_{e(h)}(\mathbf{k} - \mathbf{k}')|^2 G_{e(h)}(\mathbf{k}', i\omega_n), \quad (2.22)$$

$U_{e(h)}(\mathbf{k})$  — фурье-компонента потенциала рассеяния на примеси и  $n_{e(h)}^{\text{imp}}$  — концентрация примесей в электронном (дырочном) слое.

Подстановка найденной аномальной функции Грина  $F$  в (2.20) приводит к уравнению самосогласования для параметра порядка

$$1 = \lambda T \sum_{\omega_n - \varepsilon_0}^{\varepsilon_0} \int d\xi \frac{1}{\Delta^2 + \tilde{\omega}_{n,e} \tilde{\omega}_{n,h} + \xi^2 + i\xi(\tilde{\omega}_{n,h} - \tilde{\omega}_{n,e})}, \quad (2.23)$$

где  $\varepsilon_0$  — энергия обрезания и  $\lambda$  — безразмерная константа слабой связи, определенные выше. Для упрощения предполагается, что  $m_e = m_h = 2m$ .

Из уравнения (2.23) находится критическая температура  $T_c$ . В отсутствие примесей

$$T_c = T_{c0} = \frac{2\gamma}{\pi} \varepsilon_0 \exp(-1/\lambda), \quad (2.24)$$

что с учетом условия  $m_e = m_h$  и уравнения (2.11) совпадает с (2.13). При наличии примесей уравнение (2.23) приводит к уравнению для критической температуры такого же вида, как и в теории сверхпроводящих сплавов с парамагнитными примесями [43]:

$$\ln \frac{T_{c0}}{T_c} = \psi\left(\frac{1}{2} + \frac{\hbar}{2\pi\tau T_c}\right) - \psi\left(\frac{1}{2}\right), \quad (2.25)$$

где  $\psi(z) = \Gamma'(z)/\Gamma(z)$ ,  $\Gamma(z)$  — гамма-функция,  $\tau = 4\hbar/(\Gamma_e + \Gamma_h)$  и

$$G_{e(h)} = n_{e(h)}^{\text{imp}} \frac{m_{e(h)}}{\pi\hbar^2} \int_0^{2\pi} |U_{e(h)}(\theta)|^2 d\theta. \quad (2.26)$$

В (2.26) потенциал  $U_{e(h)}(\mathbf{k}_F - \mathbf{k}'_F)$  берется при  $\mathbf{k}_F$  и  $\mathbf{k}'_F$ , лежащих на поверхности Ферми, и  $\theta$  — угол между этими векторами. При  $n_{e(h)}^{\text{imp}} \rightarrow 0$  время релаксации  $\tau$  стремится к бесконечности, правая часть уравнения (2.25) стремится к нулю, и критическая температура  $T_c$  стремится к  $T_{c0}$ . С ростом  $n_{e(h)}^{\text{imp}}$  критическая температура уменьшается. При достижении критической концентрации примесей температура  $T_c$  обращается в нуль. Соответствующее такой концентрации обратное времени релаксации определяется выражением

$$\tau_c^{-1} = \frac{\pi T_{c0}}{2\gamma \hbar}. \quad (2.27)$$

Для потенциала примеси  $U_{e(h)}^i(\mathbf{r}) = \pm U_0 \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)$  критическая концентрация примесей равна



$$n_{c,e}^{\text{imp}} + n_{c,h}^{\text{imp}} = \frac{2\pi}{\gamma} \frac{\hbar^2}{MU_0^2} T_{c0}. \quad (2.28)$$

Согласно (2.28), критическая концентрация примесей тем меньше, чем ниже критическая температура в чистой системе.

Примеси приводят не только к уменьшению критической температуры, но и к уменьшению сверхтекучей плотности. Для нахождения зависимости  $n_s$  от концентрации примесей вычислялся линейный отклик системы на векторный потенциал в присутствии примесей [44]. При  $T = 0$  диамагнитные токи в слоях равны

$$\mathbf{j}_e = -\mathbf{j}_h = -\frac{g_s n e^2}{Mc} \left( 1 - \frac{3\pi\Gamma_{\text{tr}}}{32\Delta_{T=0}} \right) (\mathbf{A}_e - \mathbf{A}_h), \quad (2.29)$$

где  $\mathbf{A}_{e(h)}$  — параллельный плоскости слоев векторный потенциал в электронном (дырочном) слое,  $n$  — плотность носителей заряда в одном слое в пересчете на одну спиновую компоненту, и

$$\Gamma_{\text{tr}} = 2n^{\text{imp}} \frac{m}{\pi\hbar^2} \int_0^{2\pi} d\theta |U(\theta)|^2 (1 - \cos\theta) \quad (2.30)$$

— величина, обратная транспортному времени релаксации. В (2.30) предполагается, что концентрации примесей и модули амплитуд взаимодействия с примесями одинаковы для электронного и дырочного слоев и равны  $n^{\text{imp}}$  и  $|U(\theta)|$  соответственно. Выражение в круглых скобках в (2.29), умноженное на  $n$ , есть перенормированная за счет влияния примесей сверхтекучая плотность  $n_s$  при  $T = 0$ .

В случае симметричного рассеяния можно было бы ожидать, что теорема Андерсона применима, и примеси не подавляют электрон-дырочную сверхпроводимость. Оказывается, что это так лишь при равных эффективных массах электронов и дырок. При неравных эффективных массах волновые функции электрона и дырки не совпадают, что делает рассеяние несимметричным. Учет различия эффективных масс приводит к уравнению для критической температуры, совпадающему по форме с (2.25), но с параметром  $1/\tau = 1/\tau^*$ , пропорциональным квадрату разницы эффективных масс,

$$\frac{\hbar}{\tau^*} = \frac{(m_e - m_h)^2}{2(m_e + m_h)\sqrt{m_e m_h}} \sqrt{\Gamma_e \Gamma_h}. \quad (2.31)$$

Критическая концентрация примесей, при которой происходит полное подавление электрон-дырочной сверхпроводимости, будет того же порядка, что и в случае истинно несимметричного рассеяния.

В заключение раздела отметим, что рассмотренное приближение (предел БКШ) справедливо, когда среднее расстояние между носителями значительно меньше размера электрон-дырочной пары, чему соответствует условие  $k_F a_0 \gg 1$ .

### 3. Сверхпроводимость разреженного газа электрон-дырочных пар

Из предыдущего раздела понятно, что в пределе слабой связи (высокой плотности носителей) условия для электрон-дырочной сверхпроводимости трудновыполнимы. При уменьшении плотности носителей спаривание происходит по одночастичной схеме — вместо перекрывающихся куперовских пар образуются локальные пары, размер которых существенно меньше среднего расстояния между ними. В этом случае анизотропия закона дисперсии электронов и дырок уже не накладывает ограничения на возможность образования связанного состояния, эффекты экранирования также становятся менее существенными, и, наконец, влияние примесей на электрон-дырочную сверхпроводимость не носит порогового характера.

Задача о связанном состоянии электрона и дырки, совершающих двумерное движение в расположенных параллельно друг другу плоскостях, была рассмотрена в [25] и более подробно в [48]. В системе центра масс уравнение Шредингера для пары записывается в виде

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \varphi(\mathbf{r}) - \frac{e^2}{\epsilon\sqrt{r^2 + d^2}} \varphi(\mathbf{r}) = E\varphi(\mathbf{r}), \quad (3.1)$$

где  $\mathbf{r}$  — двумерный радиус-вектор.

При  $d \rightarrow 0$  уравнение (3.1) по форме совпадает с уравнением для двумерного атома водорода. Энергия и волновая функция основного состояния такой системы равны  $E_0 = -4Ry^*$  и

$$\varphi_0(\mathbf{r}) = \frac{1}{a_0} \sqrt{\frac{8}{\pi}} e^{-2r/a_0}. \quad (3.2)$$

В предельном случае  $d \gg a_0$  кулоновский потенциал можно разложить по малому параметру  $a_0/d$  и заменить его квадратичным потенциалом. Тогда решение (3.1) аппроксимируется собственными функциями гармонического осциллятора. Энергия и волновая функция основного состояния принимают вид  $E_0 = -(e^2/\epsilon d)(1 - \sqrt{a_0/d})$ ,

$$\varphi_0(r) = \frac{1}{\sqrt{\pi}r_0} e^{-\frac{r^2}{2r_0^2}}, \quad (3.3)$$

где  $r_0 = \sqrt[4]{a_0 d^3}$  — размер пары.

Если пара рассматривается как составная частица, то для описания сверхтекучего состояния газа пар следует использовать параметр порядка, зависящий от радиус-векторов электрона и дырки, составляющих пару. Такое описание было предложено Келдышем [22] применительно к проблеме сверхтекучести трехмерного газа экситонов. Келдыш ввел волновую функцию обобщенного когерентного состояния подобную волновой функции когерентного состояния бозе-конденсата.

Сверхтекучему состоянию системы точечных бозонов можно сопоставить комплексный параметр порядка, являющийся средним значением оператора уничтожения

$$\Psi(\mathbf{R}) = \langle \Phi_0 | \hat{\Psi}(\mathbf{R}) | \Phi_0 \rangle, \quad (3.4)$$

где  $|\Phi_0\rangle$  — волновая функция основного состояния многочастичной системы и  $\hat{\Psi}(\mathbf{R})$  — оператор уничтожения бозона в точке  $\mathbf{R}$ . Сверхтекучая плотность совпадает с полной плотностью, если  $|\Phi_0\rangle$  есть собственная функция оператора  $\hat{\Psi}(\mathbf{R})$ . При этом величина  $\Psi(\mathbf{R})$  является собственным значением оператора уничтожения. Состояние, отвечающее собственной функции оператора уничтожения, называется когерентным состоянием. Явный вид этой функции известен (см., например, [49])

$$|\Phi_0\rangle = \exp\left(\int \Psi(\mathbf{R}) \hat{\Psi}^+(\mathbf{R}) d\mathbf{R} - \text{H.c.}\right) |0\rangle \equiv D_B |0\rangle, \quad (3.5)$$

где  $|0\rangle$  — вакуумное состояние (частицы отсутствуют).

Обобщением выражения (3.5) на случай газа электрон-дырочных пар является предложенная Келдышем волновая функция

$$|\Phi_0\rangle = D_F |0\rangle, \quad (3.6)$$

где

$$D_F = \exp\left[\sum_{\sigma} \int d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 \Phi_{\sigma}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) e^{-i\mu_{\sigma}t/\hbar} \psi_{e\sigma}^+(\mathbf{r}_1) \psi_{h-\sigma}^+(\mathbf{r}_2) - \text{H.c.}\right], \quad (3.7)$$

$\psi_{e(h)\sigma}^+(\mathbf{r})$  — оператор рождения электрона (дырки) в соответствующем слое. Функцию  $\Phi_{\sigma}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$  в (3.7) следует интерпретировать как конденсатную волновую функцию пар, индекс  $\sigma$  нумерует две сверхтекучие компоненты,  $\mu_{\sigma}$  — химический потенциал данной компоненты  $\sigma$ .

Формализм когерентных состояний был использован в [50–52] для анализа поляризационных явлений в трехмерном сверхтекучем газе электрон-дырочных пар (без пространственного разделения электронов и дырок) и в [53] для описания сверхтекучего состояния трехмерного разреженного газа, образованного атомами щелочного металла. Теория разреженного газа электрон-дырочных пар в двухслойной системе, основанная на формализме когерентных состояний, была развита в работе [54], которой мы следуем ниже.

Функции  $\Phi_{\sigma}$  определяются из условия минимума функционала

$$F = E - \sum_{\sigma} \mu_{\sigma} N_{\sigma}, \quad (3.8)$$

где  $E$  и  $N_{\sigma}$  — энергия системы и число пар компоненты  $\sigma$  в состоянии (3.6) соответственно. По определению,  $E = \langle 0 | D_F^{\dagger} H D_F | 0 \rangle$  и  $N_{\sigma} = \langle 0 | D_F^{\dagger} \hat{N}_{\sigma} D_F | 0 \rangle$ , где  $H$  и  $\hat{N}_{\sigma}$  — гамильтониан и оператор числа пар,

$$H = - \sum_{\alpha=e,h,\sigma=\uparrow,\downarrow} \int d\mathbf{r} \frac{\hbar^2}{2m_{\alpha}} \psi_{\alpha\sigma}^+(\mathbf{r}) \nabla_{\mathbf{r}}^2 \psi_{\alpha\sigma}(\mathbf{r}) + \frac{1}{2} \sum_{\alpha,\beta=e,h,\sigma,\sigma'=\uparrow,\downarrow} \int d\mathbf{r} d\mathbf{r}' \psi_{\alpha\sigma}^+(\mathbf{r}) \psi_{\beta\sigma'}^+(\mathbf{r}') \times \\ \times V_{\alpha\beta}(|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|) \psi_{\beta\sigma'}(\mathbf{r}') \psi_{\alpha\sigma}(\mathbf{r}), \quad (3.9)$$

$V_{ee}(r) = V_{hh}(r) = e^2/\varepsilon r$ ,  $V_{eh}(r) = -e^2/\varepsilon\sqrt{r^2+d^2}$  — кулоновский потенциал взаимодействия между носителями заряда внутри одного слоя и в разных слоях соответственно и

$$\hat{N}_{\sigma} = \frac{1}{2} \int d\mathbf{r} \left( \psi_{e\sigma}^+(\mathbf{r}) \psi_{e\sigma}(\mathbf{r}) + \psi_{h-\sigma}^+(\mathbf{r}) \psi_{h-\sigma}(\mathbf{r}) \right). \quad (3.10)$$

После несложных преобразований функционал (3.8) записывается в виде бесконечного ряда, содержащего свертки от  $\Phi_{\sigma}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  четных порядков. В пределе низкой плотности можно ограничиться членами до четвертого порядка включительно.

При учете только членов второго порядка условие равенства нулю вариации функционала  $F$  дает уравнение Шредингера для изолированной электрон-дырочной пары. Решение этого уравнения ищется в виде  $\Phi_{\sigma}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \Psi_{\sigma}(\mathbf{R}) \varphi(\mathbf{r})$ , где  $\mathbf{R}$  — координата центра масс,  $\mathbf{r}$  — относительная координата,  $\Psi_{\sigma}(\mathbf{R})$  — волновая функция пары, движущейся как целое, и  $\varphi(\mathbf{r})$  — функция, описывающая связанное состояние электрона и дырки. В качестве последней берется собственная функция основного состояния уравнения (3.1). В квадратичном по  $\Phi_{\sigma}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  приближении химические потенциалы  $\mu_{\uparrow}$  и  $\mu_{\downarrow}$  совпадают и равны энергии основного состояния пары  $E_0$ .

Учет в (3.8) членов четвертого порядка приводит к следующему функционалу:

$$F = \sum_{\sigma} \int d\mathbf{R} \Psi_{\sigma}^*(\mathbf{R}) \left[ -\frac{\hbar^2}{2M} \nabla_{\mathbf{R}}^2 - \tilde{\mu}_{\sigma} \right] \Psi_{\sigma}(\mathbf{R}) + \frac{1}{2} \sum_{\sigma,\sigma'} \int d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 d\mathbf{r}_3 d\mathbf{r}_4 A(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4) |\Psi_{\sigma}(\mathbf{R}_{12})|^2 |\Psi_{\sigma'}(\mathbf{R}_{34})|^2 + \\ + \frac{1}{2} \sum_{\sigma} \int d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 d\mathbf{r}_3 d\mathbf{r}_4 B(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4) \Psi_{\sigma}^*(\mathbf{R}_{12}) \Psi_{\sigma}(\mathbf{R}_{32}) \Psi_{\sigma}^*(\mathbf{R}_{34}) \Psi_{\sigma}(\mathbf{R}_{14}), \quad (3.11)$$

где  $\mathbf{r}_{ik} = (m_i \mathbf{r}_i + m_k \mathbf{r}_k) / M$  — координата центра масс электрона и дырки (индексы  $i, k = 1, 3$  относятся к электронам, индексы  $i, k = 2, 4$  — к дыркам). Функции  $A[\mathbf{r}_i]$  и  $B[\mathbf{r}_i]$  выражаются через потенциал кулоновского взаимодействия и функцию  $\varphi_0(\mathbf{r})$ :

$$\begin{aligned} A[\mathbf{r}_i] &= [V_{ee}(r_{13}) + V_{hh}(r_{24}) + V_{eh}(r_{14}) + V_{eh}(r_{23})] \times \\ &\times |\varphi_0(\mathbf{r}_{12})|^2 |\varphi_0(\mathbf{r}_{34})|^2, \\ B[\mathbf{r}_i] &= -[V_{ee}(r_{13}) + V_{hh}(r_{24}) + \\ &+ \frac{1}{2} [(V_{eh}(r_{12}) + V_{eh}(r_{34}) + V_{eh}(r_{14}) + V_{eh}(r_{23}))] \times \\ &\times \varphi_0^*(\mathbf{r}_{12}) \varphi_0(\mathbf{r}_{32}) \varphi_0^*(\mathbf{r}_{34}) \varphi_0(\mathbf{r}_{14}), \end{aligned} \quad (3.12)$$

где  $\mathbf{r}_{ik} = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k$ . Величина  $\tilde{\mu}_\sigma = \mu_\sigma - E_0$  есть сдвигка химического потенциала, обусловленная взаимодействием между парами.

Условие экстремума функционала (3.11) приводит к уравнению

$$\begin{aligned} \tilde{\mu}_\sigma \Psi_\sigma(\mathbf{R}_{12}) &= -\frac{\hbar^2}{2M} \nabla_{\mathbf{R}_{12}}^2 \Psi_\sigma(\mathbf{R}_{12}) + \\ &+ \int d\mathbf{r}_{12} d\mathbf{r}_3 d\mathbf{r}_4 \left[ A[\mathbf{r}_i] \Psi_\sigma(\mathbf{R}_{12}) \left( \sum_{\sigma'} |\Psi_{\sigma'}(\mathbf{R}_{34})|^2 \right) + \right. \\ &\left. + B[\mathbf{r}_i] \Psi_\sigma(\mathbf{R}_{32}) \Psi_\sigma^*(\mathbf{R}_{34}) \Psi_\sigma(\mathbf{R}_{14}) \right]. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Потенциалы  $\mu_\sigma$  находятся из условия нормировки  $(1/S) \int d\mathbf{R} |\Psi_\sigma(\mathbf{R})|^2 = n_\sigma$ , где  $n_\sigma$  — плотность компоненты  $\sigma$ . Решением уравнения (3.13), удовлетворяющим условиям нормировки, является  $\Psi_\sigma = \sqrt{n_\sigma}$ . Подстановка этого решения и найденных из (3.13)  $\tilde{\mu}_\sigma$  в (3.11) дает свободную энергию системы

$$F = -\frac{S}{2} \left[ (\gamma_d + \gamma_{ex})(n_\uparrow^2 + n_\downarrow^2) + 2\gamma_d n_\uparrow n_\downarrow \right], \quad (3.14)$$

где

$$\gamma_d = \frac{4\pi e^2 d}{\varepsilon}, \quad (3.15)$$

$$\begin{aligned} \gamma_{ex} &= -\frac{4\pi e^2}{\varepsilon} \int \frac{d^2 p}{(2\pi)^2} \frac{d^2 q}{(2\pi)^2} \frac{1}{p} |\varphi_{\mathbf{q}}|^2 [|\varphi_{\mathbf{q}+\mathbf{p}}|^2 - \\ &- \frac{e^{-pd}}{2} (\varphi_{\mathbf{q}+\mathbf{p}}^* \varphi_{\mathbf{q}} + \varphi_{\mathbf{q}}^* \varphi_{\mathbf{q}+\mathbf{p}})], \end{aligned} \quad (3.16)$$

и  $\varphi_{\mathbf{q}} = \int d\mathbf{r} e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}} \varphi_0(\mathbf{r})$  — фурье-компонента волновой функции основного состояния пары. Константы  $\gamma_d$  и  $\gamma_{ex}$  отвечают вкладам прямого и обменного кулоновского взаимодействия соответственно.

Если  $\gamma_{ex} > 0$ , минимуму функционала (3.14) (при заданной полной плотности  $n = n_\uparrow + n_\downarrow$ ) отвечает однородная смесь компонент  $n_\uparrow = n_\downarrow = n/2$ . Если  $\gamma_{ex} < 0$ , минимум достигается при  $n_\uparrow = n, n_\downarrow = 0$  либо  $n_\uparrow = 0, n_\downarrow = n$ . Во втором случае газ пар будет спин-поляризованным либо произойдет пространственное расслоение двухкомпонентного газа на однокомпонентные домены. При больших  $d$  межслойное обменное взаимодействие (которое определяет второе слагаемое в интеграле в (3.16)) является малым и  $\gamma_{ex} < 0$ . При  $d = 0$ , как строго показано в [51],  $\gamma_{ex} > 0$ . Поэтому существует критическое  $d_0$ , при котором происходит переход от двухкомпонентного газа пар к однокомпонентному (в целом либо в пределах каждого домена). Расчет дает  $d_0 \approx 0, 2a_0$ .

Условием устойчивости состояния (3.6) является вещественность частот коллективных возбуждений при всех волновых векторах. Рассмотрим эти условия для однокомпонентного газа пар. Спектр возбуждений находится из уравнения, которое получается из (3.13) после замены в нем левой части на производную  $i\hbar \partial \Psi_\sigma / \partial t$ . Это уравнение представляет собой аналог уравнения Гросса–Питаевского. Функция  $\Psi(\mathbf{R}, t)$ , удовлетворяющая такому уравнению, ищется в виде суммы однородного решения и малой поправки, представляющей собой монохроматическую плоскую волну,

$$\Psi(\mathbf{R}, t) = \sqrt{n} + e^{\frac{i\tilde{\mu}t}{\hbar}} \left( u_{\mathbf{k}} e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{R} - \omega t)} + v_{\mathbf{k}}^* e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{R} - \omega t)} \right), \quad (3.17)$$

где  $\tilde{\mu} = (\gamma_d + \gamma_{ex})n$ . Дисперсионное уравнение находится из условия равенства нулю детерминанта системы уравнений для  $u$  и  $v$ , записанной в линейном по этим коэффициентам приближении. Решение дисперсионного уравнения дает частоту коллективной моды

$$\hbar\omega(k) = \sqrt{(\varepsilon_k + [\gamma_{ex}^{(1)}(k) - \gamma_{ex}^{(2)}(k)]n) (\varepsilon_k + [2\gamma_d(k) + \gamma_{ex}^{(1)}(k) + \gamma_{ex}^{(2)}(k)]n)}, \quad (3.18)$$

где  $\varepsilon_k = \hbar^2 k^2 / 2M$  — кинетическая энергия пары,

$$\gamma_d(k) = \int d\mathbf{r}_{12} d\mathbf{r}_3 d\mathbf{r}_4 A[\mathbf{r}_i] e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{R}_{34} - \mathbf{R}_{12})}, \quad (3.19)$$

$$\begin{aligned} \gamma_{ex}^{(1)}(k) &= \int d\mathbf{r}_{12} d\mathbf{r}_3 d\mathbf{r}_4 B[\mathbf{r}_i] \times \\ &\times \left( e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{R}_{32} - \mathbf{R}_{12})} + e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{R}_{14} - \mathbf{R}_{12})} - 1 \right), \end{aligned} \quad (3.20)$$

и

$$\gamma_{\text{ex}}^{(2)}(k) = \int d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 d\mathbf{r}_3 d\mathbf{r}_4 A_4 B[\mathbf{r}_i] e^{ik \cdot (\mathbf{R}_{34} - \mathbf{R}_{12})}. \quad (3.21)$$

Спектр возбуждений является изотропным и представляет собой модифицированный боголюбовский спектр. В пределе  $k \rightarrow 0$  функция (3.19) сводится к константе  $\gamma_d$ , а функции (3.20) и (3.21) к константе  $\gamma_{\text{ex}}$ . В этом пределе спектр (3.18) является акустическим:  $\omega(k) = k\sqrt{(\gamma_d + \gamma_{\text{ex}})n/M}$ . При  $k \neq 0$  и достаточно больших  $d$  спектр может существенно отклоняться от боголюбовского, в том числе, демонстрировать особенность типа ротонного минимума.

Анализ дисперсионного соотношения (3.18) показывает, что энергия коллективной моды (3.18) становится мнимой при  $d > d_c$ , где  $d_c$  — некоторое зависящее от  $n$  критическое межслоевое расстояние. Мнимая энергия возбуждений означает, что описываемое волновой функцией (3.6) состояние является неустойчивым относительно образования неоднородной фазы. Можно также определить критическую плотность  $n_c$  при заданном  $d$ , превышение которой приводит к неустойчивости. Рассчитанная зависимость  $n_c$  от  $d$  аппроксимируется степенной функцией

$$n_c a_0^2 \approx C_1 \frac{4m}{M} \left( \frac{d}{a_0} \right)^\alpha, \quad (3.22)$$

где  $\alpha = -2,62$  и  $C_1 = 0,335$ .

Отметим, что возникновение неоднородных фаз в электрон-дырочной двухслойной системе предсказано также в работе [55]. В этой работе показано, что при плотностях, соответствующих  $r_s = r_0/2a_0 = 5-20$  ( $r_0$  — среднее расстояние между носителями в слое), возникает волна зарядовой плотности, а при очень малой плотности носителей ( $r_s > 20$ ) — двухслойный вигнеровский кристалл. Предсказываемые неоднородные фазы должны возникать при  $d < d_{c2}$ . Полученное в [55] критическое расстояние удовлетворяет неравенству  $d_{c2} \gg d_c$ . Отсюда следует, что при  $d_c$  должен происходить переход из сверхпроводящей фазы в фазу типа волны зарядовой плотности или вигнеровского кристалла, а при значительно большем  $d_{c2}$  — переход из неоднородной фазы в однородную нормальную фазу.

Сверхтекучая плотность  $n_s(T)$  определяется выражением

$$n_s(T) = n - \frac{1}{2} \frac{\hbar^2}{MT} \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^2} k^2 N_B(\hbar\omega(k)) [1 + N_B(\hbar\omega(k))], \quad (3.23)$$

где  $N_B(E)$  — бозевская функция распределения. В (3.23) пренебрегается вкладом в нормальную плотность вихревых возбуждений. Это приближение оправдано, так как, хотя вихревые возбуждения и приводят к скачкообразному падению до нуля сверхтекучей

плотности в точке перехода  $T_{BKT}$  [56], ниже точки перехода их вклад остается малым.

Основной вклад в интеграл (3.23) дают длинноволновые акустические возбуждения. В этом случае при вычислении (3.23) можно не учитывать дисперсию  $E_k$ , что позволяет привести уравнение (2.17) к кубическому

$$T_{BKT} = T_0 \left[ 1 - C_0 \left( \frac{T_{BKT}}{T_0} \right)^3 \right], \quad (3.24)$$

где  $T_0 = \pi\hbar^2 n/2M$  и  $C_0 = (3\pi^2 \zeta(3)/16)(\hbar^2/M\gamma_0)^2$  ( $\gamma_0 = \gamma_d + \gamma_{\text{ex}}$ ,  $\zeta(s)$  — дзета-функция). Для найденных выше  $\gamma_d$  и  $\gamma_{\text{ex}}$  константа  $C_0$  порядка либо меньше  $10^{-2}$ . При таких  $C_0$  температура  $T_{BKT}$  практически совпадает с  $T_0$ . Наличие минимума в спектре возбуждений (3.18) приводит к уменьшению критической температуры по сравнению со значением, которое дает уравнение (3.24). Это уменьшение тем заметнее, чем ближе кривая  $\omega(k)$  подходит к оси абсцисс. При  $d = d_c$  критическая температура обращается в нуль.

Остановимся теперь на вопросе о влиянии примесей на сверхтекучесть локальных пар. Как и в случае систем со слабой связью, в системах с локальными парами наличие примесей приводит к уменьшению сверхтекучей плотности и к понижению температуры перехода. Для количественной оценки этих эффектов в [54] использовался подход работ [57,58], в которых вопрос о влиянии примесей на температуру перехода БКТ рассматривался применительно к двумерному бозе-газу с точечным взаимодействием.

При наличии примесей правая часть уравнения (3.13) содержит дополнительное слагаемое, имеющее вид  $U_{\text{imp}}(\mathbf{R}_{12})\Psi(\mathbf{R}_{12})$ , где потенциал  $U_{\text{imp}}(\mathbf{R}) = U_e(\mathbf{R}) + U_h(\mathbf{R})$  определяется суммой потенциалов взаимодействия компонентов пары с примесью.

В случае, когда взаимодействие с примесями можно считать слабым, решение (3.13) с дополнительным членом ищется в виде  $\Psi(\mathbf{R}) = \sqrt{n} + \Psi_1(\mathbf{R})$ , где  $\Psi_1(\mathbf{R})$  — малая поправка. Полученная фурье-компонента поправки имеет вид

$$\Psi_1(\mathbf{q}) = \frac{\sqrt{n}}{S[\hbar\omega(q)]^2} U_{\text{imp}}(\mathbf{q}) \left( \varepsilon_q + [\gamma_{\text{ex}}^{(1)}(q) - \gamma_{\text{ex}}^{(2)}(q)]n \right). \quad (3.25)$$

Сверхтекучая плотность при  $T = 0$  определяется соотношением [57,58]

$$n_s = n - \frac{1}{2n} \sum_{\mathbf{q} \neq 0} \langle n_{\mathbf{q}} n_{-\mathbf{q}} \rangle, \quad (3.26)$$

где  $n_{\mathbf{q}} = (1/S) \int d\mathbf{R} e^{-i\mathbf{q}\mathbf{R}} |\Psi(\mathbf{R})|^2$  и угловые скобки обозначают усреднение по положению примесей. Выражая  $n_{\mathbf{q}}$  через  $\Psi_1(\mathbf{q})$ , после усреднения по положению примесей получают



$$n_s = n - \frac{n_{\text{imp}}}{\pi} \int_0^\infty dq |U_{\mathbf{q}}^{(0)}|^2 \frac{nq}{[\varepsilon_q + 2\gamma_q n]^2}, \quad (3.27)$$

где  $n_{\text{imp}}$  — концентрация примесей,  $\gamma_q = \gamma_d(q) + [\gamma_{\text{ex}}^{(1)}(q) + \gamma_{\text{ex}}^{(2)}(q)]/2$ ,  $U_{\mathbf{q}}^{(0)}$  — фурье-компонента потенциала одной примеси. Относительное изменение критической температуры определяется соотношением  $\Delta T_c/T_c = -\Delta n_s/n$ , где  $\Delta n_s = n - n_s$ . Для оценки  $\Delta n_s$  можно заменить  $\gamma_q$  на  $\gamma_0$  и принять  $U_{\mathbf{q}}^{(0)} = U_0$ . Тогда

$$\Delta n_s = n_{\text{imp}} \frac{MU_0^2}{2\pi\hbar^2\gamma_0}. \quad (3.28)$$

Характерную концентрацию  $n_{\text{imp}}^{(c)}$ , при которой примеси приводят к существенному уменьшению сверхтекучей плотности, можно оценить из соотношения  $\Delta n_s \approx n$ . Подчеркнем, что поскольку используемый подход предполагает  $\Delta n_s/n \ll 1$ , найденную таким способом концентрацию можно рассматривать лишь как оценку для критической концентрации.

Для сравнения с выражением для критической концентрации в пределе слабой связи (2.28) концентрацию  $n_{\text{imp}}^{(c)}$  удобно записать в виде

$$n_{\text{imp}}^{(c)} = \frac{\hbar^2 T_0}{MU_0^2} \frac{4M\gamma_0}{h^2}, \quad (3.29)$$

где  $T_0 = \pi\hbar^2 n/2M \approx T_{\text{BKT}}$  — температура перехода. Уравнение (3.29) отличается от (2.28) множителем  $(2\pi/\gamma)(M\gamma_0/\hbar^2)$ . Для  $\gamma_0 = 5e^2 a_0/\varepsilon$  (что соответствует  $d \approx a_0$ ) и  $m_e = m_h$  этот множитель примерно равен 20. Таким образом, при одинаковой температуре перехода концентрация примесей (3.29) на один–два порядка превышает критическую концентрацию в системах со слабой связью. Так как вследствие экранирования температура перехода в системе со слабой связью ниже, чем в системе с сильной связью, отношение критических концентраций примесей будет еще больше.

Обратимся к обсуждению случая малых  $d$ . Этот случай является более сложным не только из-за многокомпонентности (как уже отмечалось, при  $d < 0,2a_0$  теория предсказывает переход в фазу, представляющую собой однородную смесь двух спиновых компонент). Выше предполагалось, что пары не связываются в комплексы. Но хорошо известно, что два атома водорода образуют молекулу водорода. Аналогичным образом две электрон-дырочные пары, т.е. два экситона, могут образовывать биэкситон. Проблема образования биэкситонов как в трехмерных, так и в двумерных системах без пространственного разделения носителей посвящено большое число работ (см., например, [59–64]). В этом случае расчет показывает, что образование биэкситонов почти всегда понижает энергию системы.

При этом энергия связи существенно зависит от отношения электронной и дырочной эффективных масс. В системах с пространственным разделением носителей появляется новый параметр — расстояние между слоями. В зависимости от этого параметра, а также отношения  $m_e/m_h$  связывание двух экситонов в биэкситон может оказаться энергетически невыгодным.

В работе [65] задача двух экситонов в системе с пространственно разделенными электронами и дырками решалась вариационным методом. При выборе пробной функции авторы исходили из требования симметрии, согласно которому функция не должна меняться при перестановке двух электронных или двух дырочных координат:

$$\Psi(\mathbf{r}_1^e, \mathbf{r}_2^e, \mathbf{r}_1^h, \mathbf{r}_2^h) = \Psi(\mathbf{r}_2^e, \mathbf{r}_1^e, \mathbf{r}_1^h, \mathbf{r}_2^h) = \Psi(\mathbf{r}_1^e, \mathbf{r}_2^e, \mathbf{r}_2^h, \mathbf{r}_1^h).$$

При равенстве эффективных масс электронов и дырок должна также соблюдаться симметрия  $\Psi(\mathbf{r}_1^e, \mathbf{r}_2^e, \mathbf{r}_1^h, \mathbf{r}_2^h) = \Psi(\mathbf{r}_1^h, \mathbf{r}_2^h, \mathbf{r}_1^e, \mathbf{r}_2^e)$ . С учетом малости энергии связи биэкситона по сравнению с энергией связи электрона и дырки в одном экситоне волновую функцию системы можно представить в виде симметризованного произведения двух экситонных волновых функций, умноженного на волновую функцию Джастрова [66]. Последняя представляет собой произведение сомножителей, зависящих только от электронных и дырочных координат. Таким образом, используется пробная функция

$$\begin{aligned} \Psi(\mathbf{r}_1^e, \mathbf{r}_2^e, \mathbf{r}_1^h, \mathbf{r}_2^h) = \\ = \Psi_{ee}(\mathbf{r}_{12}^{ee}) \Psi_{hh}(\mathbf{r}_{12}^{hh}) \Psi_{eh}(\mathbf{r}_{11}^{eh}, \mathbf{r}_{22}^{eh}, \mathbf{r}_{12}^{eh}, \mathbf{r}_{21}^{eh}), \end{aligned} \quad (3.30)$$

где  $r_{ik}^{ab} = |\mathbf{r}_i^a - \mathbf{r}_k^b|$ . Установлено, что энергия связи биэкситонов при больших  $d$  удовлетворительно описывается простой экспоненциальной зависимостью

$$E_b \approx \alpha R \gamma^* \exp(-\beta d/a_0), \quad (3.31)$$

где  $\alpha \approx 0,7$  и  $\beta \approx 15$  для  $m_e \approx m_h$ . Из (3.31) следует, что энергия связи остается отличной от нуля при сколь угодно больших  $d$ .

Позднее [67–69] было показано, что существует критическое расстояние  $d_{\text{crit}}$ , при превышении которого энергия связи обращается в нуль. В работе [67] при решении задачи о двух экситонах расстояние  $R$  между дырками сначала считалось заданной величиной и решалась задача о двух электронах в поле дырок. Соответствующий гамильтониан имеет вид

$$H = \sum_i H_{\mathbf{r}_i} + V_{ee}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) + V_{hh}(\mathbf{R}), \quad (3.32)$$

где  $\mathbf{r}_i$  — координаты электронов,

$$H_{\mathbf{r}_i} = -\frac{\hbar^2}{2m_e} \nabla_i^2 + V_{eh}(\mathbf{r}_i) + V_{eh}(\mathbf{r}_i - \mathbf{R}). \quad (3.33)$$



Найденная энергия основного состояния двухэлектронной задачи (являющаяся функцией  $R$ ) рассматривалась в качестве потенциала взаимодействия двух экситонов между собой и решалась двухчастичная квантово-механическая задача. Установлено, что энергия связи двух экситонов обращается в нуль при  $d > d_{\text{crit}}$ , причем  $d_{\text{crit}}$  зависит от отношения эффективных масс  $\sigma = m_e/m_h$ . В пределе  $\sigma \rightarrow 0$  критическое расстояние максимально:  $d_{\text{crit}} \approx 0,9a_0$ . При увеличении  $\sigma$  критическое расстояние падает до  $d_{\text{crit}} \approx 0,3a_0$  при  $\sigma = 1$ . В работе [68] использовался стохастический вариационный метод расчета. Величина  $d_{\text{crit}}$  находилась из асимптотики энергии связи экситонов как функции расстояния между слоями. Полученное таким способом критическое расстояние несколько выше, чем в [67] ( $d_{\text{crit}} \approx 0,4a_0$  при  $\sigma = 1$ ). В работе [68] существование критического расстояния доказано также аналитически. В работе [69] использовался квантовый метод Монте-Карло. Полученное этим методом  $d_{\text{crit}}$  в области параметров  $0,2 < \sigma \leq 1$  практически совпадает с полученным в [68].

Таким образом, при достаточно больших  $d$  биэкситоны не образуются, а в области малых  $d$  газ электрон-дырочных пар будет неустойчивым относительно образования биэкситонов. Газ биэкситонов, в свою очередь, может также переходить в сверхтекучее состояние, однако температура такого перехода будет ниже температуры сверхтекучего перехода газа экситонов.

В работах [70,71] рассмотрен еще один канал неустойчивости экситонного газа: неустойчивость относительно образования экситонных капель. Неустойчивость такого типа может реализоваться, если энергия как функция плотности имеет минимум при некоторой конечной плотности  $n_0$ . При средней плотности меньшей, чем  $n_0$ , образование капель будет энергетически выгодно. В результате будет возникать пространственно неоднородное состояние. В работе [71] найдена энергия экситонного газа как функция плотности с учетом вклада диполь-дипольного и обменного взаимодействий. Вклад диполь-дипольного взаимодействия рассчитывался в лестничном приближении. Аналогично известному результату Шика для двумерного газа частиц с непроницаемой сердцевиной [72] в [71] найден вклад этого взаимодействия в перенормировку химического потенциала

$$\mu_{\text{dir}} \approx \frac{e^2}{a_0} \frac{2\pi n a_0^2}{\ln\left(\frac{a_0^2}{32\pi n d^4}\right)}. \quad (3.34)$$

Вклад обменного взаимодействия рассчитывался в приближении Хартри–Фока. Установлено, что при  $d < 0,95a_0$  на зависимости энергии экситонного газа от плотности появляется локальный минимум. При  $d < 0,55a_0$  этот минимум становится глобальным. От-

вечающее минимуму значение плотности равно  $n_0 \approx 0,2a_0^{-2}$ . Вывод [71] об образовании капель коррелирует с результатами работ [67–69], согласно которым образование биэкситонов становится энергетически выгодным при  $d/a_0 \lesssim 0,5$ .

Изложенные в этом разделе результаты показывают, что системы с сильной связью (размер пар много меньше среднего расстояния между парами) являются более перспективными с точки зрения достижения относительно высокой критической температуры. В гетероструктурах на основе GaAs при типичных значениях плотности носителей  $n = 10^{11} \text{ см}^{-2}$  реализуется именно предел сильной связи ( $na_0^2 \sim 0,1$ ). Оценка дает критическую температуру  $T_{\text{BKT}} = 2 \text{ К}$ . При этом влияние примесей на критическую температуру будет значительно слабее, чем в системах со слабой связью.

В заключение отметим, что в работах [73,74] в двухслойной электрон-дырочной системе в гетероструктуре GaAs–AlGaAs при понижении температуры ниже 1 К наблюдалось аномальное возрастание межслоевого увлечения (возникновение разности потенциалов в одном слое при пропускании электрического тока во втором слое). Эффект рассматривался как экспериментальное доказательство электрон-дырочного спаривания. Плотности электронов и дырок в изучаемых структурах менялись в диапазоне  $n_e = n_h \approx 0,5\text{--}1 \cdot 10^{11} \text{ см}^{-2}$ , что соответствует пределу низкой плотности. Температура, при которой наблюдалась транспортная аномалия ( $T \approx 1 \text{ К}$ ), согласуется с приведенной выше оценкой для критической температуры.

#### 4. Аномальный диамагнетизм и индуцирование вихрей скрещенными электрическим и магнитным полями

Принято считать, что более фундаментальным свойством сверхпроводников является аномальный отклик на магнитное поле, а не отсутствие электрического сопротивления. Макроскопическим проявлением аномального отклика является эффект Мейсснера — выталкивание магнитного поля из сверхпроводника. Это позволяет говорить о сверхпроводнике как об идеальном диамагнетике.

Системы со спариванием пространственно разделенных электронов и дырок в сверхтекучем состоянии также характеризуются аномальным диамагнитным откликом на параллельное слоям магнитное поле. Линейный отклик системы на векторный потенциал можно получить с использованием формализма функций Грина (см. разд. 2). Здесь мы остановимся на более простом и наглядном описании диамагнитных свойств двухслойной системы. Следуя [75], рассмотрим изменение сверхтекучей скорости пар  $\mathbf{v}_s$  в процессе включения магнитного поля  $\mathbf{B}$ , направленного параллельно слоям. Изменение сверх-

текущей скорости происходит за счет появления электрического поля в момент включения магнитного поля. Уравнение движение центра масс пары имеет вид

$$M \frac{d\mathbf{v}_s}{dt} = e(\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2), \quad (4.1)$$

где  $M$  — масса пары,  $\mathbf{E}_i$  — электрическое поле в слое. Для определенности, считаем слой 1 дырочным, а слой 2 — электронным. Выражая электрическое поле через векторный потенциал  $\mathbf{E} = -(1/c)(\partial\mathbf{A}/\partial t)$  и учитывая, что электрические токи в слоях 1 и 2 связаны со сверхтекущей скоростью соотношением

$$\mathbf{j}_1 = -\mathbf{j}_2 = en_s \mathbf{v}_s \quad (4.2)$$

( $n_s$  — сверхтекущая плотность пар), получаем из (4.1)

$$\frac{d\mathbf{j}_1}{dt} = -\frac{d\mathbf{j}_2}{dt} = -\frac{n_s e^2}{Mc} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{A}_1 - \mathbf{A}_2). \quad (4.3)$$

В рассматриваемом случае не зависящих от координат токов частная и полная производные по времени совпадают ( $d\mathbf{j}/dt = \partial\mathbf{j}/\partial t + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{j} = \partial\mathbf{j}/\partial t$ ). Поэтому

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \mathbf{j}_1 + \frac{n_s e^2}{Mc} (\mathbf{A}_1 - \mathbf{A}_2) \right) = 0. \quad (4.4)$$

Отсюда следует, что величина в круглых скобках в (4.4) не зависит от времени.

Если в отсутствие поля ( $\mathbf{A}_1 = \mathbf{A}_2 = 0$ ) токи  $\mathbf{j}_i$  равны нулю, то выражение в круглых скобках в (4.4) будет равно нулю при любых  $t$ . Включение поля приводит к появлению токов

$$\mathbf{j}_1 = -\mathbf{j}_2 = -\frac{n_s e^2}{Mc} (\mathbf{A}_1 - \mathbf{A}_2). \quad (4.5)$$

Интересно сравнить (4.5) с выражением для мейсснеровского тока в обычном сверхпроводнике

$$\mathbf{j} = -\frac{n_s e^2}{m_e c} \mathbf{A}. \quad (4.6)$$

Если учесть, что в обычных сверхпроводниках масса куперовской пары равна  $2m_e$ , то выражение (4.5) естественным образом переходит в выражение (4.6) после замены заряда дырки  $+e$  на заряд электрона  $-e$ .

Выражение для токов (4.5) можно также получить из соображений калибровочной инвариантности [76]. При калибровочном преобразовании  $c_i \rightarrow c_i e^{-ie\varphi_i/\hbar c}$  ( $c_i$  — оператор уничтожения электрона) фаза параметра порядка  $\Delta \propto \langle c_1^\dagger c_2 \rangle$  преобразуется как  $\varphi \rightarrow \varphi + e(\varphi_1 - \varphi_2)/\hbar c$ , а векторный потенциал — как  $\mathbf{A}_i \rightarrow \mathbf{A}_i + \nabla\varphi_i$ . Комбинация  $\nabla\varphi - (e/\hbar c)(\mathbf{A}_1 - \mathbf{A}_2)$  является калибровочно инвариантной, и зависящая от градиента фазы часть свободной энергии записывается в виде

$$F = \frac{1}{2} \frac{\hbar^2 n_s}{M} \int d\mathbf{r} \left[ \nabla\varphi - \frac{e}{\hbar c} (\mathbf{A}_1 - \mathbf{A}_2) \right]^2. \quad (4.7)$$

Электрический ток в слое  $i$  можно найти с помощью функциональной производной:

$$\mathbf{j}_i = -c \frac{\delta F}{\delta \mathbf{A}_i}, \quad (4.8)$$

что дает

$$\mathbf{j}_1 = -\mathbf{j}_2 = \frac{e\hbar n_s}{M} \left[ \nabla\varphi - \frac{e}{\hbar c} (\mathbf{A}_1 - \mathbf{A}_2) \right]. \quad (4.9)$$

В случае  $\nabla\varphi = 0$  выражение (4.9) совпадает с (4.5).

В (4.6) предполагается калибровка  $\nabla\mathbf{A} = 0$  (что следует из  $\nabla\mathbf{j} = 0$ ) и  $\mathbf{n}\mathbf{A} = 0$ , где  $\mathbf{n}$  — нормаль к поверхности сверхпроводника. В соотношении (4.5) подразумевается аналогичная калибровка, причем вектор  $\mathbf{n}$  понимается как нормаль к плоскости слоев. Результат (4.5) можно записать через магнитное поле. Для плоской системы  $\mathbf{n} \parallel \mathbf{d}$  и  $\mathbf{n}\mathbf{A} = 0$  (где  $\mathbf{d}$  — плечо диполя, образованного электрон-дырочной парой) разность векторных потенциалов представима в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_1 - \mathbf{A}_2 &= \mathbf{A}(\mathbf{r} + \mathbf{d}) - \mathbf{A}(\mathbf{r}) = (\mathbf{d} \cdot \nabla)\mathbf{A} = \\ &= \nabla(\mathbf{d} \cdot \mathbf{A}) - \mathbf{d} \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \mathbf{B} \times \mathbf{d} \end{aligned} \quad (4.10)$$

( $\mathbf{r}$  — двумерный радиус-вектор в плоскости слоев), и выражение (4.5) принимает вид

$$\mathbf{j}_1 = -\mathbf{j}_2 = -\frac{n_s e^2}{Mc} \mathbf{B} \times \mathbf{d}. \quad (4.11)$$

Выражение (4.11) не зависит от калибровки векторного потенциала. Оно применимо и к системе с ненулевой кривизной, например, когда двухслойная система представляет собой два коаксиальных цилиндра.

Еще одним каноническим свойством сверхпроводников второго рода является появление в них квантовых вихрей в случае, когда магнитное поле  $H$  превышает первое критическое поле  $H_{c1}$ . Оказывается, что в рассматриваемых системах магнитное поле также может индуцировать квантовые вихри, если это поле имеет отличную от нуля двумерную дивергенцию [77–80]. Прежде чем сформулировать условия рождения вихрей таким магнитным полем, полезно рассмотреть свойства одного квантового вихря в электрон-дырочной системе.

Характер спадания сверхтекущей скорости квантового вихря с расстоянием и создаваемое им магнитное поле рассмотрены в [77]. Из уравнения Максвелла  $\text{rot}\mathbf{B} = 4\pi\mathbf{j}/c$ , выражений для трехмерной плотности токов

$$\mathbf{j}_1 = en_s \mathbf{v}_s \delta(z + d/2), \quad \mathbf{j}_2 = -en_s \mathbf{v}_s \delta(z - d/2) \quad (4.12)$$

и связи сверхтекущей скорости с магнитным полем

$$\mathbf{v}_s = \frac{\hbar}{M} \nabla\varphi + \frac{ed}{Mc} \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{B} \quad (4.13)$$

следует уравнение для векторного потенциала  $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ :

$$\Delta \mathbf{A} - \gamma \left( \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial z} - \frac{\hbar c \nabla \varphi}{ed} \right) [\delta(z - d/2) - \delta(z + d/2)] = 0, \quad (4.14)$$

где  $\gamma = 4\pi n_s e^2 d / Mc^2$ . Введенный параметр очень мал ( $\gamma \lesssim 10^{-4}$ ).

Решение уравнения (4.14) находится методом, предложенным Пирлом [81] (см., также [41]) при решении задачи о структуре вихря в тонкой сверхпроводящей пластинке в магнитном поле, перпендикулярном ее плоскости. В цилиндрической системе координат отлична от нуля только азимутальная компонента векторного потенциала

$$A_\varphi(\mathbf{r}) = \frac{2\pi e \hbar n_s}{Mc} \times \frac{\sqrt{\rho^2 + \left(z - \frac{d}{2}\right)^2} - \left|z - \frac{d}{2}\right| - \sqrt{\rho^2 + \left(z + \frac{d}{2}\right)^2} + \left|z + \frac{d}{2}\right|}{\rho}, \quad (4.15)$$

где  $\rho$  — модуль параллельной слоям компоненты вектора  $\mathbf{r}$ . Из (4.15) следует выражение для нормальной компоненты магнитного поля вихря в двухслойной системе

$$B_z = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho A_\varphi = \frac{2\pi e \hbar n_s}{Mc} \left[ \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + \left(z - \frac{d}{2}\right)^2}} - \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + \left(z + \frac{d}{2}\right)^2}} \right]. \quad (4.16)$$

Магнитный поток, проходящий через слой с координатой  $z = d/2$ , равен

$$\Phi = \int B_z \rho d\rho d\theta = \frac{4\pi^2 e \hbar n_s d}{Mc} = \frac{\gamma}{2} \Phi_0, \quad (4.17)$$

где  $\Phi_0 = hc/e$  — квант магнитного потока. Так как  $\gamma \ll 1$ , магнитный поток, связанный с вихрем, много меньше кванта потока. Магнитный поток через слой  $z = -d/2$  отличается от (4.17) только знаком. При  $\rho \gg d$  радиальное магнитное поле между проводящими слоями определяется выражением  $B_\rho = -\gamma \Phi_0 / 2\pi d \rho$ . Соответственно, поток магнитного поля через боковую поверхность равен  $\Phi_{ss} = -\gamma \Phi_0$ , что равняется сумме потоков через верхний и нижний проводящие слои, взятой с обратным знаком.

Сверхтекучая скорость на расстоянии  $\rho \gg d$  от центра вихря содержит множитель  $1 - \gamma$ :

$$v_{s\theta} = \frac{\hbar}{M\rho} (1 - \gamma). \quad (4.18)$$

Поскольку  $\gamma \ll 1$ , собственное поле вихря в электрон-дырочной системе практически не влияет на его кинетическую энергию. Из (4.18) следует, что в рассматри-

ваемых системах взаимодействие между вихрями является логарифмическим на любых расстояниях. Это отличает такие вихри от вихрей Абрикосова, взаимодействие между которыми экспоненциально спадает на расстояниях, существенно превышающих лондоновскую длину.

В пренебрежении собственным магнитным полем вихря (которое, как показано, является малым) энергия системы во внешнем поле  $\mathbf{H}$  определяется выражением [77,79]

$$E = \int \left[ \frac{\hbar^2 n_s}{2M} (\nabla \varphi)^2 + \frac{\hbar n_s e d}{Mc} \nabla \varphi \cdot (\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{H}) \right] d^2 r. \quad (4.19)$$

Если магнитное поле однородно, то интеграл от второго слагаемого в (4.19) обращается в нуль. Магнитное поле с отличной от нуля двумерной дивергенцией может компенсировать проигрыш в кинетической энергии, связанный с вихрем, и появление вихрей станет энергетически выгодным.

В работе [77] рассмотрен случай, когда магнитное поле создается двумерным азимутальным током с плотностью  $I$ , протекающем по плоской катушке, центр которой совпадает с центром электрон-дырочной системы в виде диска радиусом  $R$ . Радиальная компонента магнитного поля такого тока равна

$$H_\rho = H_0 \left[ \sqrt{1 + \frac{a^2}{\rho^2}} - \frac{a}{\rho} \right], \quad (4.20)$$

где  $H_0 = 2\pi I/c$  — величина радиального магнитного поля при  $\rho \gg a$ , и  $a$  — расстояние от катушки до двухслойной системы (предполагается, что  $\rho$  много меньше радиуса катушки). Критическое магнитное поле  $H_{c1}$  можно найти, считая, что вихрь появился в центре диска. Приравнивая его кинетическую энергию (первое слагаемое в (4.19)) энергии взаимодействия с магнитным полем (второе слагаемое), находим критическое поле

$$(H_0)_{c1} = \frac{\Phi_0}{4\pi R d} \ln \frac{R}{\xi}. \quad (4.21)$$

Для  $R = 10^{-1}$  см и  $d \approx \xi \approx 10^{-6}$  см получаем оценку  $(H_0)_{c1} \approx 4$  Гс.

Если магнитное поле превышает  $(H_0)_{c1}$ , то в системе возникает вихревая структура. В непрерывном пределе можно ввести понятие о двумерной плотности вихрей  $n_v(\rho)$ . Энергия системы вихрей равна

$$E = \int E_v(\rho) n_v(\rho) d^2 \rho + \frac{1}{2} \int n_v(\mathbf{r}_1) U(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) n_v(\mathbf{r}_2) d^2 \rho_1 d^2 \rho_2, \quad (4.22)$$

где  $E_v(\rho)$  — энергия одного вихря,  $U(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$  — энергия взаимодействия между вихрями. Явный вид этих функций следующий

$$E_v(\rho) = \frac{\pi \hbar^2 n_s}{M} \left( \ln \frac{R^2 - \rho^2}{R\xi} - \frac{R - \rho}{\lambda} \right), \quad (4.23)$$

$$U(\rho_1, \rho_2) = \frac{\pi \hbar^2 n_s}{M} \ln \frac{R^2 - 2\rho_1\rho_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \rho_1^2 \rho_2^2 / R^2}{\rho_1^2 - 2\rho_1\rho_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \rho_2^2}, \quad (4.24)$$

где  $\varphi_i$  — угловая координата  $i$ -го вихря,  $\lambda = \lambda_H^2 / 2d$  и  $\lambda_H = \sqrt{\hbar c / eH_0}$  — магнитная длина. При  $H_0 \gg (H_0)_{c1}$  выполняется неравенство  $\lambda \ll R$ . Плотность вихрей, которая находится из условия минимума энергии системы вихрей, равна

$$n_v(\rho) = \frac{1}{4\pi\lambda\rho} \quad (4.25)$$

(при  $R - \rho \gg \sqrt{R\lambda}$ ).

Из соображений симметрии следует, что вихри будут лежать на окружностях, центры которых совпадают с центром диска. По известной плотности вихрей (4.25) легко найти число вихрей на  $i$ -й окружности

$$N_i = \int_{\rho_i}^{\rho_{i+1}} \rho d\rho \int_0^{2\pi} d\varphi n_v(\rho) = \frac{\rho_{i+1} - \rho_i}{2\lambda}, \quad (4.26)$$

где  $\rho_i$  — радиус  $i$ -й окружности.

Анализ, который мы здесь опускаем, показывает, что разница радиусов соседних окружностей, на которых лежат центры вихрей, подчиняются соотношению

$$(\rho_{i+1} - \rho_i)^2 = 4g\lambda\rho_i, \quad (4.27)$$

где  $g \approx 1,4$  [80]. Качественно подобные результаты можно получить из континуального приближения, считая распределение вихрей локально изотропным. Тогда расстояние между вихрями на данной окружности должно быть примерно таким же, как расстояние между соседними окружностями, т.е.  $2\pi\rho_i / N_i = \rho_{i+1} - \rho_i$ . Это дает (4.27) с  $g = \pi$ .

Плотность вихрей можно также найти другим способом, определив эффективный векторный потенциал и эффективное магнитное поле. Каждый вихрь несет на себе квант эффективного поля. В непрерывном пределе искомая плотность вихрей есть отношение  $z$ -компоненты эффективного магнитного поля к кванту потока  $\hbar c / e$ .

Согласно (4.13), ток пар в неоднородном магнитном поле можно задать с помощью уравнения Лондонов, введя эффективный векторный потенциал

$$\mathbf{A}_{\text{eff}} = \mathbf{H} \times \mathbf{z}d. \quad (4.28)$$

Этому потенциалу соответствует  $z$ -компонента эффективного магнитного поля

$$B_{z,\text{eff}} = (\nabla \times \mathbf{A}_{\text{eff}})_z = -d \left( \frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y} \right) = d \frac{\partial H_z}{\partial z}. \quad (4.29)$$

Из (4.29) находится плотность вихрей

$$n_v = \frac{ed}{\hbar c} \left| \frac{\partial H_z}{\partial z} \right|. \quad (4.30)$$

Если азимутальная компонента истинного магнитного поля равна нулю, то из  $\text{div} \mathbf{H} = 0$  и (4.29) следует

$$B_{z,\text{eff}} = -\frac{d}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho H_\rho). \quad (4.31)$$

В рассмотренном выше магнитном поле (4.20) эффективное поле зависит от  $\rho$ ,

$$|B_{z,\text{eff}}| = \frac{dH_0}{\sqrt{\rho^2 + a^2}}, \quad (4.32)$$

и поэтому плотность вихрей будет неоднородной. При  $\rho \gg a$  эта плотность равна  $n_v(\rho) = 1 / 4\pi\rho\lambda$ , что совпадает с (4.25).

В работе [79] рассмотрен другой способ создания неоднородного магнитного поля. Предлагалось использовать в качестве источника неоднородного поля длинный соленоид. На торце такого соленоида радиальная компонента поля при  $\rho \ll R_s$  ( $R_s$  — радиус соленоида) равна

$$H_\rho = H_s \frac{\rho}{4R_s}, \quad (4.33)$$

где  $H_s$  — магнитное поле внутри соленоида. Азимутальная компонента поля равна нулю. Если на торец соленоида поместить двухслойную систему, то поле соленоида будет индуцировать в этой системе вихри. Если центр двухслойной системы в форме диска радиусом  $R$  лежит на оси соленоида, то появление вихря становится энергетически выгодным, когда поле на краю диска достигает

$$H_{\text{edge},c1} = \frac{\Phi_0}{2\pi dR} \ln \frac{R}{\xi} \quad (4.34)$$

(при  $R \ll R_s$ ). Это поле такого же порядка, что и критическое поле (4.21). Поле на краю диска (4.34) отвечает полю внутри соленоида

$$H_s = \frac{4R_s}{R} H_{\text{edge}}. \quad (4.35)$$

При  $R_s = 1$  см,  $R = 10^{-1}$  см и  $d \approx \xi \approx 10^{-6}$  см условие (4.34) выполняется для  $H_s \approx 300$  Гс.

Магнитному полю (4.33) соответствует однородное эффективное поле

$$|B_{z,\text{eff}}| = \frac{2dH_{\text{edge}}}{R}. \quad (4.36)$$

При  $H_{\text{edge}} \gg H_{\text{edge},c1}$  плотность вихрей, индуцированных таким полем, будет однородной и равной



$$n_v = \frac{|B_{z,\text{eff}}|}{\Phi_0} = \frac{d}{\pi\lambda_H^2 R}, \quad (4.37)$$

где  $\lambda_H = \sqrt{\hbar c/eH_{\text{edge}}}$ .

Таким образом, хотя электрон-дырочные пары являются нейтральными, в сверхтекучем газе таких пар можно возбуждать вихри с помощью неоднородного магнитного поля, если последнее обладает отличной от нуля двумерной дивергенцией в плоскости системы.

Оказывается, что вихри в газе электрон-дырочных пар можно также возбуждать, помещая систему в однородное магнитное и неоднородное электрическое поле [82,83]. Неоднородное электрическое поле возникает, в частности, в экспериментах, в которых исследуется бозе-эйнштейновская конденсация оптически возбуждаемых пространственно непрямыми экситонами [84,85]. Пространственно не прямые экситоны имеют дипольный момент, ориентированный нормально к плоскости слоев, что приводит к отталкиванию между экситонами, и в случае оптического возбуждения таких экситонов имеется проблема удержания их от разлета в плоскости проводящих слоев. Эту проблему решают с помощью создания ловушки, захватывающей экситоны. В качестве такой ловушки используют заряженный металлический диск, помещенный над двухслойной системой [86,87]. Плотность экситонов определяется из условия баланса энергии, обусловленной отталкиванием между экситонами, и энергии, происходящей от взаимодействия с электрическим полем.

В [83] рассмотрена двухслойная электрон-дырочная структура в однородном нормальном к плоскости структуры магнитном поле  $\mathbf{B}$  и неоднородном электрическом поле заряженного диска, расположенного параллельно плоскости структуры. В случае, когда расстояние между слоями превышает боровский радиус электрон-дырочной пары, энергия отталкивания между компонентами пары (в пересчете на одну пару) равна  $E_{d-d} = 4\pi d e^2 n_{\text{ex}}/\epsilon$ , где  $n_{\text{ex}}$  — плотность пар. Приравнявая эту энергию энергии взаимодействия экситонов с полем заряженного диска  $E_{\text{int}} \approx ed\partial\phi/\partial z$  ( $\phi$  — электростатический потенциал диска, ось  $z$  направлена перпендикулярно проводящим слоям), можно найти  $n_{\text{ex}}(\mathbf{r})$ . Потенциал электрического поля, создаваемого в окружающем пространстве диском радиуса  $R$  с зарядом  $Q$ , равен (см., например, [88])

$$\phi(r, z) = \frac{Q}{R} \arctg \times \left( \frac{2R^2}{r^2 + z^2 - R^2 + \sqrt{(r^2 + z^2 - R^2)^2 + 4z^2 R^2}} \right)^{1/2}, \quad (4.38)$$

где  $r$  — радиальная координата. В потенциале (4.38) распределение пар будет неоднородным. При  $R \gg l \gg d$  и

$r \gg l$  и  $R - r \gg l$ , где  $l$  — расстояние от диска до двухслойной системы,

$$n_{\text{ex}}(r) = \frac{\epsilon}{4\pi e} \frac{Q}{R\sqrt{R^2 - r^2}}. \quad (4.39)$$

Параллельная слоям компонента электрического поля диска и нормальное к слоям магнитное поле  $\mathbf{B}$  приводят к возникновению эффективного векторного потенциала  $\mathbf{A}_{\text{eff}} = \alpha\mathbf{B} \times \mathbf{E}/e$ , где  $\alpha$  — поляризуемость пары. Электрическое поле диска имеет радиальную компоненту, равную

$$\mathbf{E}_r = \frac{r l}{(R^2 - r^2)^{3/2}} \frac{Q}{R} \quad (4.40)$$

(для  $R - l > r \gg l$ ), что отвечает тангенциальной компоненте эффективного векторного потенциала и нормальному к слоям эффективному магнитному полю. Условие возбуждения вихрей можно задать, определив критический заряд диска  $Q_c$  и связанный с ним критический потенциал диска  $\phi_c = \pi Q_c/2R$ , при превышении которых это условие выполняется. С учетом (4.39), (4.40)

$$\phi_c = \frac{\pi c \hbar}{\alpha B} \ln \frac{2R}{\xi}, \quad (4.41)$$

где  $\alpha$  — поляризуемость пары. Множитель 2 в аргументе логарифма возник из-за неоднородной плотности экситонов. В двухслойной системе с  $d > a_0$  поляризуемость пар можно оценить как  $\alpha \approx d^3$ . Полагая  $R/\xi = 10^5$ ,  $d = 10^{-6}$  см и  $B = 10^3$  Гс, из (4.41) получаем оценку для критического потенциала  $\phi_c \approx 10^2$  В.

### 5. Двухслойные квантовые холловские системы с межслоевой спонтанной фазовой когерентностью

Важная веха в исследовании проблемы сверхпроводимости электрон-дырочных пар связана с идеей использовать сильное нормальное к слоям магнитное поле и реализовать спаривание носителей, принадлежащих нулевому уровню Ландау. Впервые этот вопрос рассматривался в работе [89] применительно к электрон-дырочной системе.

Стартовой точкой анализа [89] является гамильтониан системы, записанный в приближении нулевого уровня Ландау. Условие применимости такого приближения состоит в малости характерной энергии кулоновского взаимодействия по сравнению энергетической щелью между уровнями Ландау. Данное условие эквивалентно условию малости магнитной длины  $\ell = \sqrt{\hbar c/eB}$  по сравнению с эффективным боровским радиусом  $a_0$  (характерным размером пары в отсутствие магнитного поля).

Гамильтониан системы, записанный в приближении нулевого уровня Ландау, имеет вид



$$H = \frac{1}{2S} \sum_{i,j=e,h} \sum_{\mathbf{q}} V_{ij}(\mathbf{q}) \left[ \rho_i(\mathbf{q}) \rho_j(-\mathbf{q}) - \delta_{ik} \rho_i(0) e^{-\frac{q^2 \ell^2}{2}} \right], \quad (5.1)$$

где  $V_{ij}(\mathbf{q})$  — фурье-компонента кулоновского потенциала,

$$\rho_e(\mathbf{q}) = \sum_X e^{-\frac{q^2 \ell^2}{4} - i q_x X} c_X^+ \frac{1}{X + \frac{q_y \ell^2}{2}} \frac{1}{X - \frac{q_y \ell^2}{2}}, \quad (5.2)$$

$$\rho_h(\mathbf{q}) = \sum_X e^{-\frac{q^2 \ell^2}{4} - i q_x X} h_X^+ \frac{1}{X - \frac{q_y \ell^2}{2}} \frac{1}{X + \frac{q_y \ell^2}{2}}, \quad (5.3)$$

фурье-компоненты операторов электронной и дырочной плотности,  $c_X^+$  и  $h_X^+$  — операторы рождения электрона и дырки на нулевом уровне Ландау,  $X$  — координата центра орбиты электрона (дырки),  $\delta_{ik}$  — символ Кронекера, и  $S$  — площадь системы.

Параметр порядка для системы с электрон-дырочным спариванием вводится аналогично параметру порядка БКШ,

$$\Delta = -\frac{1}{S} \sum_{\mathbf{q}} V_{eh}(\mathbf{q}) e^{-\frac{q^2 \ell^2}{2}} \langle h_X c_X \rangle = J \langle h_X c_X \rangle, \quad (5.4)$$

где

$$J = \frac{1}{S} \sum_{\mathbf{q}} |V_{eh}(\mathbf{q})| e^{-\frac{q^2 \ell^2}{2}}.$$

Предполагается, что концентрации электронов и дырок одинаковы  $n_e = n_h = n$  и факторы заполнения нулевого уровня Ландау в электронном и дырочном слоях  $\nu = 2\pi \ell^2 n$  меньше единицы. Гамильтониан системы, записанный в приближении среднего поля, имеет вид

$$H_{MF} = \sum_X \left[ \xi \left( c_X^+ c_X + h_X^+ h_X \right) - \left( \Delta c_X^+ h_X^+ + \text{H.c.} \right) \right], \quad (5.5)$$

где  $\xi = -I\nu - \mu$ ,  $\mu$  — химический потенциал, и

$$I = \frac{1}{S} \sum_{\mathbf{q}} V_{ee}(\mathbf{q}) e^{-\frac{q^2 \ell^2}{2}}.$$

Параметр порядка и химический потенциал удовлетворяют уравнениям самосогласования

$$\Delta = J \frac{\Delta}{2E} \text{th} \frac{E}{2T}, \quad (5.6)$$

$$\nu = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{\xi}{E} \text{th} \frac{E}{2T} \right). \quad (5.7)$$

Из уравнений (5.6) и (5.7) вытекает следующее выражение для критической температуры

$$T_c = \frac{J}{2} \frac{|2\nu - 1|}{\ln \frac{1 + |2\nu - 1|}{1 - |2\nu - 1|}}. \quad (5.8)$$

Максимальная критическая температура достигается при факторе заполнения  $\nu = 1/2$ . Эта температура равна

$$T_{c,\max} = \frac{J}{4} = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{e^2}{\varepsilon \ell} \exp\left(\frac{d^2}{2\ell^2}\right) \text{erfc}\left(\frac{d}{\sqrt{2}\ell}\right). \quad (5.9)$$

Критическая температура уменьшается с ростом  $d$ . При  $d/\ell = 1$  критическая температура  $T_{c,\max} \approx 0.16e^2/\varepsilon\ell$ , что для магнитного поля  $B = 2$  Тл и диэлектрической проницаемости  $\varepsilon = 12$  составляет  $T_{c,\max} \approx 13$  К. При  $\nu = 1/2$  размер пары такого же порядка, что и расстояние между парами (порядка магнитной длины) и связь нельзя рассматривать как слабую. Температуру сверхпроводящего перехода  $T_{BKT}$  нужно определять из уравнения Костерлица–Таулесса (2.17). Это уравнение дает температуру перехода существенно ниже (см. далее в этом разделе) критической температуры (5.9). Температуру  $T_c$  можно интерпретировать как температуру диссоциации электрон-дырочных пар.

Неожиданный поворот в изучении сверхпроводимости в системах со спариванием пространственно разделенных носителей произошел после осознания того факта, что спаривание возможно в двухслойных системах с одинаковым типом проводимости слоев. На эту возможность впервые обратили внимание авторы работ [90,91]. На первый взгляд кажется, что в двухслойной системе с одинаковым типом проводимости слоев невозможно получить спаривание носителей при учете только кулоновского отталкивания между ними. Однако если уровень Ландау заполнен частично и работает приближение нулевого уровня Ландау, незанятые состояния на нулевом уровне выступают в роли дырок. В приближении нулевого уровня Ландау существует точное преобразование [92], переводящее электрон-электронную систему с факторами заполнения уровней Ландау в слоях 1 и 2, равными  $\nu_1$  и  $\nu_2$ , соответственно, в электрон-дырочную систему с факторами заполнения слоев  $\nu_e = \nu_1$  и  $\nu_h = 1 - \nu_2$ . Это означает, что при  $\nu_1 + \nu_2 = 1$  спаривание в двухслойных электронных системах будет таким же, как и в электрон-дырочных. О спаривании в двухслойных системах с одинаковым типом проводимости часто говорят как о спонтанной межслоевой фазовой когерентности. Этот термин восходит к работе [93].

Развитие технологии получения гетероструктур с квантовыми ямами позволило открыть ряд фундаментальных явлений, в частности дробный квантовый эффект Холла. Эксперименты, в которых изучались транспортные свойства двухслойных квантовых холловских

систем, показали, что в них, действительно, имеет место когерентное движение носителей в соседних слоях. Это проявляется в занулении холловского напряжения и экспоненциальном возрастании продольной проводимости при пропускании через слои противоположно направленных электрических токов [94–97], а также в полном межслоевом увлечении [98] (более подробно эти работы обсуждаются в разд. 6).

Если в качестве вакуумного выбрать состояние с полнотью заполненным нулевым уровнем Ландау в слое 1

$$|vac\rangle = \prod_X c_{1X}^+ |0\rangle, \quad (5.10)$$

то вариационную волновую функцию двухслойной электронной системы в магнитном поле можно записать в стандартной БКШ форме

$$|\Psi\rangle = \prod_X \left( u + v c_{2X}^+ h_{1X}^+ \right) |vac\rangle. \quad (5.11)$$

Оператор рождения дырки совпадает с оператором уничтожения электрона  $h_{1X}^+ = c_{1X}$ . Подстановка (5.10) в (5.11) дает следующую эквивалентную форму записи этой волновой функции

$$|\Psi\rangle = \prod_X \left( u c_{1X}^+ + v c_{2X}^+ \right) |0\rangle. \quad (5.12)$$

Такой подход к описанию систем со спариванием пространственно разделенных носителей при наличии сильного магнитного поля идейно близок к подходу, используемому для систем без магнитного поля (разд. 2).

Естественным также является использование подхода, применяемого в теории дробного квантового эффекта Холла. Идея состоит в обобщении волновой функции, предложенной Лафлиным [99] для однослойной системы, на двухслойный случай. Обобщение было сделано в работе Вена и Зи [100], которые предложили в качестве волновой функции двухслойной электронной системы выражение

$$\Psi_{lmn} = \prod_{i<j}^{N_1} (z_i - z_j)^l \prod_{i'<j'}^{N_2} (w_{i'} - w_{j'})^m \times \prod_{i''=1}^{N_1} \prod_{j''=1}^{N_2} (z_{i''} - w_{j''})^n \exp \left[ -\frac{1}{4} \sum_i^{N_1} |z_i|^2 - \frac{1}{4} \sum_i^{N_2} |w_i|^2 \right], \quad (5.13)$$

где  $z_i = (x_{1i} + iy_{1i})/\ell$ ,  $w_i = (x_{2i} + iy_{2i})/\ell$  — комплексные координаты  $i$ -го электрона в слое 1 и 2, соответственно, и  $N_i$  — число электронов в слое  $i$ . Функция такого вида была ранее использована Гальпериным [101] для описания двухкомпонентной однослойной квантовой холловской системы (рассматривались две спиновые компоненты). Волновая функция (5.13) переходит в волновую функцию Лафлина, если оставить в ней множители, зависящие только от координат  $z_i$ .

Функция (5.13) определяется набором натуральных чисел  $(l, m, n)$ , которые находятся из соображений [101], подобных соображениям Лафлина [99]. При движении электрона по замкнутому контуру, обходящему другие электроны, фаза волновой функции должна меняться на величину  $\Delta\varphi = 2\pi BS/\Phi_0$  ( $S$  — площадь контура, и  $\Phi_0$  — квант магнитного потока). Если бы это свойство не выполнялось, скорость электрона, которая определяется градиентно-инвариантной комбинацией  $\mathbf{v} = (\hbar\nabla\varphi - e\mathbf{A}/c)/m$ , получала бы постоянную добавку при движении по такому контуру, и кинетическая энергия электрона  $mv^2/2$  стала бы аномально большой. Поэтому внутри контура волновая функция должна содержать  $BS/\Phi_0$  вихрей, т.е. точек, в которых волновая функция обращается в нуль, а фаза при обходе вокруг таких точек меняется на  $2\pi$ . Для соблюдения принципа Паули необходимо, чтобы в месте нахождения каждого электрона  $z_i$  имелся по меньшей мере один вихрь. Волновая функция, предложенная Лафлиным, характеризуется той особенностью, что при каждом  $z_i$  существует в точности  $l$  вихрей. В двухслойной системе требование  $\Delta\varphi = 2\pi BS/\Phi_0$  приводит к условию [100]

$$(N_1 - 1)l + N_2n = N_1n + (N_2 - 1)m = N_\varphi, \quad (5.14)$$

где  $N_i$  — число электронов в слое  $i$ , и  $N_\varphi$  — число квантов потока магнитного поля. Показатели  $l, m$  и  $n$  являются неотрицательными целыми числами, причем  $l$  и  $m$  должны быть нечетными, чтобы волновая функция (5.13) удовлетворяла статистике Ферми.

Если  $N_1 + N_2 = N_\varphi + 1$ , то из (5.14) следует, что  $l = m = n = 1$ . С точностью до  $1/N_\varphi$  это условие соответствует суммарному фактору заполнения слоев  $\nu_T = \nu_1 + \nu_2 = (N_1 + N_2)/N_\varphi = 1$ . Выбор  $l = m = n = 1$  дает волновую функцию, получившую название  $\Psi_{111}$ . В отличие от общего случая, волновая функция  $\Psi_{111}$  отвечает состоянию, в котором зафиксирован лишь суммарный фактор заполнения, а не одновременно оба фактора  $\nu_1$  и  $\nu_2$ . Вариация разбаланса  $\nu_1 - \nu_2$  не меняет топологии волновой функции (числа вихрей, «привязанных» к каждому электрону). Это означает существование в системе звуковой моды.

Два способа описания электрон-дырочной сверхпроводимости в двухслойных электронных системах в сильных магнитных полях (в терминах волновой функции БКШ и волновой функции  $\Psi_{111}$ ), на первый взгляд, весьма далеки друг от друга. На самом деле, они оказываются тождественными. Это утверждение есть следствие несколько неожиданного факта, заключающегося в том, что волновая функция Гальперина при  $l = m = n = 1$  является в точности координатным представлением волновой функций БКШ (5.12) (см., например, [102]). Приведем доказательство этого утверждения.

Связь между многочастичной волновой функцией в представлении вторичного квантования и ее координатным представлением имеет вид [103]

$$\Phi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N) = \langle 0 | \psi(\mathbf{r}_1) \psi(\mathbf{r}_2) \dots \psi(\mathbf{r}_N) | \Psi \rangle, \quad (5.15)$$

где  $\psi(\mathbf{r})$  — одночастичный оператор уничтожения электрона.

Функция (5.12) содержит произведение по всем квантовым состояниям на уровне Ландау, которые задаются координатой центра орбиты  $X$ . Эту же функцию можно записать, перейдя к полному набору квантовых чисел  $m$ , отвечающих орбитальному моменту квантового состояния

$$| \Psi \rangle = \prod_{m=0}^{N-1} (u c_1^+(m) + v c_2^+(m)) | 0 \rangle. \quad (5.16)$$

Оператор уничтожения электрона в  $i$ -м слое на нулевом уровне Ландау имеет вид

$$\psi_i(z) = \sum_{m=0}^{M-1} \Psi_m(z) c_i(m), \quad (5.17)$$

где

$$\Psi_m(z) = C_m z^m \exp\left(-\frac{|z|^2}{4}\right) \quad (5.18)$$

есть одночастичная волновая функция с заданным орбитальным моментом, и  $C_m = 1/\sqrt{2\pi\ell^2 2^m m!}$  - нормировочный множитель.

Подстановка (5.16), (5.17), (5.18) в (5.15) дает

$$\begin{aligned} & \Phi(z_1, z_2, \dots, z_{N_1}, w_1, w_2, \dots, w_{N_2}) = \\ & = (-1)^{N(N-1)/2} u^{N_1} v^{N_2} \left( \prod_{m=0}^{N-1} C_m \right) \times \\ & \times \exp\left[-\frac{1}{4} \left( \sum_{i=1}^{N_1} |z_i|^2 + \sum_{j=1}^{N_2} |w_j|^2 \right)\right] \times \\ & \times \sum_P (-1)^P z_1^{m_1} z_2^{m_2} \dots z_{N_1}^{m_{N_1}} w_1^{m'_1} w_2^{m'_2} \dots w_{N_2}^{m'_{N_2}} \end{aligned} \quad (5.19)$$

где  $N = N_1 + N_2$  и суммирование выполняется по всем перестановкам индексов  $m_1 \neq m_2 \neq \dots \neq m_{N_1} \neq m'_1 \neq m'_2 \neq \dots \neq m'_{N_2}$ . С учетом того, что сумма в (5.19) есть определитель Вандермонда

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^{N-1} \\ 1 & x_2 & \dots & x_2^{N-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_N & \dots & x_N^{N-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq j < i \leq N} (x_i - x_j), \quad (5.20)$$

выражение (5.19), с точностью до нормировочного множителя, совпадает с функцией  $\Psi_{111}$ . Отсюда следует, что результаты, которые можно получить с помощью подхода [100], должны совпадать с результатами, которые получаются при использовании волновой функции БКШ.

В [93] для описания состояния со спонтанной межслоевой фазовой когерентностью используется псевдоспиновый язык. В рамках такого описания состояние со спонтанной межслоевой фазовой когерентностью формально эквивалентно ферромагнетику со спином 1/2 с анизотропией типа «легкая плоскость». Коллективные нейтральные возбуждения системы представляют собой аналог спиновых волн, а вихри на этом языке можно описать как спиновые текстуры. Строго говоря, эти текстуры следует называть псевдоспиновыми, но мы везде в дальнейшем, где это не может привести к недоразумению, будем опускать приставку «псевдо».

На спиновом языке индекс слоя  $i = 1, 2$  отождествляется с проекцией псевдоспина  $\sigma = \uparrow, \downarrow$ . Спиноры  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  и  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  описывают состояния с электроном в верхнем и нижнем слое соответственно. Их когерентной суперпозиции

$$\alpha_\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + e^{i\varphi} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ e^{i\varphi} \end{pmatrix} \quad (5.21)$$

отвечает состоянию с магнитным моментом, лежащим в плоскости  $(x, y)$ .

Мерой упорядочения является вектор намагниченности  $\mathbf{M}(\mathbf{r})$ . Его величина и направление характеризуются углами  $\theta(\mathbf{r})$  и  $\varphi(\mathbf{r})$ . Волновая функция (5.12) записывается в виде

$$| \Psi \rangle = \prod_X \left( \cos \frac{\theta(X)}{2} c_{1X}^+ + e^{i\varphi(X)} \sin \frac{\theta(X)}{2} c_{2X}^+ \right) | 0 \rangle. \quad (5.22)$$

Для нахождения вектора намагниченности используется оператор спиновой плотности

$$\mathbf{S}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} \psi_i^+(\mathbf{r}) \mathbf{s}_{ij} \psi_j(\mathbf{r}), \quad (5.23)$$

где  $\psi_i^+(\mathbf{r})$  и  $\psi_i(\mathbf{r})$  — операторы рождения и уничтожения электрона в слое  $i$ ,  $\mathbf{s} = \sum_{\alpha=x,y,z} \sigma_\alpha \mathbf{i}_\alpha$ ,  $\sigma_\alpha$  — матрицы Паули,  $\mathbf{i}_\alpha$  — единичный орт. С помощью разложения операторов  $\psi_i^+(\mathbf{r})$

$$\psi_i^+(\mathbf{r}) = \sum_X \Phi_X(\mathbf{r}) c_{iX}^+, \quad (5.24)$$

где  $\Phi_X(\mathbf{r})$  — волновая функция электрона на нижнем уровне Ландау в калибровке Ландау, находится зависимость намагниченности от координаты

$$\begin{aligned} \mathbf{M}(\mathbf{r}) &= \langle \Psi | \mathbf{S}(\mathbf{r}) | \Psi \rangle = \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{4\pi\ell^2} \int \frac{dX}{\ell} \mathbf{m}(X) e^{-\frac{(x-X)^2}{\ell^2}}. \end{aligned} \quad (5.25)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \mathbf{m}(X) &= (m_x, m_y, m_z) = \\ &= (\sin\theta(X)\cos\varphi(X), \sin\theta(X)\sin\varphi(X), \cos\theta(X)) \end{aligned} \quad (5.26)$$

— единичный вектор. Если характерная длина, на которой изменяются  $\theta(X)$  и  $\varphi(X)$ , существенно больше магнитной длины, то  $\mathbf{M}(\mathbf{r}) \approx \mathbf{m}(x)/4\pi\ell^2$ . Состояние, для которого углы  $\theta$  и  $\varphi$  зависят от координат, отвечает некоторой магнитной текстуре.

Случай  $\theta(X) = \text{const}$ ,  $\varphi(X) = \text{const}$  соответствует ферромагнитному состоянию, для которого вектор намагниченности не зависит от координат. Это состояние отвечает факторам заполнения слоев  $\nu_{1(2)} = (1 \pm \cos\theta)/2$ . Половинному заполнению слоев  $\nu_1 = \nu_2 = 1/2$  сопоставляется угол  $\theta = \pi/2$ . Энергия ферромагнитного состояния не зависит от  $\varphi$ .

Вектор намагниченности связан простым соотношением с параметром порядка, характеризующим электрон-дырочное спаривание,

$$\begin{aligned} M_+ &= \langle \Psi | S_x + iS_y | \Psi \rangle = \frac{1}{2} \langle \Psi | \psi_i^\dagger(\mathbf{r})(\sigma_{ij}^x + i\sigma_{ij}^y)\psi_j(\mathbf{r}) | \Psi \rangle = \\ &= \langle \Psi | \psi_1^\dagger(\mathbf{r})\psi_2(\mathbf{r}) | \Psi \rangle \equiv \Delta(\mathbf{r}). \end{aligned} \quad (5.27)$$

Отметим, что параметр порядка  $\Delta(\mathbf{r})$  (5.27) отличается от введенного ранее (5.4). Параметр порядка (5.27) зависит от  $\mathbf{r}$ , а не от центра орбиты  $X$ , и имеет другую размерность.

Состояние с  $\theta = \text{const}$  и  $\varphi(X) = QX$  отвечает фазе с однородной плотностью пар и отличным от нуля сверхтекучим потоком. Действительно, в этом случае из (5.22) и (5.27) следует

$$\Delta(\mathbf{r}) = e^{iQx} e^{-\frac{Q^2\ell^2}{4}} \frac{\sqrt{v(1-v)}}{2\pi\ell^2} \quad (5.28)$$

(здесь и далее  $v = \nu_1$ ), т.е.  $Q$  есть производная по  $x$  от фазы параметра порядка, а отличие от нуля градиента фазы параметра порядка означает наличие сверхтекучего потока.

Для электрон-электронной системы гамильтониан кулоновского взаимодействия на нижнем уровне Ландау записывается аналогично (5.1),

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2S} \sum_{i,j=1,2} \sum_{\mathbf{q}} \frac{2\pi e^2}{\varepsilon q} \times \\ &\times e^{-qd|i-j|} \left[ \rho_i(\mathbf{q})\rho_j(-\mathbf{q}) - \delta_{ik}\rho_i(0)e^{-\frac{q^2\ell^2}{2}} \right], \end{aligned} \quad (5.29)$$

где  $\rho_i(\mathbf{q})$  — оператор электронной плотности (5.2). Гамильтониан (5.29), усредненный с волновой функцией (5.22), дает энергию рассматриваемого состояния (см., например, [104])

$$E = \frac{S}{8\pi\ell^2} \left( [W - F_S(0)] \cos^2\theta - F_D(Q) \sin^2\theta \right). \quad (5.30)$$

Слагаемое, пропорциональное  $W = e^2 d/\varepsilon\ell^2$ , отвечает прямому взаимодействию, а слагаемые, пропорциональные  $F_S(0)$  и  $F_D(Q)$  — обменному внутрислойному и межслойному взаимодействию соответственно. Величины  $F_S(0)$  и  $F_D(Q)$  и есть частные значения функций  $F_S(q)$  и  $F_D(q)$ , задаваемых интегралами

$$F_S(q) = \frac{e^2}{\varepsilon\ell} \int_0^\infty dx J_0(xq\ell) e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad (5.31)$$

$$F_D(q) = \frac{e^2}{\varepsilon\ell} \int_0^\infty dx J_0(xq\ell) e^{-\frac{\tilde{d}x - x^2}{2}}, \quad (5.32)$$

где  $J_0(x)$  — функция Бесселя нулевого порядка и  $\tilde{d} = d/\ell$ .

Электрические токи в слоях находятся через вариационную производную от энергии по векторному потенциалу  $j_{xi} = -c\delta E/\delta A_{xi}$ . Замена  $Q$  в (5.30) на градиенто-инвариантную комбинацию  $Q - \frac{e}{\hbar c}(A_{x1} - A_{x2})$  и дифференцирование по  $A_{xi}$  дает следующее выражение для токов

$$j_1 = -j_2 = \frac{e}{\hbar} \rho_{s0} \left[ Q - \frac{e}{\hbar c}(A_{x1} - A_{x2}) \right], \quad (5.33)$$

где

$$\rho_{s0} = \frac{v(1-v)}{4\sqrt{2}\pi} \frac{e^2}{\varepsilon\ell} \left[ \text{erfc}\left(\frac{\tilde{d}}{\sqrt{2}}\right) e^{\frac{\tilde{d}^2}{2}} (\tilde{d}^2 + 1) - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \tilde{d} \right]. \quad (5.34)$$

Ответ (5.33) получен в предположении  $Q - \frac{e}{\hbar c}(A_{x1} - A_{x2}) \ll 1$ . Введенную таким образом величину  $\rho_{s0}$  принято называть сверхтекучей или фазовой жесткостью. На магнитном языке ее также называют спиновой жесткостью [93,105–107].

Чтобы понять причину появления в этом определении слова «жесткость», отметим, что энергия системы в пределе  $Q\ell \ll 1$  имеет вид

$$E = E_0 + \frac{S}{2} \rho_{s0} (\nabla\varphi)^2 \quad (5.35)$$

(при  $\mathbf{A} = 0$ ). Выражение (5.35) по форме совпадает с выражением для упругой энергии деформированного тела. Кинетическую энергию сверхтекучей жидкости на единицу площади обычно записывают в виде [108]

$$E_s = \frac{1}{2} M n_s v_s^2 = \frac{\hbar^2 n_s}{2M} (\nabla\varphi)^2, \quad (5.36)$$

где  $n_s$  — сверхтекучая плотность,  $v_s = \hbar\nabla\varphi/M$  — сверхтекучая скорость,  $M$  — масса частиц. Сверхтекучая жесткость в этом случае равна

$$\rho_s = \frac{\hbar^2 n_s}{M}. \quad (5.37)$$

Соответствие между определениями (5.34) и (5.37) устанавливается, если известна эффективная масса электрон-дырочной пары в магнитном поле. Эту массу можно найти из спектра невзаимодействующих магнитоэкситонов [109]. При  $q\ell \ll 1$  этот спектр можно аппроксимировать выражением  $E_{\text{ex}}(q) = E_0 + \hbar^2 q^2 / 2M$ , где

$$M = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \frac{\hbar^2 \epsilon}{e^2 \ell} \left[ \operatorname{erfc} \left( \frac{\tilde{d}}{\sqrt{2}} \right) e^{\frac{\tilde{d}^2}{2} (\tilde{d}^2 + 1)} - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \tilde{d} \right]^{-1} \quad (5.38)$$

— магнитная масса магнитоэкситона при  $d \neq 0$ . Отметим, что в приближении нулевого уровня Ландау эта масса не зависит от истинной массы электрона. Она обусловлена кулоновским взаимодействием между электронами и зависит от магнитного поля. Ослабление кулоновского взаимодействия, например за счет увеличения диэлектрической проницаемости  $\epsilon$ , приводит к росту массы магнитоэкситона. В отсутствие взаимодействия магнитоэкситон становится бесконечно тяжелым ( $M \rightarrow \infty$ ). Из (5.33) и (5.37) следует, что при этом ток пар равен нулю.

С учетом (5.38) выражение (5.34) для сверхтекучей жесткости приобретает вид

$$\rho_{s0} = \frac{\hbar^2 v(1-v)}{M 2\pi\ell^2}. \quad (5.39)$$

Из сравнения (5.39) и (5.37) можно определить сверхтекучую плотность  $n_s = v(1-v)/2\pi\ell^2$ . В случае малой плотности электронов в слое 1 ( $v \ll 1$ ) или в слое 2 ( $1-v \ll 1$ ) можно говорить о сильно разреженном газе магнитоэкситонов с плотностью  $n_{\text{ex}} = v/2\pi\ell^2$  (или  $n_{\text{ex}} = (1-v)/2\pi\ell^2$ ). Сверхтекучая плотность  $n_s$  в этом пределе совпадает с плотностью магнитоэкситонов (напомним, что здесь обсуждается случай  $T = 0$ ). При

$v = 1/2$  введенная таким формальным способом сверхтекучая плотность составляет половину плотности электронов в слое, что, однако, не несет какого-то особого физического смысла. Дело в том, что при половинном заполнении уровней Ландау картина спаривания электронов с дырками перестает быть наглядной. Нельзя однозначно говорить о спаривании электронов верхнего слоя с дырками нижнего слоя либо о спаривании электронов нижнего слоя с дырками верхнего слоя, либо о спаривании одновременно двух типов. Спаривание в этом случае нужно понимать как появление специфических корреляций между электронами соседних слоев.

Невозможность однозначно определить, электроны и дырки из каких слоев спариваются, приводит также к проблеме корректного определения сверхтекучей скорости. Действительно, переход от картины спаривания «верхних» электронов с «нижними» дырками к картине спаривания «нижних» электронов с «верхними» дырками требует изменения знака сверхтекучей скорости (при сохранении направления электрических токов в слоях). Указанная проблема легко обходится. Направление градиента фазы и направления токов однозначно связаны (см. (5.33)), и при описании рассматриваемой системы в терминах сверхтекучей жесткости и градиента фазы не возникает необходимость использовать понятие сверхтекучей скорости. Ниже мы будем придерживаться именно такого описания.

Излагаемая в этом разделе теория во многом напоминает теорию сверхпроводимости БКШ. Из этой теории следует, что одночастичные возбуждения представляют собой разорванные пары. Энергия таких возбуждений порядка энергии связи пар при  $T = 0$ . Вдали от точки сверхпроводящего перехода  $T_c$  число возбуждений экспоненциально мало. Коллективные возбуждения в случае обычных сверхпроводников, когда спариваются два электрона, не играют существенной роли, так как частоты таких возбуждений порядка плазменной частоты, которая намного превосходит температуру сверхпроводящего перехода. Для рассматриваемых в настоящем обзоре систем, как и для обычных сверхпроводников, энергия одночастичных возбуждения порядка энергии связи пар при  $T = 0$  и вдали от  $T_c$  их число экспоненциально мало. При этом, вследствие электронейтральности пар, коллективные возбуждения, которые представляют собой колебания плотности пар, являются акустическими модами. Именно эти моды вносят основной вклад в нормальную плотность.

Спектр коллективных возбуждений двухслойной системы квантовой холловской системы с факторами заполнения слоев  $\nu_1 = \nu_2 = 1/2$  получен в работе [90]. Находились полюса функции линейного отклика системы на скалярный потенциал внешнего электромагнитного поля. Эти полюса определяют энергии коллективных мод. Функция линейного отклика вычислялась в



приближении, представляющем собой улучшенное приближение хаотических фаз, учитывающее также перенормировку вершин. Было показано, что в длинноволновом пределе при  $d \neq 0$  спектр является акустическим, а при  $d = 0$  совпадает со спектром свободных магнито-экситонов. При  $d/\ell \approx 1$  в спектре появляется «ротонный» минимум, глубина которого увеличивается с ростом  $d$ . При  $d/\ell > 1.2$  полюс функции отклика отвечает мнимому значению энергии возбуждений в области волновых векторов  $q \approx \ell^{-1}$ , что свидетельствует о неустойчивости состояния с электрон-дырочным спариванием.

В [105–107,110] результат [90] был воспроизведен различными методами. В этих работах был также найден спектр коллективных мод при отличном от нуля градиенте фазы параметра порядка ( $\mathbf{Q} \neq 0$ ). Случай  $\mathbf{Q} \neq 0$  отвечает ситуации, когда в системе протекает отличный от нуля сверхток.

Мы остановимся более подробно только на одном из способов получения спектра возбуждений. Этот способ предложен в [107] для анализа случая  $\mathbf{Q} \parallel \mathbf{q}$  и обобщен в [110,111] для произвольного направления  $\mathbf{Q}$ . Отметим, что хотя работа [110] посвящена двухслойным графеновым системам, состояние с межслоевой фазовой когерентностью в квантующем магнитном поле в графеновых системах и в системах с квадратичным спектром носителей описывается одинаковым образом. Поэтому излагаемые ниже результаты носят общий характер.

Состоянию с градиентом фазы, равным  $\mathbf{Q}$ , отвечает волновая функция

$$|\Psi\rangle = \prod_X \left( \cos \frac{\theta_X}{2} c^+_{1,X + \frac{Q_y \ell^2}{2}} + e^{i\varphi_X} \sin \frac{\theta_X}{2} c^+_{2,X - \frac{Q_y \ell^2}{2}} \right) |0\rangle, \quad (5.40)$$

где  $\varphi(X) = \varphi_0 + Q_x X + \tilde{\varphi}_X$ , и  $\tilde{\varphi}_X$  — часть, связанная с флуктуациями фазы. При  $\theta_X = \theta_0$  и  $\tilde{\varphi}_X = 0$  вычисленные параметра порядка (5.27) дает

$$\Delta(\mathbf{r}) \equiv |\Delta(\mathbf{r})| e^{i\varphi(\mathbf{r})} = e^{i\mathbf{Q}\mathbf{r}} e^{-\frac{Q^2 \ell^2}{4} \frac{\sin \theta_0}{4\pi \ell^2}}, \quad (5.41)$$

т.е. волновая функция (5.40) действительно описывает состояние с градиентом фазы параметра порядка  $\mathbf{Q} = (Q_x, Q_y)$ .

Энергия флуктуаций фазы параметра порядка  $\tilde{\varphi}_X$  и его модуля  $\tilde{m}_z(X) = (\cos \theta(X) - \cos \theta_0)/2$  следующим образом выражаются через фурье-компоненты флуктуирующих величин:

$$E_{fl} = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{q}} (\tilde{m}_z(-\mathbf{q}), \tilde{\varphi}(-\mathbf{q})) \begin{pmatrix} K_{zz}(\mathbf{q}) & -iK_{z\varphi}(\mathbf{q}) \\ iK_{z\varphi}(\mathbf{q}) & K_{\varphi\varphi}(\mathbf{q}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{m}_z(\mathbf{q}) \\ \tilde{\varphi}(\mathbf{q}) \end{pmatrix}. \quad (5.42)$$

Величины  $\tilde{\varphi}(\mathbf{q})$  и  $\tilde{m}_z(\mathbf{q})$  являются канонически сопряженными переменными. С учетом (5.42) уравнения движения для этих переменных принимают вид

$$\begin{aligned} \hbar \frac{\partial \tilde{\varphi}(\mathbf{q})}{\partial t} &= K_{zz}(\mathbf{q}) \tilde{m}_z(\mathbf{q}) - iK_{z\varphi}(\mathbf{q}) \tilde{\varphi}(\mathbf{q}), \\ \hbar \frac{\partial \tilde{m}_z(\mathbf{q})}{\partial t} &= -K_{\varphi\varphi}(\mathbf{q}) \tilde{\varphi}(\mathbf{q}) - iK_{z\varphi}(\mathbf{q}) \tilde{m}_z(\mathbf{q}). \end{aligned} \quad (5.43)$$

Из (5.43) находится спектр коллективных мод

$$\hbar\omega(\mathbf{q}, \mathbf{Q}) = \sqrt{K_{\varphi\varphi}(\mathbf{q})K_{zz}(\mathbf{q})} + K_{z\varphi}(\mathbf{q}). \quad (5.44)$$

Коэффициенты, входящие в (5.42)–(5.44), выражаются через введенные ранее функции (5.31), (5.32):

$$K_{zz}(\mathbf{q}) = 2 \left[ H_{\mathbf{Q}}(\mathbf{q}) - F_S(q) + F_D(Q) + \cot^2 \theta_0 \times \right. \\ \left. \times \left( F_D(Q) - \frac{F_D(|\mathbf{q} + \mathbf{Q}|) + F_D(|\mathbf{q} - \mathbf{Q}|)}{2} \right) \right], \quad (5.45)$$

$$K_{\varphi\varphi}(\mathbf{q}) = \frac{\sin^2 \theta_0}{2} \left( F_D(Q) - \frac{F_D(|\mathbf{q} + \mathbf{Q}|) + F_D(|\mathbf{q} - \mathbf{Q}|)}{2} \right), \quad (5.46)$$

$$K_{z\varphi}(\mathbf{q}) = \frac{\cos \theta_0}{2} [F_D(|\mathbf{q} - \mathbf{Q}|) - F_D(|\mathbf{q} + \mathbf{Q}|)], \quad (5.47)$$

где

$$H_{\mathbf{Q}}(\mathbf{q}) = \frac{e^2}{\varepsilon q \ell^2} \left[ 1 - e^{-qd} \cos(|\mathbf{q} \times \mathbf{Q}| \ell^2) \right] e^{-\frac{q^2 \ell^2}{2}}.$$

При  $q \ll \ell$ ,  $Q \ll \ell$  спектр (5.44) линейным образом зависит от волнового вектора

$$\hbar\omega(\mathbf{q}, \mathbf{Q}) = \hbar s q - \frac{\hbar^2}{M} (1 - 2\nu) \mathbf{Q} \cdot \mathbf{q}, \quad (5.48)$$

Первое слагаемое в (5.48) есть энергия акустической моды со скоростью звука

$$s = \sqrt{\gamma \frac{v(1-\nu)}{2\pi \ell^2 M}}, \quad (5.49)$$

где

$$\gamma = \frac{4\pi e^2 \ell}{\varepsilon} \left[ \frac{d}{\ell} - \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left( 1 - \operatorname{erfc} \left( \frac{d}{\sqrt{2}\ell} \right) e^{-\frac{d^2}{2\ell^2}} \right) \right] \quad (5.50)$$

— константа взаимодействия, и  $M$  — магнитная масса (5.38).

Второе слагаемое в (5.48) возникает, если поток пар отличен от нуля. В предельных случаях  $\nu \rightarrow 0$  и  $\nu \rightarrow 1$  это слагаемое можно представить в виде  $\hbar \mathbf{v}_s \cdot \mathbf{q}$ , где  $\mathbf{v}_s = \mp \hbar \mathbf{Q} / M$  — сверхтекучая скорость пар, и тогда второе слагаемое в точности отвечает преобразованию

Галилея для спектра возбуждений. Указанные предельные случаи соответствуют разреженному газу электрон-дырочных пар. При  $v \rightarrow 0$  можно считать, что пары образованы электроном из слоя 1 и дыркой из слоя 2, и направление  $\mathbf{v}_s$  совпадает с направлением тока в слое 2. Так как вектор  $\mathbf{Q}$  задает направление тока в слое 1 (см. (5.33)), то  $\mathbf{v}_s = -\hbar\mathbf{Q}/M$ . При  $v \rightarrow 1$  пары образованы дыркой из слоя 1 и электроном из слоя 2, направление  $\mathbf{v}_s$  совпадает с направлением тока в слое 1 и  $\mathbf{v}_s = +\hbar\mathbf{Q}/M$ . В общем случае, как уже отмечалось, не удастся корректно определить сверхтекучую скорость, и, следовательно, не получается записать (5.48) в виде, соответствующем преобразованию Галилея. При  $v = 1/2$  второе слагаемое в (5.48) обращается в нуль, что объясняется невозможностью определить даже знак сверхтекучей скорости.

При  $d = 0$  константа взаимодействия  $\gamma$  обращается в нуль. В этом случае спектр возбуждений будет квадратичным по  $q$  (при разложении (5.44) нужно учесть квадратичные по  $q$  слагаемые). Такой спектр не удовлетворяет критерию сверхтекучести Ландау, т.е. при  $d = 0$  газ пар не переходит в сверхтекучее состояние.

Состояние, описываемое функцией (5.40), устойчиво, если энергия коллективной моды (5.44) вещественна при всех  $q$ . Анализ показывает, что условие вещественности энергии возбуждений нарушается при  $d/\ell > \tilde{d}_c$ . Критическое значение  $\tilde{d}_c$  зависит от разбаланса факторов заполнения (разницы  $|v_1 - v_2|$ ) и величины вектора  $\mathbf{Q}$ . При  $v = 1/2$  критическое значение  $\tilde{d}_c$  минимально и равно  $\approx 1,2$  (при  $\mathbf{Q} = 0$ ). При увеличении разбаланса критическое значение  $\tilde{d}_c$  возрастает.

Условие вещественности нарушается также при  $Q > Q_c$  [107]. Другими словами, имеется критический ток, протекание которого приводит к подавлению сверхпроводящего состояния. Механизм подавления сверхпроводящего состояния отличен от механизма подавления в обычных сверхпроводниках. В обычных сверхпроводниках критический ток связан с критическим магнитным полем, которое создают протекающие токи. В двухслойных системах магнитное поле токов очень мало и критический ток определяется максимальным значением  $Q$ , при котором энергия возбуждений (5.44) остается вещественной при всех значениях  $\mathbf{q}$  [104,111]. Кроме того, согласно критерию сверхтекучести Ландау, энергия возбуждений в системе отсчета, связанной с неподвижными стенками, должна быть положительна. В данном случае роль неподвижных стенок играет ионный остов, а энергию возбуждений (5.44) надо понимать как энергию в системе отсчета, связанной с ионным остовом. При  $v = 1/2$  и  $Q < Q_c$  условие положительности энергии (5.44) выполняется автоматически. Если  $v \neq 1/2$ , то при увеличении  $Q$  вначале нарушается условие положительности энергии возбуждений (при  $Q > Q_{c1}$ , где  $Q_{c1} < Q_c$ ), а затем — условие вещественности спектра [111]. Критический ток находится по формуле

$$\mathbf{j}_c = \frac{e}{\hbar S} \frac{\partial F}{\partial \mathbf{Q}} \Big|_{\mathbf{Q}=\min(\mathbf{Q}_{c1}, \mathbf{Q}_c)}, \quad (5.51)$$

где  $F$  — свободная энергия.

Уравнение для температуры перехода БКТ (2.17) для газа магнитоэкситонов записывается через сверхтекучую жесткость

$$T_{BKT} = \frac{\pi}{2} \rho_s(T_{BKT}). \quad (5.52)$$

Для нахождения сверхтекучей жесткости при  $T \neq 0$  можно воспользоваться тем, что, по определению, сверхтекучая жесткость есть коэффициент в разложении свободной энергии по градиенту фазы, т.е.

$$\rho_s = \frac{1}{S} \frac{\partial^2 F}{\partial Q_x^2} \Big|_{\mathbf{Q}=0}. \quad (5.53)$$

Свободная энергия принимается равной

$$F = E + T \sum_{\mathbf{q}} \ln \left( 1 - e^{-\frac{\hbar\omega(\mathbf{q}, \mathbf{Q})}{T}} \right), \quad (5.54)$$

где второе слагаемое описывает вклад идеального газа возбуждений в свободную энергию. В результате для сверхтекучей жесткости находится выражение [104]

$$\rho_s(T) = \rho_{s0} + \frac{1}{S} \sum_{\mathbf{q}} \left[ \left( \frac{\partial^2 \hbar\omega}{\partial Q_x^2} \right) N_B(\hbar\omega) - \frac{1}{T} N_B(\hbar\omega) [1 + N_B(\hbar\omega)] \left( \frac{\partial \hbar\omega}{\partial Q_x} \right)^2 \right] \Big|_{\mathbf{Q}=0}, \quad (5.55)$$

где  $N_B(\epsilon) = [\exp(\epsilon/T) - 1]^{-1}$  — функция распределения Бозе.

Если бы зависимость энергии возбуждений от  $\mathbf{Q}$  сводилась к галилеевому сдвигу ( $\hbar\omega(\mathbf{q}, \mathbf{Q}) = \hbar\omega(\mathbf{q}) \pm \hbar^2 \mathbf{q} \mathbf{Q} / M$ ), то вклад в нормальную плотность давало бы только второе слагаемое под интегралом в (5.55) и выражение для сверхтекучей жесткости переходило бы в  $\rho_s = \hbar^2(n - n_n) / M$ , где  $n_n$  определяется известным выражением Ландау для нормальной плотности [108] (см. (3.23)). Первое слагаемое под интегралом в (5.55) отлично от нуля, когда энергия возбуждений есть нелинейная функция градиента фазы  $\mathbf{Q}$ . В этом случае при вычислении температурной зависимости сверхтекучей жесткости нужно учитывать оба слагаемых. Если  $v = 1/2$ , второе слагаемое не дает вклада в интеграл и температурная перенормировка сверхтекучей жесткости определяется первым слагаемым. Решение уравнения (5.52) при  $v = 1/2$  приведено на рис. 2. На этом же рисунке, для сравнения, показана зависимость  $T_0 = \rho_s(0) / 2$  от  $d$ . Величина  $T_0$  дает оценку температуры сверхтекучего перехода в пренебрежении нормальными возбуждениями. Как видно на рис. 2, температура сверхтекучего перехода равна нулю при  $d/\ell = 0$  и  $d/\ell > 1,2$ . При промежу-

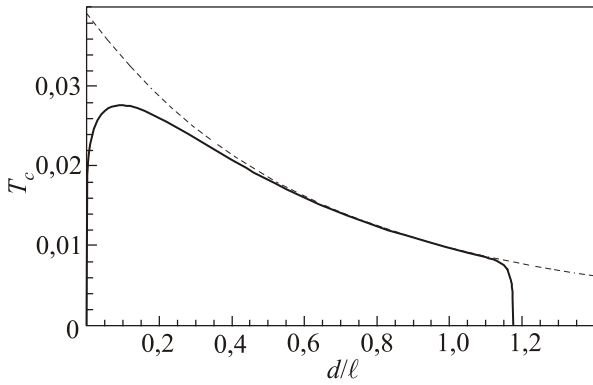


Рис. 2. Зависимость температуры сверхтекучего перехода (в единицах  $e^2/\epsilon\ell$ ) от расстояния между слоями (сплошная кривая), штриховая кривая — величина  $\rho_{s0}(0)/2$ .

точных значениях  $d$   $0,5 \lesssim d/\ell < 1,1$  величину  $T_0$  можно использовать как хорошую оценку для температуры сверхтекучего перехода. Принимая  $d = \ell = 18$  нм (что соответствует  $B = 2$  Тл) и  $\epsilon = 12$ , получаем  $T_{BKT} \approx 1$  К.

Отметим, что такая же оценка ( $T_{BKT} \approx 1$  К) применима и к электрон-дырочной квантовой холловской системе, рассмотренной в начале настоящего раздела. Это показывает, что для квантовых холловских систем критическая температура (5.8), которую дает теория среднего поля [89], на порядок больше температуры перехода в сверхпроводящее состояние  $T_{BKT}$ .

Влияние примесей на сверхтекучесть магнитоэкситонного газа рассмотрено в работах [112,113]. В работе [112] проанализирован предел низкой плотности пар  $\nu \ll 1$ . В этом пределе сверхтекучий газ магнитоэкситонов можно описывать уравнением типа уравнения Гросса–Питаевского, которое ранее получено в [82] и [114]. В [82] это уравнение выведено из феноменологических соображений. В [114] использовался подход, основанный на волновой функции Келдыша, обобщенный на случай квантовых холловских систем. В [112] уравнение для волновой функции конденсата пар выводилось с учетом электрического поля, создаваемого неоднородностями и флуктуациями межслоевого расстояния. При этом выяснилось, что учет электрического поля существенно влияет на результат, только если включить в рассмотрение случайные флуктуации межслоевого расстояния. В противном случае влиянием электрического поля можно пренебречь. Здесь мы остановимся на последнем случае. Тогда уравнение Гросса–Питаевского для пар принимает обычный вид

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(\mathbf{R}, t)}{\partial t} = \left[ -\frac{\hbar^2}{2M} \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{R}^2} + U_{\text{imp}}(\mathbf{R}) + \gamma |\Psi(\mathbf{R}, t)|^2 - \mu \right] \Psi(\mathbf{R}, t). \quad (5.56)$$

Магнитная масса магнитоэкситона  $M$  и константа взаимодействия между магнитоэкситонами  $\gamma$  определяются приведенными выше выражениями (5.38) и (5.50). Потенциал примесей  $U_{\text{imp}}(\mathbf{R})$ , действующий на электрон-дырочные пары, определен как разность потенциалов, приложенных к электронам в слоях 1 и 2.

Уравнение (5.56) позволяет найти пространственные флуктуации плотности конденсата пар, обусловленные случайным потенциалом примесей. Относительное уменьшение сверхтекучей плотности, вызванное заряженными примесями, расположенными на расстоянии  $D \gg d$  от двухслойной системы, дается выражением

$$\frac{\Delta n_s}{n_{s0}} = -\frac{\pi}{4} \left( \frac{e^2 d}{\epsilon \gamma} \right)^2 \frac{n_{\text{imp}}}{n_{s0}} \frac{1}{n_{s0} D^2}. \quad (5.57)$$

Если в качестве примесей выступают допанты, то их плотность совпадает с суммарной плотностью носителей в двух слоях  $n_{\text{imp}} = 1/2 \pi \ell^2$ . При этом сверхтекучая плотность пар  $n_0$  равна  $\nu/2 \pi \ell^2$  и отношение  $n_{\text{imp}}/n_{s0}$  обратно пропорционально малому параметру  $\nu \ll 1$ . Это показывает, что рассмотренный предел  $\nu \ll 1$  не является оптимальным с точки зрения уменьшения негативного влияния примесей на электрон-дырочную сверхпроводимость, а интерес представляет случай половинного заполнения слоев  $\nu = 1/2$ . Отметим, что эксперименты по реализации электрон-дырочной сверхпроводимости в двухслойных квантовых холловских системах [94–97] проводятся именно при половинном или близком к половинному заполнении.

Анализ случая  $\nu = 1/2$  проведен в [113]. В подходе [113] взаимодействие с примесями записывается через псевдоспиновые переменные. В системе с примесями энергия (5.42) приобретает дополнительное слагаемое, с учетом которого

$$E_{fl} = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{q}} (\tilde{m}_z(-\mathbf{q}), \tilde{\varphi}(-\mathbf{q})) \begin{pmatrix} K_{zz}(\mathbf{q}) & -iK_{z\varphi}(\mathbf{q}) \\ iK_{z\varphi}(\mathbf{q}) & K_{\varphi\varphi}(\mathbf{q}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{m}_z(\mathbf{q}) \\ \tilde{\varphi}(\mathbf{q}) \end{pmatrix} + \sum_{\mathbf{q}} \frac{U_{\text{imp}}(\mathbf{q}) e^{-\frac{q^2 \ell^2}{4}}}{\sqrt{2\pi \ell^2 S}} \tilde{m}_z(\mathbf{q}), \quad (5.58)$$

где  $U_{\text{imp}}(\mathbf{q})$  — фурье-образ потенциала  $U_{\text{imp}}(\mathbf{R})$ . Из уравнений Эйлера–Лагранжа  $\delta E_{fl}/\delta \tilde{m}_z(\mathbf{q}) = 0$ ,  $\delta E_{fl}/\delta \tilde{\varphi}(\mathbf{q}) = 0$  находятся величины флуктуаций фазы и  $z$ -компоненты псевдоспина, индуцированные примесями. Подстановка полученных значений  $\tilde{\varphi}(\mathbf{q})$  и  $\tilde{m}_z(\mathbf{q})$  в (5.58) дает поправку к свободной энергии. Последняя, после усреднения по случайному распределению примесей, принимает вид

$$E_{\text{imp}} = -\frac{n_{\text{imp}}}{4\pi\ell^2} \sum_{\mathbf{q}} |U_{\mathbf{q}}|^2 e^{-\frac{q^2\ell^2}{2}} \frac{K_{\text{фр}}(\mathbf{q})}{K_{zz}(\mathbf{q})K_{\text{фр}}(\mathbf{q}) - K_{z\text{ф}}^2(\mathbf{q})}, \quad (5.59)$$

где  $U_{\mathbf{q}}$  — фурье-компонента потенциала одной примеси. Функции  $K_{\alpha\beta}(\mathbf{q})$  определяются уравнениями (5.45)–(5.47). Из найденной поправки к энергии вычисляется изменение сверхтекучей жесткости

$$\Delta\rho_s = \frac{1}{S} \frac{\partial^2 E_{\text{imp}}}{\partial Q_x^2} \Big|_{\mathbf{Q}=0}.$$

При  $\nu = 1/2$  поправка к сверхтекучей жесткости записывается в виде интеграла

$$\Delta\rho_s = -\frac{n_{\text{imp}}}{2\pi} \int_0^\infty q dq |U_{\mathbf{q}}|^2 \frac{\rho_{s0} - \frac{e^2 q}{16\pi\epsilon} e^{-\frac{q^2\ell^2}{2} - qd}}{\left(\epsilon_q + \frac{\gamma_q}{4\pi\ell^2}\right)^2} e^{-\frac{q^2\ell^2}{2}}, \quad (5.60)$$

где введены обозначения  $\epsilon_q = F_D(0) - F_D(q)$  и  $\gamma_q = 4\pi\ell^2[H_0(q) - F_S(q) + F_D(0)]$ . В пределе  $q\ell \ll 1$  введенные величины переходят в кинетическую энергию магнитоэкситона  $\epsilon_q = \hbar^2 q^2 / 2M$  и константу взаимодействия  $\gamma_q = \gamma$ .

Для заряженных примесей, расположенных на расстоянии  $D \gg d$  от двухслойной системы, уравнение (5.60) дает

$$\frac{\Delta\rho_s}{\rho_s} = -2\pi \left(\frac{e^2 d}{\epsilon\gamma}\right)^2 \frac{n_{\text{imp}}}{n_T} \frac{1}{n_T D^2}, \quad (5.61)$$

где  $n_T = 1/2\pi\ell^2$  — плотность носителей на полностью заполненном уровне Ландау. Заметим, что выражение (5.57), полученное другим способом в предположении  $\nu \ll 1$ , при подстановке в него  $n_{s0} = n_T/2$  дает ответ, отличающийся от (5.61) только множителем 2.

Оценка показывает, что при  $\nu \approx 1/2$  и  $d \approx \ell$  заряженные примеси, расположенные на расстоянии  $D \gg d$  от двухслойной системы, лишь незначительно уменьшают сверхтекучую жесткость (и, соответственно, также незначительно уменьшают критическую температуру). Например, полагая  $\ell = d = D/10$  и  $n_{\text{imp}} = n_T$ , получаем из (5.61)  $\Delta\rho_s/\rho_s \approx 0,06$ . В то же время заряженные примеси, не связанные с допирующими атомами и расположенные в проводящих слоях, оказывают существенное влияние на электрон-дырочную сверхпроводимость и наличие таких примесей приводит к значительному понижению  $T_c$  уже при концентрации порядка  $10^{-2} n_T$  [113].

## 6. Заряженные вихри и их влияние на транспортные свойства двухслойных квантовых холловских систем

Можно было бы ожидать, что в результате перехода газа электрон-дырочных пар в сверхпроводящее состояние при протекании в слоях равных по модулю и противоположных по направлению электрических токов система будет иметь бесконечную проводимость и нулевое сопротивление. Однако двухслойные квантовые холловские системы с суммарным фактором заполнения  $\nu_T$ , равным единице, показывают в экспериментах несколько другое поведение [95–97]. При протекании противотоков (режим counterflow) продольное сопротивление хотя и падает при  $\nu_T \rightarrow 1$ , остается даже несколько выше, чем при протекании параллельных токов. При понижении температуры наблюдается экспоненциальное возрастание продольной проводимости, но все же проводимость остается конечной. При низкой температуре холловское сопротивление увлечения совпадает или почти совпадает [94,115] с холловским сопротивлением в увлекающем слое (слое, через который пропускается электрический ток). Все перечисленные эффекты чувствительны к расстоянию между квантовыми ямами, а именно, они исчезают, если это расстояние превышает удвоенную магнитную длину. Результаты экспериментов показывают, что электрон-дырочное спаривание, действительно, имеет место, но что касается транспортных свойств, то имеются механизмы, препятствующие полностью бездиссипативному протеканию противотоков. Настоящий раздел посвящен работам, в котором были рассмотрены возможные причины такого поведения.

В работе [116] рассмотрена модель двухслойной системы, где электрон-дырочное спаривание происходит лишь в отдельных областях (озерах), встроенных в дефектную фазу. Предполагается, что в дефектных областях спаривание полностью подавлено, например из-за повышенной концентрации примесей.

Авторы ограничиваются случаем половинного заполнения слоев  $\nu_1 = \nu_2 = 1/2$ . При равном нулю разбалансе факторов заполнения закон Ома для параллельных и антипараллельных токов записывается в виде двух расцепленных уравнений,  $E_{+,i} = \rho_{ik}^{\parallel} j_{+,k}$  и  $E_{-,i} = \rho_{ik}^{CF} j_{-,k}$ , где  $\mathbf{E}_{\pm} = \mathbf{E}_1 \pm \mathbf{E}_2$  и  $\mathbf{j}_{\pm} = \mathbf{j}_1 \pm \mathbf{j}_2$  (символ «CF» обозначает counterflow).

В дефектных областях

$$\rho_d^{\parallel} = \rho_d^{CF} = \begin{pmatrix} \rho_{1/2} & 2 \\ -2 & \rho_{1/2} \end{pmatrix}, \quad (6.1)$$

где  $\rho_{1/2} \ll 1$  — продольное сопротивление монослойной системы с  $\nu = 1/2$ . Здесь и далее в этом разделе удельное сопротивление дается в единицах  $h/e^2$ , а удельная проводимость — в единицах  $e^2/h$ . В областях со спариванием (сверхпроводящих областях) тензор  $\rho_s^{\parallel}$  равен удвоенному тензору сопротивления одного слоя с  $\nu = 1$ :



$$\rho_s^{\parallel} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}. \quad (6.2)$$

Тензор  $\rho_s^{CF} = 0$ , что соответствует одновременно равным нулю продольному и холловскому сопротивлениям.

Предполагается, что сверхпроводящие области расположены случайным образом. Тогда измерение сопротивления будет давать некоторые эффективные величины  $\rho_{\text{eff}}^{\parallel}$  и  $\rho_{\text{eff}}^{CF}$ , представляющие собой результат усреднения по случайным конфигурациям.

Так как тензоры  $\rho_s^{\parallel}$  и  $\rho_d^{\parallel}$  имеют одинаковые недиагональные компоненты ( $\rho_{xy} = -\rho_{yx} = 2$ ), то такое же значение будет иметь усредненное холловское сопротивление  $\rho_{xy,\text{eff}}^{\parallel} = 2$ . Для продольного сопротивления приближение эффективной среды (см., например, [117]) дает

$$\rho_{xx,\text{eff}}^{\parallel} = \begin{cases} \rho_{1/2}(1-2f), & \text{при } f < 1/2 \\ 0, & \text{при } f \geq 1/2, \end{cases} \quad (6.3)$$

где  $f$  — доля сверхпроводящих областей. Порогу перколяции, при превышении которого в системе исчезает продольное сопротивление, соответствует  $f = 1/2$ .

Так как  $\rho_s^{CF} = 0$ , то обратный ему тензор  $\sigma^{CF}$  определен неоднозначно. Это позволяет выбрать недиагональную компоненту  $\sigma_{xy,s}^{CF}$ , совпадающей с  $\sigma_{xy,d}^{CF}$ . В результате

$$\sigma_s^{CF} = \begin{pmatrix} \infty & -2/(4+\rho_{1/2}^2) \\ 2/(4+\rho_{1/2}^2) & \infty \end{pmatrix} \quad (6.4)$$

и

$$\sigma_d^{CF} = \begin{pmatrix} \frac{\rho_{1/2}}{4+\rho_{1/2}^2} & -2/(4+\rho_{1/2}^2) \\ 2/(4+\rho_{1/2}^2) & \frac{\rho_{1/2}}{4+\rho_{1/2}^2} \end{pmatrix}. \quad (6.5)$$

Тогда в приближении эффективной среды [117] компоненты тензора  $\sigma_{\text{eff}}^{CF}$  определяются выражениями  $\sigma_{xy,\text{eff}}^{CF} = -2/(4+\rho_{1/2}^2)$  и

$$\sigma_{xx,\text{eff}}^{CF} = \begin{cases} \frac{\rho_{1/2}}{4+\rho_{1/2}^2} \frac{1}{1-2f}, & \text{при } f < 1/2 \\ \infty, & \text{при } f \geq 1/2 \end{cases} \quad (6.6)$$

и усредненный тензор сопротивлений находится по формуле  $\rho_{\text{eff}}^{CF} = [\sigma_{\text{eff}}^{CF}]^{-1}$ .

Кроме сопротивлений  $\rho_{\text{eff}}^{\parallel}$  и  $\rho_{\text{eff}}^{CF}$  в эксперименте измеряют сопротивление увлечения. В общем случае ток, протекающий в одном слое, вызывает падение напряжения не только в своем слое, но и во втором, разомкнутом слое. Коэффициент пропорциональности между напряженностью поля в разомкнутом слое и плотностью тока в увлекающем слое, взятый со знаком «минус», называют сопротивлением увлечения. В отсутствие туннелирования между слоями этот коэффициент равен

$$\rho_{ik}^{\text{drag}} = \frac{\rho_{ik}^{CF} - \rho_{ik}^{\parallel}}{2}. \quad (6.7)$$

Для продольной компоненты тензора (6.7) модель [116] дает

$$\rho_{xx,\text{eff}}^{\text{drag}} = \begin{cases} \frac{8\rho_{1/2}f(1-f)(1-2f)}{4(1-2f)^2 + \rho_{1/2}^2}, & \text{при } f < 1/2 \\ 0, & \text{при } f \geq 1/2. \end{cases} \quad (6.8)$$

Полученное сопротивление увлечения  $\rho_{xx,\text{eff}}^{\text{drag}}$  возрастает при увеличении доли сверхпроводящей фазы, достигает максимума немного ниже порога перколяции  $f = 1/2$ , и обращается в нуль при переходе через порог перколяции.

Для нахождения связи между  $\rho_{xx,\text{eff}}^{\text{drag}}$  и  $\rho_{xy,\text{eff}}^{\text{drag}}$  в [116] используется так называемый закон полукружности, известный из теории проводимости двумерной двухфазной среды, развитой в работах Дыхне [118,119]. Для такой среды компоненты эффективного тензора сопротивлений удовлетворяют соотношению

$$(\rho_{xy,\text{eff}} - \bar{\rho}_{xy})^2 + \rho_{xx,\text{eff}}^2 = \bar{\rho}_{xx}^2 \quad (6.9)$$

(подобно уравнению  $(x-x_0)^2 + y^2 = r^2$ , соотношение (6.9) задает полукружность в переменных  $\rho_{xy,\text{eff}}$  и  $\rho_{xx,\text{eff}}$ ). Постоянные  $\bar{\rho}_{xy}$  и  $\bar{\rho}_{xx}$  в (6.9) определяются компонентами тензора сопротивления для фаз 1 и 2:

$$\bar{\rho}_{xy} = \frac{1}{2} \frac{D^{(2)} - D^{(1)}}{\rho_{xy}^{(2)} - \rho_{xy}^{(1)}}, \quad (6.10)$$

$$\bar{\rho}_{xx} = \sqrt{\bar{\rho}_{xy}^2 + \frac{D^{(2)}\rho_{xy}^{(1)} - D^{(1)}\rho_{xy}^{(2)}}{\rho_{xy}^{(1)} - \rho_{xy}^{(2)}}}, \quad (6.11)$$

где  $D^{(i)} = (\rho_{xx}^{(i)})^2 + (\rho_{xy}^{(i)})^2$ .

В случае двухслойной системы с нулевым разбалансом факторов заполнения уравнения (6.9)–(6.11) применимы независимо к  $\rho^{\parallel}$  и  $\rho^{CF}$ . Величины  $\bar{\rho}_{xx}^{\parallel}$  и  $\bar{\rho}_{xy}^{\parallel}$  стремятся к бесконечности, и полукружность, задаваемая уравнением (6.9), вырождается в прямую  $\rho_{xy,\text{eff}}^{\parallel} = \text{const} = 2$ .

Для режима противотоков уравнения (6.10), (6.11) дают  $\bar{\rho}_{xx}^{CF} = \bar{\rho}_{xy}^{CF} = 1 + \rho_{1/2}^2/4$ . С учетом этих соотношений и определения (6.7) уравнение (6.9) для  $\rho_{\text{eff}}^{CF}$  записывается в виде

$$\left( 2\rho_{xy,\text{eff}}^{\text{drag}} + \rho_{xy,\text{eff}}^{\parallel} - 1 - \frac{\rho_{1/2}^2}{4} \right)^2 + \left( 2\rho_{xx,\text{eff}}^{\text{drag}} + \rho_{xx,\text{eff}}^{\parallel} \right)^2 = \left( 1 + \frac{\rho_{1/2}^2}{4} \right)^2. \quad (6.12)$$

Ввиду малости  $\rho_{1/2}$  уравнение (6.12) можно аппроксимировать уравнением



$$\left(\rho_{xy,eff}^{drag} + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\rho_{xx,eff}^{drag}\right)^2 = \frac{1}{4}. \quad (6.13)$$

Системе с  $f = 0$  (полностью дефектная фаза) отвечает решение  $\rho_{xx,eff}^{drag} = \rho_{xy,eff}^{drag} = 0$ . Выше перколяционного порога  $f = 1/2$  решение имеет вид  $\rho_{xx,eff}^{drag} = 0$ ,  $\rho_{xy,eff}^{drag} = -1$ . В интервале  $0 \leq f \leq 1/2$  холловское сопротивление увлечения  $\rho_{xy,eff}^{drag}$  монотонно изменяется от 0 до  $-1$ , а продольное сопротивление увлечения  $\rho_{xx,eff}^{drag}$  демонстрирует немонотонную зависимость, обращаясь в нуль на концах этого интервала и достигая максимального значения  $\rho_{xx,eff}^{drag} = 1/2$  внутри интервала.

Теория [116] предсказывает, что при доле дефектной фазы  $p = 1 - f < 1/2$  транспортные свойства системы при протекании противотоков будут определяться только сверхпроводящей фазой. Проводимость  $\sigma_{xx,eff}^{CF}$  такой системы должна обращаться в бесконечность, а продольное сопротивление  $\rho_{xx,eff}^{CF}$  должно быть равно нулю. Так как в экспериментах бесконечная проводимость и нулевое сопротивление не наблюдаются, то, оставаясь в рамках модели [116], нужно предполагать, что ни в одном из проведенных экспериментов перколяционный порог не был достигнут.

В работе [120] предложено альтернативное объяснение наблюдаемых транспортных характеристик. Показано, что ключом к их пониманию могут быть особые свойства вихрей в рассматриваемых системах. На магнитном языке вихри в двухслойных квантовых холловских системах описываются как нелокальные псевдоспиновые структуры, называемые меронами. В центре вихря  $m_z$  компонента псевдоспина принимает максимальное по модулю значение  $m_z = \pm 1$ . Вдали от центра вихря  $m_z = 2\nu - 1$ , а направление двух других компонент зависит от полярного угла  $\varphi$ , заданного в системе координат, связанной с центром вихря:  $m_x = \sqrt{4\nu(1-\nu)} \cos \varphi$ ,  $m_y = \pm \sqrt{4\nu(1-\nu)} \sin \varphi$  (знак во втором уравнении определяется знаком завихренности). Как показано в [93], вихри несут реальный электрический заряд, причем величина заряда является дробной. В случае половинного заполнения заряд вихрей равен  $q = \pm e/2$ . Знак заряда определяется циркуляцией и значением  $m_z$  в центре вихря. При протекании параллельных токов возникает холловская разность потенциалов, которой отвечает электрическое поле  $E_y^{\parallel} = (2h/e^2)j_x$ , где  $j_x = j$  — плотность тока в слое. Это поле действует на заряженный вихрь с силой

$$F_E^{\parallel} = qE_y = \pm \frac{h}{e} j. \quad (6.14)$$

Под действием этой силы вихрь движется, что приводит к диссипации электрического тока. В режиме противотоков  $E_y = 0$ , но возникает действующая на вихрь сила Магнуса, пропорциональная потоку электрон-дырочных пар  $j_p = j/e$ . По величине сила Магнуса

$$F_M^{CF} = \pm h j_p = \pm \frac{h}{e} j \quad (6.15)$$

совпадает с силой (6.14). Поэтому в режиме противотоков продольное сопротивление (как мера диссипации) будет таким же, как и в режиме параллельных токов.

В работе [121] предложена модель, в которой предполагается, что вследствие беспорядка в системе появляются области с большой плотностью вихрей, разделенные тонкими сверхпроводящими каналами (модель когерентной сети). Перескок вихря через канал приводит к проскальзыванию фазы параметра порядка в канале. В отсутствие токов вероятность перескока не зависит от направления перескока и процессы с увеличением и уменьшением набега фазы на канале равновероятны. Протекание через систему противотоков приводит к возникновению направленного потока вихрей

$$I_{\text{meron}} = \frac{\zeta}{e} I_{CF} \exp\left(-\frac{\Delta_{\text{link}}}{T}\right), \quad (6.16)$$

где  $\zeta$  — численный коэффициент порядка единицы,  $\Delta_{\text{link}}$  — энергетический барьер, преодолеваемый вихрем при переходе через проводящий канал. В результате набег фазы будет уменьшаться. Для поддержания стационарного состояния необходимо приложить к системе электрическое поле. Продольное сопротивление будет равно

$$R_{xx}^{CF} = \frac{\zeta h}{e^2} \frac{\Delta x}{L_y^{ch}} \exp\left(-\frac{\Delta_{\text{link}}}{T}\right), \quad (6.17)$$

где  $\Delta x$  — длина участка, на котором измеряется сопротивление, и  $L_y^{ch}$  — суммарная ширина каналов. Таким образом, теория [121] объясняет активационный характер продольного сопротивления при протекании противотоков.

В [122] развита модель, основанная на идеях, близких к идеям [116,120,121]. Как и в [120,121], в [122] считалось, что в системе имеются области с избытком и недостатком электронов. При этом, в отличие от [121], не предполагалось, что эти области разделены сеткой проводящих каналов. В то же время допускалась возможность появления областей с полностью нарушенной межслоевой когерентностью, таких же, как были введены в [116].

В [122] обусловленное вихрями сопротивление определялось на основе рассмотрения их динамики. В стационарном состоянии действующая на вихрь результирующая сила равна нулю,

$$2\pi\alpha_{\varkappa}\rho_s\nabla\varphi\times\hat{z}-\eta\mathbf{v}_{\varkappa}+q_{\varkappa}\mathbf{E}_{i_{\varkappa}}+\frac{q_{\varkappa}}{c}\mathbf{v}_{\varkappa}\times\mathbf{B}=0, \quad (6.18)$$

где  $\varkappa = 1, 2, 3, 4$  — сорт вихря,  $\alpha_{\varkappa} = \pm 1$  — его завихренность,  $\mathbf{v}_{\varkappa}$  — скорость вихря,  $q_{\varkappa}$  — заряд вихря,  $\mathbf{E}_i$  — напряженность электрического поля в слое  $i$ , В (6.18) первое слагаемое есть сила Магнуса, определяемая градиентом фазы параметра порядка  $\nabla\varphi$  в месте нахождения данного вихря, второе слагаемое — сила вязкого трения ( $\eta$  — коэффициент трения), а третье и четвертое слагаемые — электрическая и магнитная компоненты силы Лоренца. Электрическая компонента силы Лоренца определяется электрическим полем в слое  $i_{\varkappa}$ , в котором сконцентрирован заряд вихря.

Четырем сортам вихрей отвечают волновые функции [93]

$$\begin{aligned} |1\rangle &= \prod_{m=0}^{N-1} (uc_{m,1}^+ + vc_{m+1,2}^+) |0\rangle, \\ |2\rangle &= \prod_{m=0}^{N-1} (uc_{m+1,1}^+ + vc_{m,2}^+) |0\rangle, \\ |3\rangle &= c_{0,2}^+ \prod_{m=0}^{N-1} (uc_{m,1}^+ + vc_{m+1,2}^+) |0\rangle, \\ |4\rangle &= c_{0,1}^+ \prod_{m=0}^{N-1} (uc_{m+1,1}^+ + vc_{m,2}^+) |0\rangle, \end{aligned} \quad (6.19)$$

где  $u = \sqrt{v}$ ,  $v = \sqrt{1-v}$  и  $v$  — фактор заполнения слоя 1. Сравнение (6.19) с волновой функцией основного состояния (5.16) показывает, что в центре вихря имеется электрический заряд, величина которого зависит от  $v$  и является дробной. Этот заряд сконцентрирован в одном из слоев. Значения  $\alpha_{\varkappa}$ ,  $q_{\varkappa}$  и  $i_{\varkappa}$  для  $\varkappa = 1, 2, 3, 4$  приведены в табл. 1.

Изменение градиента фазы параметра порядка при движении вихрей определяется уравнением

$$\frac{\partial}{\partial t}\nabla\varphi = \sum_{\varkappa} 2\pi n_{\varkappa}\alpha_{\varkappa}\mathbf{v}_{\varkappa}\times\hat{z}, \quad (6.20)$$

где  $n_{\varkappa}$  — плотность вихрей сорта  $\varkappa$ . Уравнение (6.20) следует из того, что смещение вихря на  $dy$  изменяет в

Таблица 1. Характеристики планарных вихрей (меронов) в двухслойной системе с факторами заполнения слоев  $v_1 = v$  и  $v_2 = 1-v$

| Сорт вихря $\varkappa$ | Завихренность $\alpha_{\varkappa}$ | Заряд вихря $q_{\varkappa}$ | слой $i_{\varkappa}$ , в котором сконцентрирован заряд |
|------------------------|------------------------------------|-----------------------------|--|
| 1                      | -1                                 | $e(1-v)$                    | 2  |
| 2                      | +1                                 | $ev$                        | 1  |
| 3                      | -1                                 | $-ev$                       | 2  |
| 4                      | +1                                 | $-e(1-v)$                   | 1  |

полосе  $dy$  набег фазы на  $2\pi$  в направлении  $x$ . Движение вихрей поперек потока уменьшает его скорость. В стационарном состоянии уменьшение скорости потока, связанное с движением вихрей, должно компенсироваться электрическим полем, которое вызывает ускорение пар. Условие стационарности дает

$$\sum 2\pi n_{\varkappa}\alpha_{\varkappa}\mathbf{v}_{\varkappa}\times\hat{z} + \frac{e}{\hbar}(\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) = 0. \quad (6.21)$$

Электрические токи представляют собой сумму токов, обусловленных сверхтекучим движением пар, движением заряженных вихрей и дрейфом электронов в скрещенных электрическом и магнитном полях. Для монослойной системы с полностью заполненным уровнем Ландау дрейфовая скорость  $\mathbf{v}_d$  находится из условия взаимной компенсации электрической и магнитной компонент силы Лоренца:  $\mathbf{E} + \mathbf{v}_d \times \mathbf{B}/c = 0$ . Связанный с  $\mathbf{v}_d$  ток равен  $\mathbf{j} = -en\mathbf{v}_d = -\sigma_0\mathbf{E} \times \hat{z}$ , где  $\sigma_0 = e^2/h$  — квант проводимости и  $\hat{z}$  — единичный вектор, направленный вдоль магнитного поля. Обобщение этого вывода для двухслойной системы с электрон-дырочным спариванием приводит к следующему уравнению для скорости дрейфа,

$$v_1\mathbf{E}_1 + v_2\mathbf{E}_2 + \frac{1}{c}\mathbf{v}_d \times \mathbf{B} = 0. \quad (6.22)$$

Связанные с дрейфом токи определяются соотношением  $\mathbf{j}_i = -(e/2\pi\ell^2)v_i\mathbf{v}_d$ .

Сумма всех вкладов записывается в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{j}_1 &= -\sigma_0 v_1 (v_1\mathbf{E}_1 + v_2\mathbf{E}_2) \times \hat{z} + \frac{e}{\hbar}\rho_s\nabla\varphi + q_2 n_2 \mathbf{v}_2 + q_4 n_4 \mathbf{v}_4, \\ \mathbf{j}_2 &= -\sigma_0 v_2 (v_1\mathbf{E}_1 + v_2\mathbf{E}_2) \times \hat{z} - \frac{e}{\hbar}\rho_s\nabla\varphi + q_1 n_1 \mathbf{v}_1 + q_3 n_3 \mathbf{v}_3. \end{aligned} \quad (6.23)$$

Уравнения (6.18), (6.21) определяют градиент фазы и скорость вихрей как функции электрических полей. Подстановка в (6.23) выражений для  $\nabla\varphi$  и  $\mathbf{v}_{\varkappa}$  позволяет найти связь между  $j_i$  и  $E_i$ .

В [122] предполагалось, что вихри возникают вследствие флуктуаций суммарного фактора заполнения  $v_T = v_1 + v_2$ . В областях с избытком (недостатком) электронов присутствуют только отрицательно (положительно) заряженные вихри. Каждый избыточный элементарный заряд приводит к появлению двух вихрей с противоположной завихренностью (см. табл. 1), т.е. в областях с  $v_T < 1$  будут возникать вихри 1-го и 2-го типов, причем в равной пропорции, а в областях с  $v_T > 1$  — вихри 3-го и 4-го типа, также в равной пропорции. В [122] рассматривается простейшая модель, в которой принимается, что имеется два типа областей: области с  $v_T = 1 - \delta v$  и области с  $v_T = 1 + \delta v$ . Средний фактор заполнения равен единице, т.е. относительные

доли областей с недостатком и избытком электронов одинаковы.

В случае нулевого разбаланса подстановка решения уравнений (6.18), (6.21) в (6.23) приводит к соотношению

$$\mathbf{j}_{\pm} = \sigma_{s,\pm}^{(\alpha)} \mathbf{E}_{\pm} + \sigma_{a,\pm}^{(\alpha)} \mathbf{E}_{\pm} \times \hat{z}, \quad (6.24)$$

где индекс  $\alpha = 1(2)$  отвечает областям с избытком (недостатком) электронов. Компоненты тензора проводимости, входящие в (6.24), равны

$$\sigma_{s,+}^{(1)} = \sigma_{s,+}^{(2)} = \frac{\delta v}{2} \frac{\eta \beta}{\eta^2 + \beta^2}, \quad \sigma_{s,-}^{(1)} = \sigma_{s,-}^{(2)} = \frac{1}{2\delta v} \frac{\eta}{\beta}, \quad (6.25)$$

$$\sigma_{a,+}^{(\alpha)} = -\frac{1}{2} \left( 1 \mp (-1)^{\alpha} \delta v \frac{\beta^2}{\eta^2 + \beta^2} \right), \quad (6.26)$$

$$\sigma_{a,-}^{(\alpha)} = \mp (-1)^{\alpha} \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\delta v} - 2 \right).$$

В (6.25), (6.26) проводимость дана в единицах  $\sigma_0$  и использовано обозначение  $\beta = \pi \hbar n_0$ , где  $n_0 = 1/2\pi \ell^2$  — плотность электронов на полностью заполненном уровне Ландау.

Эффективный тензор проводимости находится путем усреднения (6.25), (6.26) по статистически распределенным областям двух типов. Подстановка (6.27), (6.26) в известные из теории Дыхне [118] соотношения для эффективной проводимости двухфазной среды,

$$\sigma_{s,\text{eff}}^{\pm} = \sqrt{\sigma_{s,\pm}^{(1)} \sigma_{s,\pm}^{(2)}} \left[ 1 + \frac{\left( \sigma_{a,\pm}^{(1)} - \sigma_{a,\pm}^{(2)} \right)^2}{\left( \sigma_{s,\pm}^{(1)} + \sigma_{s,\pm}^{(2)} \right)^2} \right]^{1/2}, \quad (6.27)$$

$$\sigma_{a,\text{eff}}^{\pm} = \frac{\sigma_{a,\pm}^{(1)} \sigma_{s,\pm}^{(2)} + \sigma_{a,\pm}^{(2)} \sigma_{s,\pm}^{(1)}}{\sigma_{s,\pm}^{(1)} + \sigma_{s,\pm}^{(2)}},$$

дает

$$\sigma_{xx,\text{eff}}^{\parallel} = \frac{\delta v}{2} \frac{\beta}{\sqrt{\eta^2 + \beta^2}}, \quad \sigma_{xy,\text{eff}}^{\parallel} = -\frac{1}{2}, \quad (6.28)$$

$$\sigma_{xx,\text{eff}}^{CF} = \frac{1}{2\delta v} \frac{\sqrt{\eta^2 + \beta^2} (1 - 2\delta v)^2}{\beta}, \quad \sigma_{xy,\text{eff}}^{CF} = 0. \quad (6.29)$$

Из (6.28), (6.29) находятся компоненты тензора сопротивлений. При  $\delta v \ll 0$  (слабые флуктуации суммарного фактора заполнения)

$$\rho_{xx,\text{eff}}^{\parallel} \approx 2\delta v \frac{\beta}{\sqrt{\eta^2 + \beta^2}}, \quad \rho_{xy,\text{eff}}^{\parallel} \approx 2, \quad (6.30)$$

$$\rho_{xx,\text{eff}}^{CF} \approx 2\delta v \frac{\beta}{\sqrt{\eta^2 + \beta^2}}, \quad \rho_{xy,\text{eff}}^{CF} = 0, \quad (6.31)$$

$$\rho_{xx,\text{eff}}^{\text{drag}} \approx 2(\delta v)^2 \frac{\beta^3}{(\eta^2 + \beta^2)^{3/2}}, \quad \rho_{xy,\text{eff}}^{\text{drag}} = -1 \quad (6.32)$$

(в единицах  $\rho_0 = 1/\sigma_0$ ). В приближении, линейном по малому параметру  $\delta v$ , продольные сопротивления в режиме параллельных токов и режиме противотоков оказываются одинаковыми. Их разница, задающая сопротивление увлечения, пропорциональна второй степени малого параметра  $\delta v$ .

В [122] рассмотрена также модель, в которой, как и в [116], предполагается наличие в системе областей, где электрон-дырочное спаривание отсутствует. В таких областях (фаза 1) тензор сопротивления определяется выражением (6.1). В оставшихся областях за счет избытка или недостатка электронов имеется некоторое количество вихрей. Совокупность таких областей рассматривалась как фаза 2 с усредненным тензором проводимости (6.28), (6.29), и решалась задача о проводимости двухфазной двумерной среды с произвольным соотношением концентраций фаз. Эффективный тензор проводимости рассчитывался с использованием общего выражения для проводимости двухфазной двумерной системы в магнитном поле [123]. Результат расчета продольной и холловской компонент сопротивления как функций доли дефектной фазы  $p$  приведен на рис. 3. Как видно из представленных зависимостей, в модели [122], в отличие от [116], продольное сопротивление в режиме противотоков возникает и при малой концентрации дефектной фазы. При этом увеличение доли дефектной фазы приводит сначала к росту, а затем к падению продольного сопротивления увлечения.

Рассмотренные подходы предсказывают положительный знак  $\rho_{xx}^{\text{drag}}$ . Такой же знак имеет увлечение, связанное с передачей импульса от носителей заряда одного слоя к носителем заряда другого слоя за счет рассеяния, если эти заряды одного знака. Если второй слой включен в замкнутую цепь (противоположные концы соединены внешним проводником), то при положительном знаке  $\rho_{xx}^{\text{drag}}$  в этой цепи потечет электрический ток в том же направлении, что и в цепи первого (увлекающего) слоя. При электрон-дырочном спаривании, так как заряд переносится электрон-дырочными парами, кажется более естественным ожидать протекание тока увлечения в противоположном направлении, что отвечает отрицательному знаку  $\rho_{xx}^{\text{drag}}$ . Тем не менее знак  $\rho_{xx}^{\text{drag}}$  и в эксперименте и в теории получается положительным. Кажущееся противоречие связано с тем, что мы имеем дело с квантовой холловской системой, где тензор сопротивлений содержит большую по величине недиагональную компоненту. При этом существенно, что речь идет о геометрии холловской полосы.

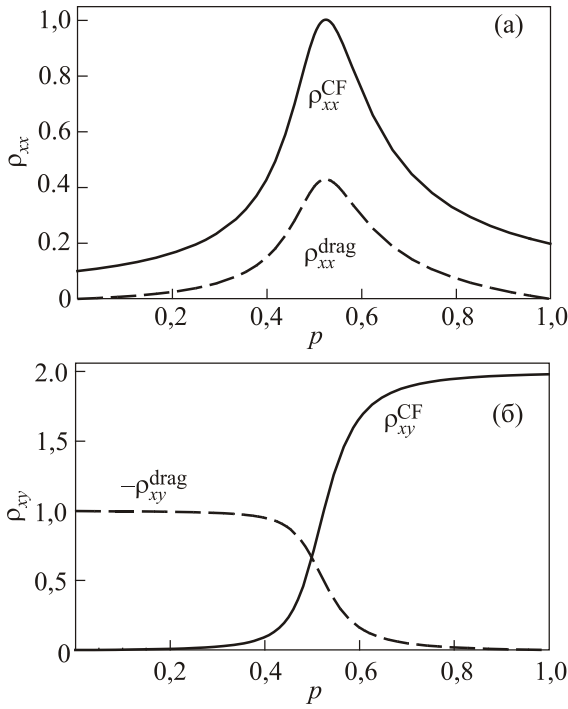


Рис. 3. Продольная (а) и холловская (б) компоненты удельного сопротивления (в единицах  $\sigma_0^{-1}$ ) в зависимости от доли областей, в которых электрон-дырочное спаривание отсутствует. Сплошными линиями показано сопротивление протеканию противотоков, штриховыми линиями — сопротивление увлечения. Расчет выполнен для  $\rho_{1/2} = 0,2$  и  $\delta v\beta/\eta = 0,05$ .

В геометрии диска Корбино тензорная связь между плотностью тока и напряженностью поля, записанная для небольшого участка системы,  $j_x^\pm = \sigma_{xx}^\pm E_x^\pm + \sigma_{xy}^\pm E_y^\pm$ , переходит в скалярную связь. Действительно, выбирая ось  $x$  вдоль радиуса диска, приходим к выводу, что поле  $E_y$  равняется нулю (иначе бы возникало вихревое электрическое поле). Из соотношения

$$E_x^\pm = \frac{1}{\sigma_{xx}^\pm} j_x^\pm \quad (6.33)$$

следует, что продольная компонента сопротивления увлечения определяется выражением

$$\rho_{xx}^{drag} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\sigma_{xx}^-} - \frac{1}{\sigma_{xx}^+} \right) = \frac{\sigma_{xx}^+ - \sigma_{xx}^-}{2\sigma_{xx}^+ \sigma_{xx}^-}. \quad (6.34)$$

Величина (6.34) отрицательна при  $\sigma_{xx}^- > \sigma_{xx}^+$ . Для усредненных величин последнее неравенство выполняется как в модели [116], так и в модели [122], независимо от соотношения между концентрациями фаз, и в геометрии диска Корбино должно наблюдаться увлечение с отрицательным знаком  $\rho_{xx}^{drag}$ .

Транспортные свойства в геометрии диска Корбино изучены экспериментально в работе [98]. В этой работе цепь тока увлечения была замкнута на внешнее со-

противление и измерялось отношение тока увлечения к увлекающему току. Если считать внешнее сопротивление малым по сравнению с  $(\sigma_{xx}^+)^{-1}$  или  $(\sigma_{xx}^-)^{-1}$ , то, используя (6.33) и правило напряжений Кирхгофа для цепи увлекаемого тока, легко получить, что отношение токов равно

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{\sigma_{xx}^+ - \sigma_{xx}^-}{\sigma_{xx}^+ + \sigma_{xx}^-}, \quad (6.35)$$

где индекс «1» относится к слою, через который пропускается заданный внешний ток. При выполнении условия  $\sigma_{xx}^- > \sigma_{xx}^+$  ток увлечения  $I_2$  будет иметь направление, противоположное направлению увлекающего тока, что и наблюдалось в эксперименте [98]. Более того, в этом эксперименте при достаточно низких температурах отношение (6.35) было близко к  $-1$ , что соответствует  $\sigma_{xx}^- \gg \sigma_{xx}^+$ . Именно такое неравенство отвечает компонентам тензора проводимости (6.28), (6.29).

Во избежание недоразумений, заметим, что в системах, где носители заряда в слоях имеют разные знаки, определенное выше сопротивление увлечения должно быть отрицательным и в сверхпроводящем и в нормальном состоянии. Это связано с разными знаками групповых скоростей электронов и дырок с одинаковыми импульсами. В таких системах вблизи точки перехода вместо смены знака сопротивления увлечения можно ожидать возрастание  $\rho_{xx}^{drag}$ . Как уже упоминалось в разд. 3, такой эффект, действительно, наблюдался экспериментально в гетероструктурах GaAs–AlGaAs [73,74].

### 7. Стационарный и нестационарный эффекты Джозефсона в системах с электрон-дырочной сверхпроводимостью

Выше мы пренебрегали туннелированием между слоями. Этот раздел посвящен рассмотрению круга явлений, для которых учет туннелирования является существенным.

Трехмерным аналогом систем с электрон-дырочным спариванием при наличии туннелирования является экситонный диэлектрик, в котором имеют место межзонные переходы. Роль межзонных матричных элементов кулоновского взаимодействия с несохранением числа частиц в каждой из зон была рассмотрена в работе Гусейнова и Келдыша [124]. В этой работе показано, что процессы рассеяния с несохранением числа частиц играют роль источника экситонов и они снимают вырождение основного состояния относительно изменения фазы параметра порядка электрон-дырочного спаривания. Этим нарушается условие существования голдстоуновской моды, и в результате система должна переходить не в сверхтекучее, а в диэлектрическое состояние. Впоследствии такое заключение часто интерпретировалось как невозможность сверхтекучести и в системах со спариванием пространственно разделенных носителей при наличии туннелиро-



вания между слоями. Однако эта интерпретация оказалась неточной. На самом деле, снятие вырождения приводит не к требованию постоянства фазы в пространстве, а к уравнению для фазы, которое является следствием уравнения непрерывности. По форме оно совпадает с уравнением нелинейного маятника. Впервые в работе [125], а затем и в работах [126–128] в рамках теории среднего поля было установлено, что при малой (по сравнению с параметром порядка) амплитуде туннелирования уже в слабых внешних полях происходит срыв закрепления фазы параметра порядка, обусловленного туннельными переходами. В [125] показано существование «продольной сверхтекучести» — диамагнитного отклика на продольное магнитное поле и «поперечной сверхтекучести» — аналога эффекта Джозефсона. Отметим, что в рассматриваемых системах может иметь место два различных эффекта Джозефсона. Первый из них реализуется в двухслойной однородной в плоскости слоев системе в присутствии межслоевого туннелирования. Ниже мы будем называть такой эффект поперечным эффектом Джозефсона. Второй эффект (который мы будем называть продольным) возникает в неоднородной системе, где правая и левая области с электрон-дырочным спариванием слабо связаны между собой. В последнем случае имеется почти полная аналогия [24] с эффектом Джозефсона в обычных сверхпроводниках. Отличие только в том, что туннелируют электрон-дырочные пары и токи в слоях направлены противоположно друг другу. В работе [126] построена схема типа Гинзбурга–Ландау для описания неоднородных состояний в системах со спариванием электронов и дырок из разных пространственных областей. С помощью полученных уравнений исследован вопрос о токовых состояниях в таких системах. Показано, что туннеливание электронов из области с электронной проводимостью в область с дырочной проводимостью делает невозможным протекание однородных в плоскости слоев токов, но не препятствует протеканию неоднородных сверхтоков. В работе [129] изучены неоднородные токовые состояния в названных системах с учетом межзонных переходов, обусловленных кулоновским взаимодействием. Показано, что последние приводят к появлению в уравнении для фазы дополнительного слагаемого, пропорционального  $\sin 2\varphi$ .

В дальнейшем основное внимание как в теории, так и в эксперименте было сосредоточено на поперечном эффекте Джозефсона в двухслойных квантовых холловских системах. Ниже мы ограничимся обсуждением именно этого случая.

Поперечный эффект Джозефсона в двухслойных электронных системах со спонтанной межслоевой фазовой когерентностью в сильном нормальном к слоям магнитном поле был впервые рассмотрен в работах [130,131]. Авторы [130] записали следующую систему уравнений для фазы параметра порядка  $\varphi$  и заряда  $q$ , накопленного на одном из слоев:

$$\dot{q} = \frac{\hbar}{e} C \ddot{\varphi} = -I_c \sin \varphi - \frac{V}{R_{\text{leak}}} + \frac{V_{\text{ex}} - V}{R_{\text{ex}}}, \quad \hbar \dot{\varphi} = eV, \quad (7.1)$$

где  $C$  — электрическая емкость двухслойной системы,  $I_c$  — величина максимального джозефсоновского тока,  $V$  — напряжение между слоями, совпадающее с разницей электрохимических потенциалов слоев,  $V_{\text{ex}}$  — напряжение на внешних контактах,  $R_{\text{leak}}$  — сопротивление току утечки (нормальному туннельному току), и  $R_{\text{ex}}$  — сопротивление подводящих проводов.

Уравнения (7.1) имеют стационарное решение  $\dot{\varphi} = 0$ ,  $\dot{q} = 0$ , которое соответствует протеканию через систему постоянного тока  $I = V_{\text{ex}}/R_{\text{ex}}$ . Этот ток должен совпадать с током Джозефсона  $I_c \sin \varphi$ , откуда следует, что стационарное состояние возможно, если внешнее напряжение удовлетворяет условию  $V_{\text{ex}} \leq I_c R_{\text{ex}}$ . В стационарном состоянии напряжение  $V$  и ток утечки равны нулю и диссипация энергии происходит только в подводящих проводах, т.е. можно говорить о стационарном эффекте Джозефсона.

Впервые о возможном наблюдении эффекта Джозефсона в двухслойной квантовой холловской системе сообщалось в работе [132]. Было экспериментально установлено, что дифференциальный туннельный кондактанс  $dI/dV$  демонстрирует резкий пик при  $V = 0$  при суммарном факторе заполнения  $\nu_T = 1$ . При нарушении условия  $\nu_T = 1$  или при увеличении  $d/\ell$  (отношения межслоевого расстояния к магнитной длине) пик пропадает. При этом, хотя пиковое значение дифференциального кондактанса на несколько порядков больше его значения вдали от пика, кондактанс все равно остается конечным. Транспортные аномалии, которые можно отнести на счет джозефсоновского туннелирования, наблюдались в последующих экспериментах [133–145].

Задача описать наблюдаемый круг явлений [132–145] стимулировала большое число теоретических исследований. Один из главных вопросов, на который пытались ответить авторы этих работ, состоит в том, может ли туннельный ток в таких системах протекать без диссипации. Используемые подходы можно разделить на два типа. В работах [146–152] фазовая динамика рассматривалась на основе детерминированных уравнений движения, а возможные механизмы, приводящие к конечному кондактансу, учитывались путем введения в уравнения движения различного рода диссипативных слагаемых. В работах [153–157] рассмотрение основывалось на добавлении в поле фазы стохастической компоненты, связанной с хаотически расположенными планарными вихрями (меронами).

В работе [146] было высказано сомнение относительно того, что в рассматриваемой системе можно в принципе достичь бесконечного кондактанса. Авторы [146] использовали псевдоспиновое представление (5.26), (5.27) для параметра порядка и записали уравнения движения в виде



$$\hbar \dot{m}_z = t_J m_y, \quad \hbar \dot{m}_y = \delta\mu - \frac{\hbar}{\tau} m_y, \quad (7.2)$$

где  $t_J$  — амплитуда джозефсоновского туннелирования,  $\delta\mu$  — разница электрохимических потенциалов слоев,  $\tau$  — некоторое время релаксации. Компонента намагниченности  $m_y$  и фаза параметра порядка  $\varphi$  связаны соотношением  $m_y = \sin\varphi$ .

Уравнение (7.2) имеет стационарное решение  $m_y = \tau\delta\mu/\hbar$ . Это решение означает, что протекание туннельного тока  $I_J = I_c m_y$  (где  $I_c = (et_J/\hbar)(S/2\pi\ell^2)$ ) сопровождается появлением конечного кондактанса

$$G = \frac{e^2}{\hbar} \frac{\tau t_J}{\hbar} \frac{S}{2\pi\ell^2}. \quad (7.3)$$

Время  $\tau$  можно выразить через время релаксации квазичастиц  $\tau_{qp}$ :  $\tau = \tau_{qp}(t_J + e^2/\varepsilon\ell)/t_J$  [146]. Так как  $t_J \ll e^2/\varepsilon\ell$ , кондактанс практически не зависит от амплитуды туннелирования.

Аналогичный результат получен в работе [147], где рассматривался поперечный эффект Джозефсона в двухслойной электрон-дырочной системе в отсутствие нормального к слоям магнитного поля. Использовалось динамическое уравнение для параметра порядка, выведенное в [158] для системы с примесями в бесщелевом состоянии (аналог бесщелевой сверхпроводимости в сверхпроводнике с парамагнитными примесями [43]). Если считать, что фаза параметра порядка не зависит от координаты, динамическое уравнение принимает вид

$$\hbar\dot{\varphi} - eV + eV_c \sin\varphi = 0, \quad (7.4)$$

где  $V_c = \hbar t_{12}/e\lambda\tau_e\Delta_0$ . Здесь  $\lambda$  — безразмерная константа связи,  $\Delta_0$  — модуль параметра порядка,  $\tau_e$  — время свободного пробега электронов. Уравнение (7.4) имеет стационарное решение  $\sin\varphi = V/V_c$ . Такому решению отвечает поперечный ток  $I = I_c \sin\varphi$ , пропорциональный напряжению между слоями, и конечный кондактанс [147]

$$G = \frac{4e^2}{\hbar} \frac{Sm\Delta_0^2\tau_e}{\pi\hbar^3}. \quad (7.5)$$

Как и в предыдущем случае, кондактанс не зависит от  $t_J$ .

В подходе [146] конечный кондактанс обусловлен диссипативным слагаемым  $(\hbar/\tau)m_y$  в уравнениях движения (7.2). Как отмечено в [148], такое же слагаемое появляется и в уравнениях движения для фазы в обычном джозефсоновском контакте. Эти уравнения имеют вид

$$\begin{aligned} \hbar\dot{\varphi} &= 2eV + \alpha_\varphi \dot{N}, \\ 2e\dot{N} &= -I_c \sin\varphi - 2e\alpha_G \dot{\varphi} + I_{\text{bias}}, \end{aligned} \quad (7.6)$$

где  $N$  — число куперовских пар, аккумулированных на одном из берегов контакта,  $I_{\text{bias}}$  — ток, втекающий в контакт из внешней цепи,  $\alpha_G$  — коэффициент, пропорциональный нормальному сопротивлению контак-

та, и  $\alpha_\varphi$  — коэффициент диссипации, связанной с изменением числа пар на контакте. Хотя и в этом случае уравнение для фазы содержит диссипативное слагаемое, система уравнений (7.6) имеет стационарное решение  $V = 0$ ,  $\sin\varphi = I_{\text{bias}}/I_c$ , что отвечает равному нулю кондактансу. Стационарность достигается за счет тока  $I_{\text{bias}}$ , который компенсирует изменение  $N$ .

Аналогичным образом записывается уравнение для фазы и разбаланса факторов заполнения в двухслойной квантовой холловской системе [148]:

$$\hbar\dot{\varphi} = \beta m_z + \alpha_\varphi \dot{m}_z,$$

$$e\dot{m}_z = -I_c \sin\varphi - \alpha_G \dot{\varphi} + I_{\text{ext}}, \quad (7.7)$$

где  $\beta$  — энергия магнитной анизотропии. Величина  $I_{\text{ext}}$  представляет собой ток, подводимый к системе через контакты. Этот ток играет такую же роль, как и ток  $I_{\text{bias}}$  в системе (7.6). Уравнения (7.7) имеют стационарное решение  $\sin\varphi = I_{\text{ext}}/I_c$ . Кондактанс определяется сопротивлением подводящих проводов. Отметим, что в [130] этот же результат получен без учета диссипативного слагаемого  $\alpha_\varphi \dot{m}_z$ .

В экспериментах электрические токи вводятся через контакты, расположенные на краях системы, и в слоях протекают продольные токи. В этой ситуации фаза зависит не только от времени, но и от координаты, и более подробный анализ требует учета этого обстоятельства. Кроме того, нужно учесть, что в общем случае продольный ток включает как сверхпроводящую, так и нормальную компоненту. Суммарный ток  $\mathbf{j}_+ = \mathbf{j}_1 + \mathbf{j}_2$  совпадает с суммарным током  $\mathbf{j}_{n1} + \mathbf{j}_{n2}$  нормальной компоненты. Поскольку суммарный фактор заполнения не зависит от времени, то дивергенция этого тока равна нулю. Разницу нормальных токов можно записать в виде  $\mathbf{j}_{n1} - \mathbf{j}_{n2} = \mathbf{j}_+ m_z$ . Отсюда следует, что  $\nabla \cdot (\mathbf{j}_{n1} - \mathbf{j}_{n2}) = (\mathbf{j}_+ \cdot \nabla) m_z$ . Если контакты разнесены, то вблизи контакта имеет место разбаланс факторов заполнения. Разбаланс меняется от максимального значения  $m_z = \pm 1$  вблизи контактов до своего значения в объеме образца ( $m_z = 0$  при  $\nu_1 = \nu_2 = 1/2$ ). Вблизи таких контактов происходит трансформация нормального тока в сверхпроводящий. В стационарном случае эта трансформация описывается уравнением [152]

$$\frac{e}{\hbar} \rho_s \nabla^2 \varphi + j_T + \frac{1}{2} (\mathbf{j}_+ \cdot \nabla) m_z = 0, \quad (7.8)$$

где

$$j_T = -\frac{e}{\hbar} \frac{t_J}{2\pi\ell^2} \sin\varphi \quad (7.9)$$

— плотность джозефсоновского тока, текущего из слоя 1 в слой 2. Уравнение (7.8) есть уравнение непрерывности для разности токов  $\mathbf{j}_1 - \mathbf{j}_2$ .

Вне приконтактных областей уравнение непрерывности приобретает вид

$$\nabla^2\varphi = \frac{1}{\lambda_J^2} \sin \varphi, \quad (7.10)$$

где  $\lambda_J = \ell\sqrt{2\pi\rho_s/t_J}$  — джозефсоновская длина. Это уравнение следует дополнить граничным условием

$$\frac{e}{\hbar} \int_{\Omega_k} dl \rho_s \mathbf{n} \cdot \nabla\varphi = \frac{I_k I_k}{2}, \quad (7.11)$$

где  $I_k$  — ток, втекающий через  $k$ -й контакт,  $I_k = +1(-1)$  для контакта в верхнем (нижнем) слое, интегрирование выполняется по границам приконтактной области  $\Omega_k$  (за пределами области трансформации), и  $\mathbf{n}$  — единичный вектор нормали к границе.

Основываясь на уравнении (7.8), авторы [152] анализируют вопрос о критическом токе. Критический ток в данном случае определен как максимальный ток, при котором фаза остается стационарной. Рассматриваются контакты, размер которых много меньше джозефсоновской длины  $\lambda_J$ . Ответ зависит от соотношения между джозефсоновской длиной и характерными размерами системы. Авторы [152] различают три случая. Если  $\lambda_J$  много больше длины системы, туннельный ток слабо зависит от координат. При этом критический ток пропорционален площади системы и первой степени амплитуды туннелирования:

$$I_c^{\text{bulk}} = \frac{e}{\hbar} \frac{t_J S}{2\pi\ell^2}. \quad (7.12)$$

Если  $\lambda_J$  меньше длины системы, но больше характерной ширины образца  $L_y$ , то плотность туннельного тока отлична от нуля лишь в областях вблизи краев. Эффективная площадь контактов порядка  $L_y\lambda_J$ . В этом случае критический ток порядка

$$I_c^{\text{edge}} \sim \frac{e}{\hbar} \frac{\rho_s L_y}{\lambda_J}. \quad (7.13)$$

Этот ток пропорционален ширине системы, а не ее площади, и с учетом, что  $\lambda_J \propto 1/\sqrt{t_J}$ , он зависит от амплитуды туннелирования по закону  $I^c \propto \sqrt{t_J}$ . Если  $\lambda_J$  много меньше  $L_y$ , то характерная площадь областей, в которых туннельный ток отличен от нуля, пропорциональна  $\lambda_J^2$  и критический ток не зависит ни от размера системы, ни от амплитуды туннелирования

$$I_c^{\text{contact}} \sim \frac{e}{\hbar} \rho_s. \quad (7.14)$$

В работе [152] подчеркивается различие между туннельными характеристиками двухслойной системы и обычного джозефсоновского контакта. В стационарном режиме сопротивление обычного джозефсоновского контакта равно нулю, а при переходе в нестационарный режим сопротивление становится конечным. В двухслойной системе со спонтанной межслоевой коге-

рентностью сопротивление отлично от нуля и в стационарном режиме. Это связано с зацеплением сверхпроводящего тока и противотока квазичастиц. Зацепление обусловлено трансформацией вблизи контактов нормального тока в сверхпроводящий.

В цитируемых выше экспериментах в основном использовалась так называемая туннельная геометрия. В этой геометрии входящий и выходящий контакты расположены в верхнем и нижнем слоях на разных краях системы. В такой геометрии за перенос заряда вдоль слоев отвечает нормальный ток  $\mathbf{j}_+$  и сопротивление не может быть меньше продольного сопротивления  $\rho_{xx}^{\parallel}$  (см. разд. 6). В этой связи критический ток надо понимать как величину тока, выше которого сопротивление системы резко возрастает. Это проявляется в том, что ток как функция  $V$  имеет большую производную при малых  $V$ , достигает максимума, а затем резко падает. Значение в максимуме соответствует критическому току.

Если входящий и выходящий контакты находятся на одном и том же краю системы, а контакты верхнего и нижнего слоев на противоположном краю системы замкнуты друг на друга, то такую геометрию называют геометрией противотоков.

Особенности транспорта в геометрии противотоков рассмотрены в работах [149,151]. В этих работах поведение системы описывается с помощью нестационарных уравнений, записанных для разбаланса электрон-ных плотностей в слоях и для фазы параметра порядка.

Первое из этих уравнений есть нестационарное уравнение непрерывности  $\partial_t \rho_1 + \partial_x j_{s1} + j_T + \partial_x j_{n1} = 0$ . Плотность избыточного заряда  $\rho_1$  связана с локальной разностью потенциалов  $V = V_2 - V_1$  соотношением  $\rho_1 = -CV$ , где

$$C = \frac{\varepsilon}{4\pi d} \left[ 1 - \frac{\ell}{d} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left[ 1 - \exp\left(\frac{d^2}{2\ell^2}\right) \operatorname{erfc}\left(\frac{d}{\ell\sqrt{2}}\right) \right] \right]^{-1} \quad (7.15)$$

— емкость единицы площади, вычисленная с учетом обменного взаимодействия. Нормальный ток пропорционален продольному градиенту потенциала  $V$ :  $j_{n1} = \sigma_n \partial_x V$ , где  $\sigma_n$  — проводимость надконденсатных квазичастиц. В результате уравнение непрерывности принимает вид

$$C \frac{\partial V}{\partial t} = \frac{e}{\hbar} \rho_s \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{e}{\hbar} \frac{t_J}{2\pi\ell^2} \sin \varphi + \sigma_n \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}. \quad (7.16)$$

Рассматривается однородное по  $y$  токовое состояние. Считается что контакты имеют поперечный размер, равный ширине холловской полосы  $L_y$ .

Уравнение для фазы представляет собой соотношение Джозефсона с дополнительным диссипативным слагаемым, аналогичным тому, которое обсуждалось в начале этого раздела (см. уравнения (7.2) и (7.7)),

$$\hbar \frac{\partial \varphi}{\partial t} = eV + \alpha_\varphi \left( 2\pi\ell^2 \rho_s \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - t_J \sin \varphi \right). \quad (7.17)$$

В [151] предложено следующее объяснение происхождения диссипативной добавки в (7.17). Как известно, уравнение Навье–Стокса, описывающее гидродинамику нормальной жидкости, содержит слагаемые, отвечающие сдвиговой и объемной вязкости, называемых обычно первой и второй вязкостью. Различие между первой и второй вязкостью состоит в том, что диссипация, связанная с первой из них, возникает при движении одной части жидкости относительно другой, а при объемных деформациях жидкости работает вторая вязкость. В сверхтекучих системах первая вязкость равна нулю, а вторая, в общем случае, отлична от нуля, если речь идет о сжимаемой жидкости. Линеаризованное уравнение для скорости сверхтекучей компоненты с вязкостным слагаемым имеет вид  $\partial \mathbf{v}_s / \partial t = -\nabla(\mu/m) + \nabla(\zeta \nabla \cdot \mathbf{n}_s \mathbf{v}_s)$ , где  $\mu$  — химический потенциал,  $\zeta$  — вторая вязкость, и предполагается, что нормальная компонента покоится. В случае электрон-дырочной сверхтекучести химический потенциал заменяется на  $-eV$  и дивергенция сверхтекучего потока — на сумму дивергенций противотока и джозефсоновского тока. В результате уравнение для сверхтекучей скорости принимает вид

$$\frac{\partial \mathbf{v}_s}{\partial t} = \nabla \frac{eV}{m} + \nabla \left[ \frac{\zeta}{e} (\nabla \cdot \mathbf{j}_{s1} + j_T) \right]. \quad (7.18)$$

С учетом соотношения  $\mathbf{v}_s = \hbar \nabla \varphi / m$  и явного вида токов  $j_{s1}$  и  $j_T$  уравнение (7.18) дает (7.17) с  $\alpha_\varphi = \zeta m / 2\pi\ell^2 \hbar$ .

На входном краю  $x = x_L$  граничное условие имеет вид  $j_{s1}(x_L) = j_{in}$ , где  $j_{in} = I_{in} / L_y$  — плотность втекающего тока. В геометрии противотоков верхний и нижний контакты на втором краю соединены перемычкой. Если перемычка имеет конечное сопротивление  $R$ , то для протекания тока через перемычку напряжение на ее концах должно быть отлично от нуля. Это нарушает стационарность фазы. Другими словами, если  $R \neq 0$ , то стационарное состояние может реализоваться только в ситуации, когда продольный ток на втором краю равен нулю. Стационарное решение соответствует появлению половины уединенного джозефсоновского вихря (или меньшей его части) на входном краю. Туннельный и продольный токи отличны от нуля на длине порядка  $\lambda_J$ . Такое решение удовлетворяет граничным условиям, если

$$j_{in} < j_{c1} = \frac{2e \rho_s}{\hbar \lambda_J}. \quad (7.19)$$

Величина  $j_{c1}$  есть критическая плотность входного тока, при превышении которой ток доходит до противоположного края.

Если  $j_{in} > j_{c1}$  и  $R = 0$ , то стационарное решение уравнений (7.16), (7.17) представляет собой неподвиж-

ную цепочку джозефсоновских вихрей. При  $R \neq 0$  возможно только нестационарное решение системы уравнений (7.16), (7.17). В [151] это решение получено для  $j_{in} \gg j_{c1}$ . Решение ищется в виде

$$\begin{aligned} \varphi(x, t) &= kx - \omega t + A_\varphi \sin(kx - \omega t) + B_\varphi \cos(kx - \omega t), \\ V(x, t) &= -V_0 + A_V \sin(kx - \omega t) + B_V \cos(kx - \omega t), \end{aligned} \quad (7.20)$$

где  $V_0$  — напряжение на перемычке,  $\omega = eV_0 / \hbar$ , и волновое число  $k$  определяется средним по времени значением сверхпроводящего тока:  $k = \hbar \langle j_{s1} \rangle / e \rho_s$ . Предполагается, что утечка за счет туннельного тока мала и закон Ома на перемычке можно записать в виде  $V_0 = \langle j_{s1} \rangle L_y R$ . Неизвестные коэффициенты, входящие в (7.20), вычисляются в линейном по  $t_J$  приближении.

Ток в системе представляет собой сумму постоянного тока и тока движущейся цепочки джозефсоновских вихрей. Скорость движения вихрей пропорциональна  $R$ . Мощность потерь вычисляется как разница входной мощности и мощности на нагрузке. Мощность потерь на единицу площади определяется средней плотностью джозефсоновского тока:  $w_{loss} = V_0 \langle j_T \rangle$ . Найдено, что мощность потерь резонансно возрастает, если сопротивление нагрузки  $R$  равняется

$$R_{res} = \frac{\hbar}{e L_y \sqrt{\rho_s C}}. \quad (7.21)$$

Вдали от резонанса, при  $R \ll R_{res}$ , мощность потерь на единицу площади равна

$$w_{loss} \approx \frac{t_J^2}{4\pi\ell^2 \hbar} \left( \frac{\hbar \sigma_n}{2\pi\ell^2 \rho_s C} \frac{R^2}{R_{res}^2} + \alpha_\varphi \frac{R^4}{R_{res}^4} \right). \quad (7.22)$$

При  $R \gg R_{res}$  мощность потерь определяется выражением

$$w_{loss} \approx \frac{t_J^2}{4\pi\ell^2 \hbar} \left( \alpha_\varphi + \frac{\hbar \sigma_n}{2\pi\ell^2 \rho_s C} \frac{R_{res}^2}{R^2} \right). \quad (7.23)$$

В рассмотренном случае средний туннельный ток и мощность потерь пропорциональны квадрату матричного элемента туннелирования и площади системы. Потери отсутствуют, если коэффициент второй вязкости  $\alpha_\varphi$  и проводимость надконденсатных квазичастиц  $\sigma_n$  обращаются в нуль.

На невозможность реализовать протекание противотоков тока в стационарном режиме при подключении источника к одному из концов системы указывалось и в работе [150]. Была предложена еще одна геометрия — геометрия увлечения. В геометрии увлечения источник подключается к двум противоположным краям одного слоя, а цепь нагрузки замыкает противоположные края другого слоя. При любом входящем токе состояние остается стационарным. Если контактная разность потенциалов равна нулю, то в геометрии

увлечения передача тока от источника к нагрузке будет происходить без потерь. Предложение [150] получило развитие в работе [159], где выдвинута идея создания нанотрансформатора на основе двухслойной системы с электрон-дырочным спариванием со схемой подключения, аналогичной [150].

Вопрос о влиянии на критический ток параллельно-го слоям магнитного поля рассмотрен в работе [160]. Рассматривался случай, когда джозефсоновская длина много меньше длины системы  $L_x$ , ток протекает в направлении  $x$ , а параллельное слоям магнитное поле направлено вдоль  $y$ . Проанализированы геометрия прототоков и туннельная геометрия. Как и ранее, критический ток определялся из условия стационарности фазы. При  $B_y = 0$  критический ток в туннельной геометрии ровно в два раза больше критического тока (7.19). Удвоение связано с тем, что в туннельной геометрии на каждом из краев формируется половина джозефсоновского вихря, и оба края дают вклад в туннельный ток.

В стационарном режиме сверхпроводящие токи в слоях определяются выражением

$$j_{s1} = -j_{s2} = \frac{e}{\hbar} \rho_s \left( \frac{d\theta}{dx} - \frac{eB_y d}{\hbar c} \right). \quad (7.24)$$

Фаза  $\theta$  удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2\theta}{dx^2} = \frac{1}{\lambda_J^2} \sin \theta. \quad (7.25)$$

В геометрии прототоков на входном краю  $j_{s1} = j_{in}$ , а на противоположном краю  $j_{s1}(x_R) = 0$  (предполагается, что  $R \neq 0$ , но состояние является стационарным). В туннельной геометрии при одинаковых факторах заполнения слоев нормальные токи в слоях равны друг другу и не зависят от координаты:  $j_{n1} = j_{n2} = j_n$ . Граничные условия требуют, чтобы на краях системы  $x_L$  и  $x_R$  сверхпроводящая и нормальная составляющие полного тока удовлетворяли соотношениям  $j_{s1}(x_L) = j_n$ ,  $j_{s1}(x_R) = -j_n$ . Полный ток, протекающий через систему, равен удвоенному сверхпроводящему току на конце системы, т.е.  $j_{s1}(x_L) = j_{s2}(x_R) = j_{in}/2$ .

С учетом записанных граничных условий найдено максимальное значение  $j_{in}$ , при котором возможно стационарное решение. Рассчитанные зависимости критического тока от  $B_y$  приведены на рис. 4. Максимальный критический ток в режиме прототоков достигается в магнитном поле  $B_y = B_0 = \hbar c / e d \lambda_J$ , а максимальный критический ток в туннельной геометрии — в магнитном поле, равном нулю. При этом максимальное значение критического тока будет одинаковым для двух рассмотренных геометрий. При  $B_y \gg B_0$  критические токи для двух геометрий одинаковы и много меньше критического тока в отсутствие продольного магнитного поля.

Если входящий ток меньше критического и приложено достаточно сильное параллельное слоям магнитное поле, в системе формируется стационарная решетка джозефсоновских вихрей. Как и в двумерной кристаллической решетке, элементы вихревой решетки могут смещаться в результате тепловых флуктуаций, и возможно появление дислокаций. В кристаллической двумерной решетке дислокация связана с обрывом атомного ряда (в трехмерном случае — с обрывом атомной плоскости). В решетке вихрей дислокация появляется при обрыве вихревой линии. С ростом температуры дислокации в вихревой решетке, как и в двумерной кристаллической, приводят к плавлению решетки по механизму Костерлица—Таулесса. Теория плавления решетки джозефсоновских вихрей в двухслойной квантовой холловской систем построена в работах [161–163].

В теории плавления двумерных систем Костерлица—Таулесса [38,39] показывается, что плавление происходит через диссоциацию дислокационных пар с антипараллельными векторами Бюргерса. Температура плавления выражается через коэффициенты упругости решетки. В случае рассматриваемой вихревой решетки температура плавления определяется из соотношения

$$T_{\text{melt}} = \frac{\pi}{2} \sqrt{K_{11} K_{22}}, \quad (7.26)$$

где  $K_{11}$  — модуль сжатия, и  $K_{22}$  — сдвиговая жесткость вихревой решетки.

Энергия вихревой решетки равна

$$E = \int d^2r \left[ \frac{1}{2} \rho_s (\nabla\theta - \mathbf{Q})^2 - \frac{t_j}{2\pi\ell^2} \cos\theta \right], \quad (7.27)$$

где  $\theta(\mathbf{r}) = \varphi(\mathbf{r}) + \mathbf{Q} \cdot \mathbf{r}$ , и  $\mathbf{Q} = e\mathbf{B}_{pl} \times \hat{z} d / \hbar c$ . Вариационная производная от энергии по  $\theta(\mathbf{r})$  обращается в нуль,

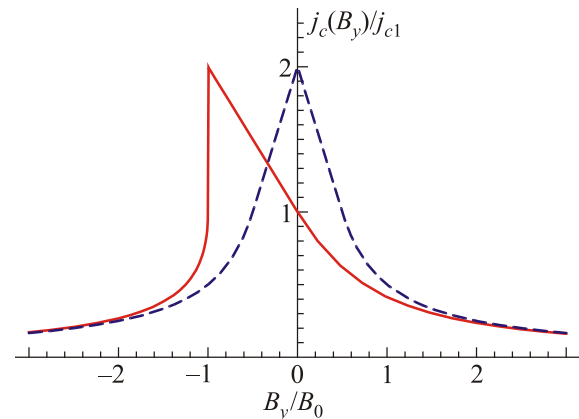


Рис. 4. Зависимость критического тока от параллельного слоям магнитного поля. Сплошная линия соответствует геометрии прототоков, штриховая линия — туннельной геометрии.



если фаза  $\theta$  удовлетворяет уравнению (7.25). Решетке вихрей соответствует решение (7.25) в виде монотонно возрастающей функции

$$\theta_0(\mathbf{r}) = \pi + 2 \operatorname{am}\left(\frac{x}{\lambda_J \sqrt{m}} \mid m\right), \quad (7.28)$$

где  $\operatorname{am}(x \mid m)$  — амплитуда эллиптических функций Якоби. Параметр  $m$  заключен в интервале  $[0,1]$  и определяется из условия минимума энергии (7.27). Интегрирование (7.27) после подстановки в него (7.28) дает

$$\frac{E}{L_x L_y} = \frac{\rho_s}{\lambda_J^2} \left[ \frac{\lambda_J^2 Q^2}{2} - \frac{\pi \lambda_J Q}{\sqrt{m} K(m)} + \frac{4E(m)}{mK(m)} + 1 - \frac{2}{m} \right], \quad (7.29)$$

где  $K(m)$  и  $E(m)$  — эллиптические интегралы первого и второго рода соответственно. При получении (7.29) предполагается, что магнитное поле направлено вдоль оси  $y$  и на длине  $L_x$  укладывается целое число периодов вихревой решетки. Период решетки равен  $a = 2\lambda_J \sqrt{m} K(m)$ . Приравняв нулю производную от энергии (7.29) по  $m$ , получают уравнение

$$Q \lambda_J = \frac{4 E(m)}{\pi \sqrt{m}}. \quad (7.30)$$

Уравнение (7.30) определяет зависимость параметра  $m$  (и, соответственно, периода решетки  $a$ ) от магнитного поля  $B_{pl}$ . Это уравнение имеет решение, если

$$B_{pl} > B_{c1} = \frac{4 \hbar c}{\pi e d \lambda_J}, \quad (7.31)$$

что является условием возникновения решетки. При  $B_{pl} \rightarrow B_{c1}$  период решетки стремится к бесконечности. С ростом  $B_{pl}$  период уменьшается. При  $B_{pl} \gtrsim 2B_{c1}$  волновой вектор решетки  $Q_s = 2\pi/a$  с хорошей точностью определяется уравнением  $\mathbf{Q}_s = \mathbf{Q}$ , т.е. в таких полях период решетки  $a$  обратно пропорционален магнитному полю.

Для нахождения модуля сжатия и сдвиговой жесткости вихревой решетки энергия (7.29) записывается в виде разложения по малым отклонениям волнового вектора решетки  $\delta\mathbf{Q} = (\delta Q_{s,x}, \delta Q_{s,y})$  от равновесного значения  $\mathbf{Q} = (Q_{eq}, 0)$ :

$$E - E_{eq} = \int d^2 r \left( \frac{K_{11}}{2} \delta Q_{s,x}^2 + \frac{K_{22}}{2} \delta Q_{s,y}^2 \right), \quad (7.32)$$

где

$$K_{11} = \rho_s \frac{4(1-m)K^3(m)}{\pi^2 E(m)} \quad (7.33)$$

и

$$K_{22} = \rho_s \frac{4K(m)E(m)}{\pi^2}. \quad (7.34)$$

Входящие в (7.32) коэффициенты  $K_{11}$  и  $K_{22}$  отождествляются с модулем сжатия и модулем сдвига решетки вихрей.

Подстановка найденных  $K_{11}$  и  $K_{22}$  в (7.26) дает температуру плавления вихревой решетки

$$T_{\text{melt}} = \frac{2\rho_s K^2(m) \sqrt{1-m}}{\pi}. \quad (7.35)$$

При  $B_{pl} \rightarrow B_{c1}$  температура  $T_{\text{melt}}$  стремится к нулю. При увеличении магнитного поля температура  $T_{\text{melt}}$  возрастает и достаточно быстро приближается к

$$T_{\text{melt},\infty} = \frac{\pi}{2} \rho_s \quad (7.36)$$

(уже при  $B_{pl} = 2B_{c1}$  отличие  $T_{\text{melt}}$  от  $T_{\text{melt},\infty}$  не превышает величину порядка одного процента). Примечательно, что температура (7.36) совпадает с температурой перехода электрон-дырочной системы в сверхпроводящее состояние в отсутствие туннелирования между слоями.

Эксперименты в геометрии противотоков проводились как для систем в форме холловской полосы [141,144], так и в форме диска Корбино [142]. Качественно обе эти системы демонстрируют поведение, которое предсказывает описанная выше теория. В частности, в работе [141] при увеличении входного тока наблюдался резкий переход от режима, при котором ток в цепи нагрузки равен нулю, к режиму, при котором входной и выходной токи практически совпадают. Однако имеются и расхождения. Например, в эксперименте [142] ток подавался через контакты, расположенные либо на внешней, либо на внутренней окружности диска Корбино. Длины этих окружностей существенно различались, а измеряемый критический ток был одинаковым. Это можно объяснить, предполагая, что туннелирование происходит по всей площади системы, а не вблизи края. Линейная зависимость туннельного тока от площади системы наблюдалась и в экспериментах, проводимых в туннельной геометрии [138,140]. Это не согласуется с результатами представленных выше теоретических работ. Оценки для джозефсоновской длины дают величину, существенно меньшую длины системы. В этом случае значение критического тока должно быть пропорционально ширине системы, а не ее площади. Кроме того, экспериментальное значение критического тока оказывается существенно меньше того, что дает теоретическая оценка.

Возможная причина указанных расхождений связана с наличием в системе планарных вихрей (меронов), которые существенно влияют на джозефсоновское туннелирование. Мероны в рассматриваемых системах могут возникать при отклонении суммарного фактора заполнения  $\nu_T$  от единицы. Они приводят к появлению сингулярностей у фазы  $\phi(\mathbf{r})$ , и их наличие проявляется в нарушении пространственного дальнего порядка. В ра-



ботах [154,156] такое влияние рассматривалось в предположении, что мероны являются статическими.

Идея работы [154] состоит в том, что мероны действуют на систему подобно продольному магнитному полю. В сильном параллельном слое магнитном поле в условиях нестационарного эффекта Джозефсона средний по времени джозефсоновский ток отличен от нуля:

$$\bar{I} = \frac{S}{2} \frac{e\rho_s}{\hbar\lambda_J^2} \frac{\tilde{\sigma}_n \tilde{Q}^2 \tilde{V}}{(\tilde{V}^2 - \tilde{Q}^2)^2 + \tilde{\sigma}_n^2 \tilde{Q}^4 \tilde{V}^2}. \quad (7.37)$$

Здесь  $\tilde{Q}$  — модуль вектора решетки и  $\tilde{V}$  — напряжение между слоями, выраженные в единицах  $\lambda_J^{-1}$  и  $\hbar\omega_J/e$  соответственно,  $\omega_J = s/\lambda_J$  — джозефсоновская частота,  $s$  — скорость звуковой моды (5.49) и  $\tilde{\sigma}_n = (\hbar\sigma_n/e^2)(\hbar\omega_J/\rho_s)$ . Ток (7.37) резонансно возрастает при  $\tilde{Q} = \tilde{V}$ .

Присутствие меронов проявляется в наличии случайной добавки  $\varphi_m(\mathbf{r})$  к фазе в выражении для туннельного тока. Эта добавка играет такую же роль, как периодическая фаза  $Qx$  в чистой системе. Разложение Фурье для экспоненты  $e^{i\varphi_m}$  можно представить как набор «дифракционных решеток» с разными  $\mathbf{k}$ , каждое из которых попадает в резонанс со своим  $V$ . В результате усреднения по набору «решеток» зависимость от  $\sigma_n$  исчезает. Авторы [154] приходят к следующей оценке для критического тока

$$I_c \sim \frac{e\rho_s}{\hbar} \frac{S a_{mp}^2}{\lambda_J^4}, \quad (7.38)$$

где  $a_{mp}$  — размер меронной пары. Хотя полученный ток пропорционален площади системы, абсолютная величина критического тока оказывается завышенной по сравнению с экспериментальным значением. Это связывается с тем, что ответ (7.37) получен без учета неустойчивости решетки при скоростях движения, превышающих скорость плазменных возбуждений. Условие устойчивости определяется неравенством  $\tilde{V} < \tilde{Q}$ . Устойчивость восстанавливается при  $\tilde{V} > \tilde{V}_c$ , где  $\tilde{V}_c \propto \sigma_n^{-1/3}$ . Как показано численно, учет такой неустойчивости приводит к уменьшению критического тока по сравнению с оценкой (7.38).

В работе [156] предлагается следующее объяснение линейной зависимости критического тока от площади системы в геометрии противотоков. В присутствии меронов энергия системы задается функционалом

$$H = \int \left[ \frac{\rho_s}{2} (\nabla\varphi)^2 + \frac{t_J}{2\pi\ell^2} \cos(\varphi + \varphi_m) \right] d^2r. \quad (7.39)$$

Поле вихрей предполагается случайным с корреляционной длиной  $\xi$ . Исходя из аналогии с магнитными системами в случайном поле [164], а также с одномерными проводниками с примесями [165] показывается, что поле фазы  $\varphi(\mathbf{r})$  имеет вид хаотически расположен-

ных доменов, в каждом из которых  $\varphi$  слабо меняется относительно равновесного значения  $\varphi_{i,eq}$ , отвечающего минимуму энергии. Характерный линейный размер домена  $L_d$  находится из примерного равенства кинетической  $E_{kin} \sim \rho_s$  и потенциальной  $E_{pot} \sim t_J \xi L_d / 2\pi\ell^2$  энергии, что дает  $L_d \sim \lambda_J^2 / \xi$ . В пределах одного домена уравнение непрерывности для фазы  $\bar{\varphi} = \varphi - \varphi_{i,eq}$  записывается в виде

$$\rho_s \nabla^2 \bar{\varphi} + \frac{t_J}{2\pi\ell^2} \frac{\xi}{L_d} f(\bar{\varphi}) = 0, \quad (7.40)$$

где функция  $f(\varphi)$  меняется в интервале  $[-1,1]$ . Появление малого множителя  $\xi/L_d$  связано с усреднением  $\sin(\varphi + \varphi_m)$  по реализациям. Второе слагаемое в (7.40) есть плотность туннельного тока, деленная на  $e/\hbar$ . Максимальный туннельный ток на один домен равен

$$I_{t,max} \approx \frac{e}{\hbar} \frac{t_J}{2\pi\ell^2} \frac{\xi}{L_d} L_d^2 = \frac{e}{\hbar} \rho_s. \quad (7.41)$$

При протекании противотоков фазы  $\bar{\varphi}_{i,eq}$  подстраиваются таким образом, чтобы максимально уменьшить величину тока, протекающего в следующий домен, и тем самым уменьшить энергию токового состояния. Это достигается, когда туннельный ток равен (7.41). Тогда критический ток равен максимальному туннельному току (7.41), умноженному на число доменов, и пропорционален площади системы,

$$I_c \approx \frac{e}{\hbar} \rho_s \frac{S}{L_d^2} \sim \frac{e}{\hbar} \rho_s \frac{S \xi^2}{\lambda_J^4}. \quad (7.42)$$

Заметим, что выражение (7.42) совпадает с (7.38), если корреляционную длину  $\xi$  отождествить с размером меронной пары. Чтобы оценка для  $I_c$  совпадала с экспериментальным значением, в работе [156] предполагалось, что области сверхтекучей фазы образуют сетку каналов. В этом случае вместо площади всей системы в уравнение (7.42) нужно подставлять суммарную площадь каналов.

В работах [155,157] влияние меронов на джозефсоновское туннелирование рассмотрено с учетом их движения. Движение меронов разрушает временной дальний порядок. Как показано в [155,157], нарушение временного порядка приводит к конечности пика в дифференциальной туннельной проводимости.

В отсутствие туннелирования, беспорядка и топологических дефектов гамильтониан рассматриваемой системы в длинноволновом приближении записывается в виде

$$H = \int d\mathbf{r} \left[ \frac{\rho_s}{2} (\nabla\varphi)^2 + \frac{1}{2C} \left( \frac{em_z}{4\pi\ell^2} \right)^2 \right], \quad (7.43)$$

где  $C$  — введенная выше емкость (7.15). Гамильтониан системы (7.43) имеет одну коллективную моду с зако-

ном дисперсии  $\omega_k = uk$ , где  $u$  совпадает с вычисленной ранее скоростью  $s$  (5.49). При наличии туннелирования в гамильтониан следует добавить член  $T_+ + T_-$ , где  $T_{\pm}$  — операторы межслойного туннелирования:

$$T_{\pm} = -\frac{t_J}{4\pi\ell^2} \int d^2r e^{\pm i\varphi} e^{\pm i\varphi_m} e^{-ieVt/\hbar}. \quad (7.44)$$

Знаки « $\pm$ » указывают направление туннелирования. Фаза параметра порядка разбивается на гладкую часть  $\varphi$  и связанную с меронами сингулярную часть  $\varphi_m$ .

Оператор туннельного тока равен  $I_T = ie(T_+ - T_-)/\hbar$ . Туннельный ток зависит от поля  $\varphi_m(\mathbf{r}, t)$ . Для описания статистических свойств этого поля вводится корреляционная длина  $\xi$  и время корреляции  $\tau$ . Эти величины определяют коррелятор

$$G_m(r, t) = \langle e^{i\varphi_m(\mathbf{r}, t)} e^{-i\varphi_m(0, 0)} \rangle = e^{-\frac{r}{\xi} - \frac{|t|}{\tau}}, \quad (7.45)$$

который записывается из феноменологических соображений. Средний джозефсоновский ток находится по теории возмущений. Из-за флуктуаций поля  $\varphi_m(\mathbf{r}, t)$  член первого порядка по амплитуде туннелирования обращается в нуль. Поправка второго порядка вычисляется с использованием золотого правила Ферми. В результате получено следующее выражение для туннельного тока

$$I_T(V) = \frac{eS}{\hbar^2} \left( \frac{t_J}{2\pi\ell^2} \right)^2 \int_0^\infty dt \int d^2r G_m(r, t) e^{-\frac{D(r, t)}{2}} \times \\ \times \sin\left(\frac{C(r, t)}{2}\right) \sin\left(\frac{eVt}{\hbar}\right), \quad (7.46)$$

где

$$D(r, t) = \frac{1}{S} \sum_{\mathbf{k}} \frac{\hbar u}{\rho_s k} [1 - \cos(ukt) \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})] \text{cth}\left(\frac{\hbar uk}{2T}\right) \quad (7.47)$$

и

$$C(r, t) = \frac{1}{S} \sum_{\mathbf{k}} \frac{\hbar u}{\rho_s k} \sin(ukt) \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) = \frac{\hbar}{2\pi\rho_s} \frac{\theta(ut - r)}{\sqrt{t^2 - \frac{r^2}{u^2}}}. \quad (7.48)$$

Используя аппроксимацию  $\sin[C(r, t)/2] \approx C(r, t)/2$  и  $D(r, t) = D_0$ , получают следующую зависимость туннельного тока от напряжения

$$I_T(V) = I_0 \int_0^\infty dq \left[ \frac{\alpha}{\alpha^2 + (V/V_0 - q)^2} - \frac{\alpha}{\alpha^2 + (V/V_0 + q)^2} \right] \times \\ \times \frac{1}{(1 + q^2)^{3/2}}, \quad (7.49)$$

где  $\alpha = \xi/u\tau$ ,  $V_0 = \hbar u/e\xi$ , и

$$I_0 = \frac{e}{\hbar} \frac{S\xi^2 t_J^2}{16\pi^2 \rho_s \ell^4} e^{-D_0/2}. \quad (7.50)$$

Из (7.49) следует, что величина дифференциального контактанса остается конечной в пределе  $V \rightarrow 0$ . При  $\alpha \ll 1$

$$G_0(0) = \frac{dI(V)}{dV} \Big|_{V \rightarrow 0} = \frac{I_0}{V_0} \frac{2}{\alpha}. \quad (7.51)$$

Поскольку  $\alpha \propto 1/\tau$ , то контактанс (7.51) пропорционален времени корреляции  $\tau$ , т.е. характерному времени существенного изменения вихревой конфигурации. В пределе  $\tau \rightarrow \infty$  ( $\alpha \rightarrow 0$ ), что соответствует неподвижным меронам, контактанс стремится к бесконечности. Величина  $I_0$  с точностью до константы, зависящей от  $\alpha$ , совпадает с критическим током. Максимальное значение критического тока  $I_c = \pi I_0$  достигается при  $\alpha \rightarrow 0$ .

Анализ, аналогичный [155, 157], был выполнен в [153]. Для случая, когда в системе имеются вызываемые меронами статические флуктуации фазы, найдено, что

$$\frac{I(V)}{S} = \frac{e}{\hbar} \frac{t_J^2}{2\pi\ell^2 \rho_s} \left(\frac{\xi}{\ell}\right)^2 \left(\frac{eV}{T}\right)^{2\pi\rho_s} \quad (7.52)$$

для  $eV \ll T$ , и  $I(V) \propto \exp(-eV\xi/\hbar u)$  в предельном случае  $eV \gg \hbar u/\xi \gg T$ . Выражение (7.52) показывает, что при  $T < 2\pi\rho_s$  дифференциальный контактанс  $(dI/dV)|_{V \rightarrow 0}$  равен нулю и характерное значение критического тока определяется выражением  $I_c \sim S(e\rho_s/\hbar)(\xi^2/\lambda_J^2)$ . Таким образом, перечисленные подходы [153–157] приводят к выводу, что в присутствии меронов критический ток пропорционален квадрату амплитуды туннелирования, квадрату корреляционной длины пространственного распределения меронов и площади системы, а наличие либо отсутствие контактанса зависит от того, могут ли мероны двигаться.

## 8. Электрон-дырочная сверхпроводимость в графеновых системах и топологических изоляторах

В 2004 году была экспериментально продемонстрирована возможность создания моноатомного двумерного проводника — графена [166, 167]. Особенностью электронного спектра графена является отсутствие энергетической щели между электронной и дырочной зонами и линейная зависимость энергии электронов от волнового вектора вблизи точек смыкания этих зон [168, 169] (точки смыкания называют дираковскими точками). Если разделить два графена тонкой диэлектрической прослойкой и приложить к системе перпендикулярное слоям электрическое поле, то уровень Ферми в одном слое сместится вверх, а во втором слое — вниз относительно дираков-

ской точки. Соответственно, в первом слое возникнет конечная концентрация электронов, а во втором — такая же концентрация дырок. Возникла идея, что в таких системах возможно электрон-дырочное спаривание. Эта идея была впервые высказана в работах [170–173].

Кристаллическая структура графена имеет форму пчелиных сот и содержит две подрешетки, обозначаемые как подрешетка А и подрешетка В. Дираковские точки, обозначаемые  $K$  и  $K'$ , расположены на краю зоны Бриллюэна. Для описания низкоэнергетических электронных явлений в графене используется дираковская модель, которая выводится из модели сильно связанных электронов на решетке при рассмотрении электронных состояний в малых окрестностях дираковских точек. Одночастичный электронный гамильтониан графена в низкоэнергетическом приближении записывается в виде [169]

$$H = \sum_{\mathbf{k}\alpha\sigma} \begin{pmatrix} c_{A\mathbf{k}\alpha\sigma}^+ & c_{B\mathbf{k}\alpha\sigma}^+ \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & \hbar v_F (\alpha k_x - i k_y) \\ \hbar v_F (\alpha k_x + i k_y) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{A\mathbf{k}\alpha\sigma} \\ c_{B\mathbf{k}\alpha\sigma} \end{pmatrix}, \quad (8.1)$$

где  $c_{A(B)\mathbf{k}\alpha\sigma}^+$  и  $c_{A(B)\mathbf{k}\alpha\sigma}$  — операторы рождения и уничтожения электронов на подрешетке  $A(B)$  графена, и  $\alpha = \pm 1$  — индекс долины (две долины формируются возле дираковских точек  $K$  и  $K'$ ),  $v_F$  — скорость Ферми (в монослойном графене скорость Ферми не зависит от концентрации носителей заряда) и волновой вектор  $\mathbf{k}$  отсчитан от соответствующей дираковской точки. Электронные состояния вырождены по спину  $\sigma = \uparrow, \downarrow$  и номеру долины  $\alpha$ , что соответствует наличию четырех дираковских компонент.

При анализе электрон-дырочного спаривания в графене обычно считают, что спаривание происходит независимо в каждой из дираковских компонент. Поэтому для нахождения критической температуры достаточно рассмотреть лишь одну компоненту. Ниже рассматривается компонента с  $\alpha = +1$ .

При переходе к операторам рождения (уничтожения) электронов в электронной и дырочной зонах  $c_{\mathbf{k}\lambda}^+$  ( $c_{\mathbf{k}\lambda}$ ) гамильтониан (8.1) принимает диагональный вид

$$H = \sum_{\mathbf{k}\lambda} \varepsilon_{\mathbf{k}\lambda} c_{\mathbf{k}\lambda}^+ c_{\mathbf{k}\lambda}, \quad (8.2)$$

где  $\varepsilon_{\mathbf{k}\lambda} = \lambda \hbar v_F k$  — энергия одноэлектронного состояния и  $\lambda = +1(-1)$  соответствует электронной (дырочной) зоне. Здесь и далее индексы долины и спина рассматриваемой компоненты опущены. Оператор уничтожения электрона с заданным  $\lambda$  выражается в виде линейной комбинации операторов  $c_{A(B)\mathbf{k}}$ ,

$$c_{\mathbf{k}\lambda} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( c_{A\mathbf{k}} + \lambda e^{-i\theta_{\mathbf{k}}} c_{B\mathbf{k}} \right), \quad (8.3)$$

где  $\theta_{\mathbf{k}}$  — угол между волновым вектором  $\mathbf{k}$  и осью  $x$ .

Двухслойную систему описывают гамильтонианом, представляющим собой сумму одночастичных гамильтонианов слоев и двухчастичного гамильтониана кулоновского взаимодействия внутри каждого слоя и между слоями. В приближении среднего поля вводятся аномальные средние  $\langle c_{1\lambda\mathbf{k}}^+ c_{2,-\lambda\mathbf{k}} \rangle$  ( $1, 2$  — индексы слоев), описывающие спаривание между электронами и дырками, и двухчастичный гамильтониан заменяется на одночастичный, причем учитываются только недиагональные по индексу слоя слагаемые. В этом же приближении диагональные по индексу слоя слагаемые приводят к перенормировке химических потенциалов. Предполагается, что химические потенциалы слоев удовлетворяют условию  $\mu_1 = -\mu_2 = \mu$  (индекс 1 соответствует электронному слою, индекс 2 — дырочному). В результате гамильтониан двухслойной системы принимает вид [170–172]

$$H_{MF} - \mu_i N_i = \sum_{\lambda\mathbf{k}} \left[ \xi_{\mathbf{k}\lambda} \left( c_{1\mathbf{k}\lambda}^+ c_{1\mathbf{k}\lambda} - c_{2\mathbf{k},-\lambda}^+ c_{2\mathbf{k},-\lambda} \right) - \left( \Delta_{\mathbf{k}\lambda} c_{1\mathbf{k}\lambda}^+ c_{2\mathbf{k},-\lambda} + \text{H.c.} \right) \right] \quad (8.4)$$

где  $\xi_{\mathbf{k}\lambda} = \varepsilon_{\mathbf{k}\lambda} - \mu$  и

$$\Delta_{\mathbf{k}\lambda} = \frac{1}{S} \sum_{\mathbf{q}\lambda'} V_{12}^{\text{sqf}}(q) \frac{1 + \lambda\lambda' \cos(\theta_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} - \theta_{\mathbf{k}})}{2} \langle c_{2,\mathbf{k}+\mathbf{q},-\lambda}^+ c_{1,\mathbf{k}+\mathbf{q},\lambda} \rangle. \quad (8.5)$$

Отметим, что закон дисперсии электронов в графене автоматически приводит к конгруэнтности поверхностей Ферми электронов и дырок, что способствует спариванию.

Подстановка в (8.5) явного выражения для аномального среднего приводит к уравнению самосогласования для параметра порядка

$$\Delta_{\mathbf{k},\lambda} = \frac{1}{S} \sum_{\mathbf{q}\lambda'} V_{12}^{\text{sqf}}(q) \frac{1 + \lambda\lambda' \cos(\theta_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} - \theta_{\mathbf{k}})}{2} \times \frac{\Delta_{\mathbf{k}+\mathbf{q},\lambda'}}{2E_{\mathbf{k}+\mathbf{q},\lambda'}} \text{tg} \frac{E_{\mathbf{k}+\mathbf{q},\lambda'}}{2T}, \quad (8.6)$$

где  $E_{\mathbf{k},\lambda} = \sqrt{\xi_{\mathbf{k}\lambda}^2 + \Delta_{\mathbf{k},\lambda}^2}$  — энергия квазичастичных возбуждений. В рассматриваемом подходе учитывается спаривание электронов из зоны проводимости с дырками валентной зоны и спаривание электронов из валентной зоны с дырками зоны проводимости (рис. 5).

Спариванию первого типа отвечает параметр порядка  $\Delta_{\mathbf{k},\lambda}$  с  $\lambda = +1$ , а спариванию второго типа — параметр порядка с  $\lambda = -1$ . Максимальное по модулю значение  $\Delta_{\mathbf{k},\lambda}$  достигается на поверхности Ферми.

Несколько другое уравнение самосогласования дает модель с контактным взаимодействием [173,174].

В приближении среднего поля эта модель описывается гамильтонианом

$$H - \mu_i N_i = \sum_{\mathbf{k}} \begin{pmatrix} c_{1A\mathbf{k}}^+ & c_{1B\mathbf{k}}^+ & c_{2A\mathbf{k}}^+ & c_{2B\mathbf{k}}^+ \end{pmatrix} \times \\ \times \begin{pmatrix} -\mu & \hbar v_F k_- & \Delta & 0 \\ \hbar v_F k_+ & -\mu & 0 & -\Delta \\ \Delta^* & 0 & \mu & \hbar v_F k_- \\ 0 & -\Delta^* & \hbar v_F k_+ & \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{1A\mathbf{k}} \\ c_{1B\mathbf{k}} \\ c_{2A\mathbf{k}} \\ c_{2B\mathbf{k}} \end{pmatrix}, \quad (8.7)$$

где  $k_{\pm} = k_x \pm i k_y$ ,  $\Delta = U \langle c_{2Ai}^+ c_{1Ai} \rangle = -U \langle c_{2Bi}^+ c_{1Bi} \rangle$ ,  $U$  — энергия контактного взаимодействия и  $i$  — индекс ячейки. Уравнение самосогласования имеет вид

$$\Delta = \frac{U \Omega_0}{S} \sum_{\mathbf{k}\lambda} \frac{\Delta}{2E_{\mathbf{k},\lambda}} \text{th} \frac{E_{\mathbf{k},\lambda}}{2T}, \quad (8.8)$$

где  $\Omega_0$  — площадь элементарной ячейки графена. В этой модели параметр порядка не зависит от волнового вектора и номера зоны  $\lambda$ .

При  $T = 0$  уравнение самосогласования (8.6) (как и уравнение самосогласования (8.8)) имеет нетривиальное решение  $\Delta \neq 0$  при любом сколь угодно малом притяжении (что означает неустойчивость нормальной фазы относительно перехода в спаренное состояние). Однако абсолютное значение  $\Delta$  при  $T = 0$  и критическая температура  $T_c$  (максимальная температура, при которой уравнение самосогласования имеет нетривиальное решение) очень чувствительны к выбору потенциала.

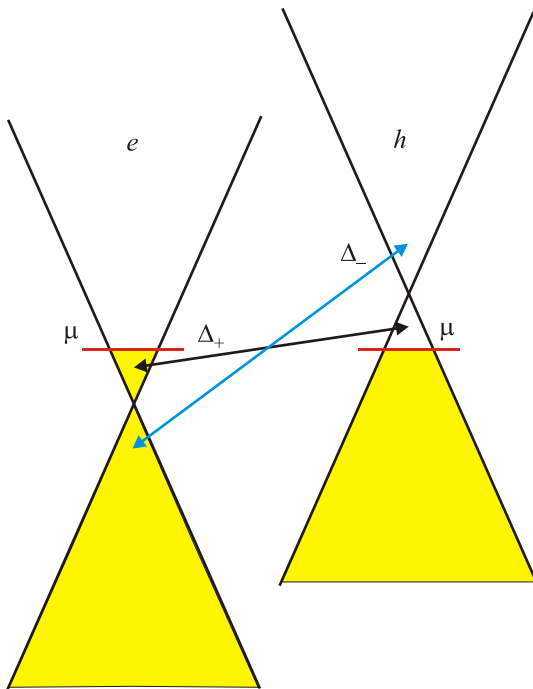


Рис. 5. Схематическое изображение двухзонного электрон-дырочного спаривания в двухслойной графеновой системе.

В [171,172] в качестве потенциала взаимодействия использовался неэкранированный кулоновский потенциал. В этом случае уравнение (8.6) дает  $\Delta \approx T_c \approx \mu$ . Как уже отмечалось в разд. 2, температура  $T_c$  отличается от температуры сверхтекучего перехода  $T_{BKT}$ . Для графеновой системы уравнение для  $T_{BKT}$  записывается через сверхтекучую жесткость и совпадает с (5.52). В [175] из выражения для сверхпроводящих токов, найденного по теории линейного отклика на векторный потенциал, получена сверхтекучая жесткость рассматриваемой системы при  $T = 0$ :  $\rho_{s0} = \mu / 8\pi$ . В [176] показано, что результат [175] справедлив при  $\Delta \ll \mu$ . В общем случае

$$\rho_{s0} = \frac{\mu}{8\pi} \left[ \sqrt{1 + \frac{\Delta^2}{\mu^2}} + \frac{\Delta^2}{2\mu^2} \ln \left( \frac{\sqrt{\mu^2 + \Delta^2} + \mu}{\sqrt{\mu^2 + \Delta^2} - \mu} \right) \right]. \quad (8.9)$$

Ответ (8.9) получен в пренебрежении зависимостью  $\Delta$  от волнового вектора и номера зоны. Согласно (8.9), при  $\Delta \approx \mu$  сверхтекучая жесткость примерно в два раза больше ее значения в пределе  $\Delta/\mu \rightarrow 0$ . Если  $T_c \approx \mu$  и, соответственно,  $\rho_s(0) \ll T_c$ , то температура сверхтекучего перехода с хорошей точностью дается соотношением  $T_{BKT} = \pi \rho_{s0} / 2$ . Отсюда следует, что  $T_{BKT} \approx 0,1\mu$ . При  $\mu = 0,3$  эВ температура  $T_{BKT}$  совпадает с комнатной температурой. Такая оценка для температуры перехода получена в [171].

Результат будет существенно иным, если в качестве потенциала взаимодействия взять экранированный потенциал для системы в нормальном состоянии, как это сделано в [177]. В приближении хаотических фаз экранированный потенциал определяется выражением

$$V_{12}^{\text{sqr}}(q) = \frac{2\pi e^2}{\epsilon q} \times \\ \times \frac{\exp(-qd)}{1 - \frac{4\pi e^2}{\epsilon q} \Pi(q) + \left( \frac{2\pi e^2}{\epsilon q} \right)^2 \Pi^2(q) [1 - \exp(-2qd)]}, \quad (8.10)$$

где  $\Pi(q)$  — статический поляризационный оператор для одного слоя (при  $\mu_1 = \pm \mu_2$  поляризационные операторы слоев 1 и 2 одинаковы). При  $T \ll \mu$  и  $q < 2k_F$  поляризационный оператор не зависит от  $q$ :  $\Pi(q) = -4v_F$ , где  $v_F = \mu / 2\pi \hbar^2 v_F^2$  — плотность состояний на поверхности Ферми в пересчете на одну компоненту и множитель 4 возникает из-за суммирования вкладов в экранирование всех дираковских компонент. Из этого следует, что экранированный потенциал удовлетворяет неравенству

$$V_{12}^{\text{sqr}}(q) < \frac{1}{8v_F}. \quad (8.11)$$

Заменяя параметр порядка  $\Delta_{\mathbf{k},\lambda}$  его значением на поверхности Ферми, уравнение (8.6) записывают в виде



$$\Delta = g v_F \int_0^{\mu} d\xi \frac{\Delta}{\sqrt{\xi^2 + \Delta^2}} \operatorname{th} \frac{\sqrt{\xi^2 + \Delta^2}}{2T}, \quad (8.12)$$

где константа связи дается интегралом

$$g = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} V_{12}^{\text{sqr}} \left( 2k_F \sin \frac{\theta}{2} \right) \cos^2 \frac{\theta}{2} \quad (8.13)$$

и энергия обрезания интеграла в (8.12) принята равной энергии Ферми. Из (8.12) следует известный из теории БКШ результат для критической температуры

$$T_c \approx \mu \exp \left( -\frac{1}{g v_F} \right), \quad (8.14)$$

Неравенство (8.11) приводит к ограничению на константу связи  $g < 1/16v_F$ , и температура (8.14) удовлетворяет неравенству

$$T_c < \mu e^{-16} \approx 10^{-7} \mu. \quad (8.15)$$

В этом случае критическая температура  $T_c$  и температура  $T_{BKT}$  практически совпадают. Таким образом, подход [177] дает температуру перехода на 6 порядков меньшую, чем полученная в [171].

В работах [178–180] рассматривался экранированный потенциал, вычисленный самосогласованным образом, т.е. с учетом влияния спаривания на экранирование. В этом приближении матрица поляризационного оператора содержит как диагональные, так и недиагональные по слоям компоненты

$$\mathbf{P}(\mathbf{q}, \omega) = \begin{pmatrix} \Pi_S(\mathbf{q}, \omega) & \Pi_D(\mathbf{q}, \omega) \\ \Pi_D(\mathbf{q}, \omega) & \Pi_S(\mathbf{q}, \omega) \end{pmatrix} \quad (8.16)$$

и фурье-компонента экранированного потенциала равна

$$V_{12}^{\text{sqr}}(q, \omega) = \frac{1}{2} \left( \frac{V_+(q)}{1 - V_+(q)\Pi_+(\mathbf{q}, \omega)} - \frac{V_-(q)}{1 - V_-(q)\Pi_-(\mathbf{q}, \omega)} \right). \quad (8.17)$$

Здесь  $V_{\pm}(q) = V_{11}(q) \pm V_{12}(q)$ ,  $V_{ik}(q)$  — неэкранированный кулоновский потенциал, и использовано обозначение  $\Pi_{\pm}(\mathbf{q}, \omega) = \Pi_S(\mathbf{q}, \omega) \pm \Pi_D(\mathbf{q}, \omega)$ . Выражение (8.17) описывает динамическое экранирование (с учетом запаздывания). В статическом пределе в качестве экранированного потенциала в (8.6) берется функция  $V_{12}^{\text{sqr}}(q, 0)$ . Расчет [179] показывает, что поляризационная функция  $\Pi_+(\mathbf{q}, 0)$  обращается в нуль при  $q = 0$ , а при  $q/k_F \lesssim \Delta/\varepsilon_F$  экранированный потенциал слабо отличается от неэкранированного, что свидетельствует об отсутствии экранирования кулоновского взаимодействия между зарядами на большом расстоянии [176]. Чем больше  $\Delta$ , тем сильнее подавляется экранирование, и тем больше константа связи  $g$ . Если параметр порядка  $\Delta$  мал по сравнению с энергией Ферми, то

оценка (8.15) остается применимой и при учете влияния спаривания на экранирование [178], но в общем случае это не так. Как показано в [180], при достаточно сильном затравочном взаимодействии уравнение самосогласования имеет три решения, причем минимуму энергии соответствует решение с  $\Delta \approx \mu$  (наибольший корень). Такое решение появляется, если безразмерный параметр взаимодействия  $r_s = e^2 k_F / \varepsilon \varepsilon_F$  (где  $\varepsilon$  — диэлектрическая проницаемость окружения) превышает некоторое критическое значение  $r_c$ . Значение  $r_c$  зависит от расстояния между слоями  $d$ , являясь возрастающей функцией другого безразмерного параметра  $\tilde{d} = dk_F$ .

Параметр  $r_s$  равен отношению характерной энергии кулоновского взаимодействия к характерной кинетической энергии. Особенностью систем с дираковским спектром является то, что  $r_s$  не зависит от плотности носителей. Для графеновой системы на диэлектрической подложке с проницаемостью  $\varepsilon$  этот параметр равен  $r_s = e^2 / \hbar v_F \varepsilon_{\text{eff}}$ , где  $\varepsilon_{\text{eff}} = (\varepsilon + 1)/2$ . Для сэндвича «графен–диэлектрик–графен» в вакуумном окружении параметр  $r_s$  принимается таким же, как и для монослоя графена в вакууме:  $r_s = e^2 / \hbar v_F \approx 2,2$ . В [180] получено критическое значение  $r_c \approx 2,35$  при  $\tilde{d} \rightarrow 0$ , что больше  $r_s$  в графене даже при  $\varepsilon = 1$ .

В [179] был учтен динамический характер экранирования. При этом собственно-энергетическая матрица вычислялась в первом порядке теории возмущений, и в качестве возмущающего взаимодействия брался экранированный потенциал  $V_{ij}^{\text{sqr}}(\mathbf{q}, \omega)$ . С учетом, того, что недиагональный элемент собственно-энергетической матрицы равен параметру порядка электрон-дырочного спаривания, уравнение самосогласования для температуры  $T = 0$  записывалось в виде

$$\Delta_{\lambda}(\mathbf{k}', i\omega') = \frac{1}{(2\pi)^2} \sum_{\lambda'} \int d\mathbf{k} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} V_{12}^{\text{sqr}}(\mathbf{k} - \mathbf{k}', i(\omega' - \omega)) \times \\ \times \frac{1 + \lambda\lambda' \cos(\varphi_{\mathbf{k}'} - \varphi_{\mathbf{k}})}{2} \frac{\Delta_{\lambda'}(\mathbf{k}, i\omega)}{\omega^2 + E_{\mathbf{k}+\mathbf{q}, \lambda'}^2}. \quad (8.18)$$

В [179] получено критическое значение  $r_c \approx 1,5$  (для  $\tilde{d} \rightarrow 0$ ). Это означает, что в системах типа «сэндвич», помещенных в вакуум, параметр порядка может достигать  $\Delta \approx \mu$ . Увеличение расстояния между слоями (при сохранении неизменной плотности носителей) приводит к усилению экранирования межслоевого взаимодействия. Вследствие этого решение уравнение самосогласования  $\Delta \approx \mu$  пропадает при  $\tilde{d} > \tilde{d}_c$ . Для системы типа сэндвич  $\tilde{d}_c \approx 0,1$ . Существование критического  $\tilde{d}$  означает, что при увеличении плотности носителей критическая температура сначала возрастает, а затем при достижении плотности выше критического значения  $n_c = \tilde{d}_c^2 / \pi d^2$  эта температура резко падает. Максимальная температура перехода, которая достигается



при  $n \approx n_c$ , обратно пропорциональна расстоянию между графеновыми слоями. Для  $d \approx 10$  нм оценка дает максимальную критическую температуру  $T_{BKT} \approx 10$  К.

Нужно отметить, что критическая плотность достаточно мала. Даже для предельно малых  $d \approx 1$  нм она составляет  $n_c \approx 3 \cdot 10^{11} \text{ см}^{-2}$ , а для  $d \approx 5$  нм она порядка  $10^{10} \text{ см}^{-2}$ . В двухслойных системах с квадратичным законом дисперсии носителей низкая плотность соответствует пределу локальных электрон-дырочных пар. Поэтому возникает вопрос о применимости приближения БКШ при рассмотрении графеновых систем. Анализ задачи о связанном состоянии электрона и дырки в монослойном графене показывает [181], что при  $r_s > 1$  решение двухчастичного уравнения Шредингера с потенциалом притяжения  $V \propto 1/r$  сингулярно в точке  $r = 0$  ( $r$  — расстояние между электроном и дыркой). Формально это трактуется как падение на центр, а физически соответствует образованию локальных пар с радиусом, сравнимым с постоянной решетки графена. Однако, если электрон и дырка находятся в разных слоях, то притягивающий потенциал остается конечным при  $r = 0$  и падение на центр не происходит [182]. При этом все решения уравнения Шредингера имеют при  $r \rightarrow \infty$  асимптотику, соответствующую инфинитному движению в кулоновском поле. Этот результат означает, что в двухслойной системе электрон и дырка, находящиеся в разных слоях, не образуют связанного состояния.

Так как двухслойные графеновые системы обычно изготавливают на подложках, монослойный графен следует признать не очень подходящим материалом для реализации электрон-дырочной сверхпроводимости. Действительно, принимая диэлектрическую проницаемость подложки  $\epsilon_s = 4$ , получаем  $r_s = 0,88$ , что меньше полученного в [179] критического значения. В работе [183], чтобы обойти ограничение на максимальное  $r_s$ , предложено заменить монослойный графен на двухслойный. В двухслойном графене энергия носителей является квадратичной функцией волнового вектора  $\epsilon_{k\lambda} = \lambda \hbar^2 k^2 / 2m_{\text{eff}}$ , где  $m_{\text{eff}}$  — эффективная масса. Эффективная масса выражается через амплитуду перескока электронов между ближайшими узлами соседних слоев двухслойного графена  $t_{\perp}$  и скорость Ферми в монослойном графене:  $m_{\text{eff}} = t_{\perp} / 2v_F^2$ . Для  $t_{\perp} = 0,4$  эВ это дает  $m_{\text{eff}} \approx 0,035m_0$ , где  $m_0$  — масса свободного электрона. В отличие от системы двух монослойных графенов, в системе двух двухслойных графенов параметр  $r_s$  зависит от плотности носителей  $n$ :

$$r_s = \frac{e^2 k_F}{\epsilon \epsilon_F} = \frac{e^2}{\epsilon} \frac{2m_{\text{eff}}}{\hbar^2 \sqrt{\pi n}}. \quad (8.19)$$

Согласно расчетам [183], параметр порядка  $\Delta$  достигает величины порядка энергии Ферми, если  $r_s > r_c \approx 4$  (при  $dk_F \rightarrow 0$ ). При соответствующем выборе  $n$  это

условие можно выполнить, в том числе, в системах на подложке и в объемной диэлектрической матрице. При этом необходимо учитывать ограничение снизу на плотность носителей, которое возникает из-за тригонального искажения квадратичного спектра при малых энергиях. Искажение проявляется в формировании трех близко расположенных дираковских конусов при малых  $k$ . При больших  $k$  эти конуса смыкаются в одну долину. В результате выражение (8.19) оказывается применимым для плотности носителей выше  $n_{\text{min}} \approx 10^{11} \text{ см}^{-2}$ . Подстановка  $n_{\text{min}}$  в (8.19) дает  $r_{s,\text{max}} \approx 24/\epsilon$ , т.е. для характерных значений диэлектрической проницаемости ( $\epsilon = 3-4$ ) параметр  $r_{s,\text{max}}$  примерно в два раза превышает критическое значение  $r_c = 4$ . При  $\Delta \gtrsim \mu$  температура сверхтекучего перехода равна  $T_{BKT} \approx \pi r_{s0}/2$ . Сверхтекучая жесткость в электрон-дырочной системе на основе двухслойного графена в два раза больше, чем в системе на основе монослойного графена [176] (при той же энергии Ферми). Как и в системе на основе монослойного графена, критическое значение  $r_c$  возрастает при увеличении  $dk_F$ . При росте плотности носителей параметр  $r_s$  уменьшается, а критическое значение  $r_c$  увеличивается. Критическая температура растет, пока не достигается равенство  $r_s = r_c$ , после чего критическая температура резко падает. Согласно приведенным в [183] оценкам, температура перехода в системе двух двухслойных графенов в объемной матрице гексагонального нитрида бора при  $d = 2$  нм может достигать 14 К.

В работе [184] рассмотрена возможность электрон-дырочного спаривания в тонких пластинах топологических изоляторов. Топологические изоляторы [185] имеют запрещенную зону в электронном спектре (эта зона достаточно узкая и по этому параметру их скорее нужно отнести к полупроводникам) и поверхностные электронные состояния, спектр которых полностью перекрывает запрещенную зону. В результате поверхность трехмерного топологического изолятора является двумерным проводником, а пластина из такого материала представляет собой систему двух проводящих слоев, разделенных диэлектрической прослойкой. Спектр поверхностных электронных состояний топологического изолятора подобен спектру графена. В отличие от графена, число дираковских конусов должно быть нечетным (суммарное число конусов на двух поверхностях, остается четным). Топологический изолятор  $\text{Bi}_2\text{Se}_3$  имеет достаточно широкую (0,3 эВ) запрещенную зону и принадлежит к одноконусному семейству. Поляризационный оператор, входящий в выражение для экранированного потенциала, пропорционален числу дираковских компонент. Поэтому экранирование электрон-дырочного взаимодействия в пластине топологического изолятора, относящегося к одноконусному семейству, будет слабее, чем в двухслойных графеновых системах (где число дираковских компонент равно четырем). Для пластины топологического изолятора

$\text{Bi}_2\text{Se}_3$  параметр  $r_s$  равен  $r_s = 3,5/\varepsilon$ , где  $\varepsilon$  — диэлектрическая проницаемость окружения. В работах [179,186], где экранирование учитывалось самосогласованным образом, было показано, что состояние с  $\Delta \sim \mu$  реализуется при  $r_s > r_c \approx 0,5$  (при  $dk_F \ll 1$ ). При увеличении  $dk_F$  величина  $r_c$  возрастает, достигая  $r_c = 3,5$  при  $dk_F = 0,4$ . Условие  $r_s > r_c$  можно выполнить для пленки на подложке, а также для пластины между двумя объемными диэлектриками. Для последнего случая, принимая  $\varepsilon = 3$ , находят [186], что условие  $r_s = r_c$  выполняется при  $dk_F = 0,1$ , что соответствует  $T_{BKT} \approx 5$  К для пластины толщиной  $d = 10$  нм.

В работах [110,113,187,188] рассматривалось электрон-дырочное спаривание в двухслойных графеновых системах, помещенных в перпендикулярное проводящим слоям квантующее магнитное поле. Так как волновая функция электрона на нулевом уровне Ландау в графене совпадает с таковой в системе с квадратичным законом дисперсии, спаривание электронов и дырок в этих системах имеет много общего. Преимуществом графена является то, что расстояние между уровнями Ландау пропорционально корню квадратному из магнитного поля (энергии уровней равны  $E_{\pm N} = \pm \hbar v_F \sqrt{2N}/\ell_B$ , где  $N$  — целое [169]). Для такого спектра требование малости характерной кулоновской энергии по сравнению с энергетической щелью между нулевым уровнем Ландау и остальными уровнями записывается в виде неравенства  $e^2/\sqrt{2\hbar\varepsilon v_F} \ll 1$ , которое при достаточно большой диэлектрической проницаемости окружения выполняется независимо от величины магнитного поля  $B$ . Приложение к графеновым системам квантующего магнитного поля делает возможным образование в них локальных электрон-дырочных пар (магнитоэкситов). Предел разреженного газа магнитоэкситонов рассматривался в работах [187,188]. Найдена температура сверхтекучего перехода в газе магнитоэкситонов как функция расстояния между слоями. Оценки, приведенные в [188], показывают, что для достижения температуры перехода  $T_{BKT} > 1$  К нужны достаточно малые расстояния  $d$  между слоями и большие магнитные поля (например, чтобы достичь критическую температуру  $T_{BKT} \approx 3$  К, нужно  $d \approx 3$  нм и магнитное поле  $B = 10$  Тл). В [110,113] плотность пар считалась произвольной. Хотя в недопированном графене нулевой уровень Ландау в случае спинового и долинного вырождения можно считать заполненным наполовину, спаривания электронов и дырок в системе двух недопированных графенов не возникает. Это связано с наличием в графене нескольких дираковских компонент. Согласно [110], энергетически выгодной будет фаза, где состояния, соответствующие данной дираковской компоненте, будут либо полностью заполненными в данном слое, либо полностью пустыми. При этом такое состояние становится энергетически невыгодным при приложении электрического поля, создающего

разбаланс факторов заполнения слоев. В системе с таким разбалансом спаривание электронов и дырок уже имеет место. Максимальная температура сверхпроводящего перехода достигается в поле, при котором факторы заполнения нулевого уровня Ландау в слоях 1 и 2 равны  $\nu_1 = \pm 1/2$ ,  $\nu_2 = \mp 1/2$  либо  $\nu_1 = \pm 3/2$ ,  $\nu_2 = \mp 3/2$ . При указанных факторах заполнения теория дает критическую температуру  $T_{BKT} \approx 3$  К для системы на подложке с  $\varepsilon = 4$  и  $d = 20$  нм в магнитном поле  $B = 1$  Тл [113].

В [189] показана возможность образования локальных электрон-дырочных пар в двухслойной графеновой системе в отсутствие магнитного поля. Для этого требуется за счет внешних факторов (например, гидрирования графеновых слоев) сделать подрешетки А и В неэквивалентными, чтобы одноузельные энергии электронов на подрешетках были разными. Это приводит к появлению щели  $\Delta_b$  в электронном спектре графена, и графен из полуметалла превращается в полупроводник. В [189] рассчитана эффективная масса пары и оценена температура перехода разреженного газа пар в сверхпроводящее состояние. Рассмотрение опирается на приближенное решение матричного уравнения Шредингера, которое описывает двухчастичную систему взаимодействующих электрона и дырки, в пределе, когда величина щели много больше кинетической энергии относительного движения носителей в паре и движения пары в целом. Найдено, что температура перехода падает при увеличении величины щели и при увеличении расстояния между графеновыми слоями. Для  $d \approx 1$  нм,  $\Delta_b \approx 1$  эВ и концентрации носителей  $n = 5 \cdot 10^{11} \text{ см}^{-2}$  авторы [189] получили оценку  $T_{BKT} \approx 1$  К.

В последнее время также активно обсуждается возможность реализации электрон-дырочного спаривания в двухслойных кристаллах на основе других двумерных кристаллов, в частности дихалькогенидов переходных металлов (ДХПМ) [190–192]. Подобно графену, кристаллическая структура двумерных кристаллов ДХПМ напоминает пчелиные соты. Атомы переходного металла формируют одну подрешетку, а атомы халькогена, связанные попарно, вторую подрешетку. При этом слой, образованный атомами металла, располагается посередине между двумя слоями атомов халькогенов. Минимумы зоны проводимости и максимумы валентной зоны в этих кристаллах расположены в  $K$  и  $K'$  точках зоны Бриллюэна и разделены щелью порядка 1 эВ. Спин-орбитальное взаимодействие приводит к спиновому расщеплению зоны проводимости и валентной зоны. В [190] рассматривалось электрон-дырочное спаривание в двухслойных ДХПМ структурах в пределе низкой плотности. Как и в системе, рассмотренной в разд. 3, в ДХПМ структурах могут образовываться несколько сортов локальных электрон-дырочных пар. Минимуму энергии соответствует либо двухкомпонентный газ пар, в котором компоненты

различаются индексом долины ( $K$  или  $K'$ ), либо однокомпонентный газ в случае, когда все электрон-дырочные пары формируются в одной долине. Двухкомпонентная фаза является стабильной при малом межслоевом расстоянии ( $d < 0,25a_0$ , где  $a_0$  — эффективный борковский радиус пары), а при больших  $d$  происходит пространственное расслоение на компоненты. Оценка температуры перехода для структуры  $\text{MoS}_2$ – $\text{hBN}$ – $\text{MoTe}_2$  с плотностью пар  $n \approx 10^{12} \text{ см}^{-2}$  (что соответствует  $na_0^2 \approx 0,01$ ) дает  $T_{\text{BKT}} \approx 10 \text{ К}$ . В [191] возможность электрон-дырочного спаривания рассматривалась в подходе БКШ с учетом экранирования кулоновского взаимодействия, а также с учетом перенормировки энергии возбуждений за счет внутрислойного кулоновского взаимодействия. Согласно [191], вклад собственно-энергетической поправки зависит от «голой» приведенной массы пары. Для приведенной массы  $m_0 \lesssim 0,05m_e$ , такой вклад оказывается малым. В этой ситуации сверхпроводящая щель  $\Delta$  будет такого же порядка, что и энергия Ферми, и можно достичь высокой температуры сверхтекучего перехода  $T_{\text{BKT}} \approx 0,1 \mu\text{эВ}$ . Так как в ДХПМ приведенная масса значительно больше, то, как следует из анализа [191], учет собственно энергетической поправки оказывается существенным и приводит к значительному уменьшению  $\Delta$  и критической температуры ( $\Delta \approx T_c \approx 10^{-4} \mu\text{эВ} - 10^{-2} \mu\text{эВ}$ ).

В заключение этого раздела отметим, что в настоящее время синтезированы двухслойные структуры на основе как монослойного, так и двухслойного графена с отдельными контактами в слоях и возможностью управлять концентрацией и знаком носителей заряда в каждом из слоев, и проведены экспериментальные исследования эффекта межслоевого увлечения в таких структурах. В системах на основе монослойного графена [193,194] наблюдались гигантские флуктуации фактора увлечения при изменении концентрации носителей, а также смена знака холловского увлечения при изменении магнитного поля. Эти аномалии, вероятнее всего, не связаны непосредственно со спариванием электронов и дырок. В [195] двухслойная система создавалась с помощью нанесения графена на поверхность GaAs гетероструктуры с квантовой ямой. В этой системе наблюдалось аномальное возрастание фактора увлечения при низкой температуре, что рассматривалось как доказательство спаривания. В работах [196,197] изучались транспортные свойства двухслойных структур на основе двухслойного графена. В этих работах был также обнаружен эффект аномально большого увлечения при низких температурах, однако эффект наблюдался как для разных знаков ( $e-h$  системы), так и для одинаковых знаков ( $e-e$  и  $h-h$  системы) носителей заряда в слоях. В [198,199] изучались транспортные свойства этих же структур в квантующем магнитном поле. В [198,199] наблюдалось экспоненциальное падение продольного сопротивления и

исчезновение холловского сопротивления при протекании противотоков, а также полное холловское увлечение, что, как и в случае GaAs гетероструктур, свидетельствует об электрон-дырочном спаривании.

## 9. Заключение

Время показало плодотворность идеи о возможности спаривания пространственно разделенных электронов и дырок и перехода образовавшихся пар в противотоковое сверхпроводящее состояние. Однако, хотя к настоящему времени выполнено большое число экспериментальных работ, посвященных этой проблеме, однозначное доказательство наблюдения перехода в сверхпроводящую фазу отсутствует. Это может быть связано с несколькими причинами, которые мы здесь резюмируем. Во-первых, температура перехода  $T_c$  может быть очень мала вследствие сильного экранирования потенциала взаимодействия между электронами и дырками. Вопрос о последовательном учете экранирования остается одним из важных вызовов теории. Во-вторых, отрицательным фактором для спаривания является неконгруэнтность поверхностей Ферми электронов и дырок. В системах с высокой плотностью носителей (предел БКШ) неконгруэнтность приводит к уменьшению  $T_c$  вплоть до обращения ее в нуль. В третьих, появлению сверхпроводящих свойств могут препятствовать примеси и неоднородности. В системах с большой плотностью пар (предел БКШ) примеси, за счет несимметричности рассеяния на них электронов и дырок, работают подобно магнитным примесям в обычных сверхпроводниках, и уже достаточно малая концентрация примесей приводит к разрушению сверхпроводящего состояния. В квантовых холловских системах неоднородности могут также порождать вихри, появление которых приводит к диссипации потока пар. Наконец, переходу в сверхпроводящее состояние могут препятствовать эффекты, связанные с туннелированием между электронным и дырочным слоями. Эффекты туннелирования снимают вырождение по фазе параметра порядка, препятствуя протеканию в системе однородных продольных токов. При этом вопрос об их влиянии на саму возможность перехода в сверхпроводящую фазу остается, по нашему мнению, недостаточно понятным. Перечисленные факторы становятся менее существенными в системах с низкой плотностью пар (предел бозе-эйнштейновского конденсата). Однако в этом случае при малом расстоянии между слоями  $d$  система становится неустойчивой относительно образования биэкситонов, а при большом межслоевом расстоянии возникает неустойчивость относительно образования неоднородной фазы типа волны зарядовой плотности, либо двухслойного вигнеровского кристалла, в результате чего электрон-дырочная сверхпрово-

димось может реализоваться лишь в достаточно узком диапазоне межслоевых расстояний.

Излагая существующие точки зрения, мы не всегда полностью с ними согласны. Представляется, что имеется еще достаточно широкое поле для теоретических изысканий. Что же касается экспериментальных исследований, то они интенсивно продолжаются. Подтверждением последнего является недавняя работа [200], в которой сообщается о наблюдении резкого возрастания туннельного кондактанса в системе двух двухслойных графенов с равными по модулю и противоположными по знаку плотностями зарядов в слоях, т.е. в условиях, благоприятных для электрон-дырочного спаривания.

Работа выполнена при грантовой поддержке Государственного фонда фундаментальных исследований Украины, конкурсный проект No 33683.

1. P. Kapitza, *Nature* **141**, 74 (1938).
2. J.F. Allen and A.D. Misiner, *Nature* **141**, 75 (1938).
3. A. Einstein, *Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin*, Erster Halbband, 3 (1925).
4. F. London, *Phys. Rev.* **54**, 947 (1938)
5. L. Tisza, *Nature* **141**, 913 (1938); L. Tisza, *J. Phys. Radium* **1**, 164 (1940); *J. Phys. Radium* **1**, 350 (1940)
6. Л.Д. Ландау, *ЖЭТФ* **11**, 592 (1941); L.D. Landau, *J. Phys. USSR* **11**, 91 (1947).
7. N.N. Bogoliubov, *J. Phys. USSR* **11**, 23 (1947).
8. L.N. Cooper, *Phys. Rev.* **104**, 1189 (1956)
9. J. Bardeen, L.N. Cooper, and J.R. Schrieffer, *Phys. Rev.* **106**, 162 (1957); *Phys. Rev.* **108**, 1175 (1957).
10. *Проблема высокотемпературной сверхпроводимости*, Под ред. В.Л. Гинзбурга и Д.А. Киржница, Наука, Москва (1977).
11. J.G. Bednorz and K.A. Müller, *Z. Phys. B* **64**, 189 (1986).
12. J. Frenkel, *Phys. Rev.* **37**, 17 (1931).
13. G.H. Wannier, *Phys. Rev.* **52**, 191 (1937).
14. А.Ф. Прихотько, *ЖЭТФ* **19**, 383 (1949).
15. D.S. McClure and O. Schnepf, *J. Chem. Phys.* **23**, 1575 (1955).
16. Е.Ф. Гросс, Н.А. Каррыев, *ДАН СССР* **84**, 471 (1952).
17. D.G. Thomas and J.J. Hopfield, *Phys. Rev. Lett.* **5**, 505 (1960); *Phys. Rev.* **124**, 657 (1961).
18. С.А. Москаленко, *ФТТ* **4**, 276 (1962).
19. J.M. Blatt, K.W. Böer, and W. Brandt, *Phys. Rev.* **126**, 1691 (1962).
20. Л.В. Келдыш, Ю.В. Копаев, *ФТТ* **6**, 2791 (1964).
21. W. Kohn and D. Sherrington, *Rev. Mod. Phys.* **42**, 1 (1970).
22. Л.В. Келдыш, *Когерентные состояния экситонов*. Сб.: *Проблемы теоретической физики*, Наука, Москва (1972).
23. Ю.Е. Лозовик, В.И. Юдсон, *Письма в ЖЭТФ* **22**, 556 (1975).
24. С.И. Шевченко, *ФНТ* **2**, 505 (1976) [*Sov. J. Low Temp. Phys.* **2**, 251 (1976)].
25. Ю.Е. Лозовик, В.И. Юдсон, *ЖЭТФ* **71**, 738 (1976).
26. J.P. Eisenstein and A.H. MacDonald, *Nature* **432**, 691 (2004).
27. J.P. Eisenstein, *Ann. Rev. Condensed Matter Phys.* **5**, 159 (2014).
28. Z.F. Ezawa, *Quantum Hall Effects. Field Theoretical Approach and Related Topics*, World Scientific, Singapore (2008).
29. Z.F. Ezawa and G. Tsitsishvili, *Rep. Prog. Phys.* **72**, 086502 (2009).
30. B.N. Narozhny and A. Levchenko, *Rev. Mod. Phys.* **88**, 025003 (2016).
31. H. Soller, *J. Appl. Math. Phys.* **3**, 1218 (2015).
32. D.W. Snoke, *Dipole Excitons in Coupled Quantum Wells: Toward an Equilibrium Exciton Condensate*, in *Quantum Gases: Finite Temperature and Non-Equilibrium Dynamics* (Vol. 1, Cold Atoms Series), N.P. Proukakis, S.A. Gardiner, M.J. Davis, and M.H. Szymanska (eds.), Imperial College Press, London (2013).
33. M. Combescot, R. Combescot, and F. Dubin, *Rep. Prog. Phys.* **80**, 066501 (2017).
34. М. Гинкхам, *Введение в сверхпроводимость*, Атомиздат, Москва (1980).
35. J. Zittartz, *Phys. Rev.* **162**, 752 (1967).
36. T. Ando, A.B. Fowler, and F. Stern, *Rev. Mod. Phys.* **54**, 437 (1982).
37. D. Neilson, A. Perali, and A.R. Hamilton, *Phys. Rev. B* **89**, 060502(R) (2014).
38. J.M. Kosterlitz and D.J. Thouless, *J. Phys. C: Solid State Phys.* **5**, L124 (1972).
39. J.M. Kosterlitz and D.J. Thouless, *J. Phys. C: Solid State Phys.* **6**, 1181 (1973).
40. В.Л. Березинский, *ЖЭТФ* **61**, 1174 (1971).
41. П. Де Жен, *Сверхпроводимость металлов и сплавов*, Мир, Москва (1968).
42. А.А. Абрикосов, Л.П. Горьков, *ЖЭТФ* **35**, 1558 (1958).
43. А.А. Абрикосов, Л.П. Горьков, *ЖЭТФ* **39**, 1781 (1960).
44. А. И. Безуглый, С. И. Шевченко, *ФНТ* **3**, 428 (1977) [*Sov. J. Low Temp. Phys.* **3**, 203 (1977)].
45. Yu.E. Lozovik and V.I. Yudson, *Solid State Commun.* **21**, 211 (1977).
46. P.W. Anderson, *J. Phys. Chem. Solids* **11**, 26 (1959).
47. А.А. Абрикосов, Л.П. Горьков, И.Е. Дзялошинский, *Методы квантовой теории поля в статистической физике*, Физматгиз, Москва (1962).
48. Ю.Е. Лозовик, В.Н. Нишанов, *ФТТ* **18**, 3267 (1976).
49. P. Carruthers and M.M. Nieto, *Rev. Mod. Phys.* **40**, 411 (1968).
50. С.И. Шевченко, А.С. Рукин, *Письма в ЖЭТФ* **90**, 46 (2009) [*JETP Lett.* **90**, 42 (2009)]
51. С.И. Шевченко, А.С. Рукин, *ФНТ* **36**, 186 (2010) [*Low Temp. Phys.* **36**, 146 (2010)].
52. С.И. Шевченко, А.С. Рукин, *ФНТ* **36**, 748 (2010) [*Low Temp. Phys.* **36**, (2010)].
53. С.И. Шевченко, А.С. Рукин, *ФНТ* **38**, 1147 (2012) [*Low Temp. Phys.* **38**, 905 (2012)].



54. Д.В. Филь, С.И. Шевченко, *ФНТ* **42**, 1013 (2016) [*Low Temp. Phys.* **42**, 794 (2016)].
55. J. Szymanski, L. Swierkowski, and D. Neilson, *Phys. Rev. B* **50**, 11002 (1994).
56. D.R. Nelson and J.M. Kosterlitz, *Phys. Rev. Lett.* **39**, 1201 (1977).
57. С.И. Шевченко, *ФНТ* **9**, 139 (1983) [*Sov. J. Low Temp. Phys.* **9**, 69 (1983)].
58. С.И. Шевченко, *ФНТ* **9**, 1013 (1983) [*Sov. J. Low Temp. Phys.* **9**, 523 (1983)].
59. M.A. Lampert, *Phys. Rev. Lett.* **1**, 450 (1958).
60. С.А. Москаленко, *Оптика и спектроскопия* **5**, 147 (1958).
61. O. Akimoto and E. Hanamura, *J. Phys. Soc. Jpn.* **33**, 1537 (1972).
62. W.F. Brinkman, T.M. Rice, and B. Bell, *Phys. Rev. B* **8**, 1570 (1973).
63. D.A. Kleinman, *Phys. Rev. B* **28**, 871 (1983).
64. J. Singh, D. Birkedal, V.G. Lyssenko, and J.M. Hvam, *Phys. Rev. B* **53**, 15909 (1996).
65. M.Y.J. Tan, N.D. Drummond, and R.J. Needs, *Phys. Rev. B* **71**, 033303 (2005).
66. R. Jastrow, *Phys. Rev.* **98**, 1479 (1955).
67. C. Schindler and R. Zimmermann, *Phys. Rev. B* **78**, 045313 (2008).
68. A.D. Meyertholen and M.M. Fogler, *Phys. Rev. B* **78**, 235307 (2008).
69. R.M. Lee, N.D. Drummond, and R.J. Needs, *Phys. Rev. B* **79**, 125308 (2009).
70. Ю.Л. Лозовик, О.Л. Берман, *Письма в ЖЭТФ* **64**, 526 (1996) [*JETP Lett.* **64**, 573 (1996)].
71. Ю.Л. Лозовик, О.Л. Берман, *ЖЭТФ* **111**, 1879 (1997) [*J. Exp. Theor. Phys.* **84**, 1027 (1997)].
72. M. Schick, *Phys. Rev. A* **3**, 1067 (1971).
73. A.F. Croxall, K. Das Gupta, C.A. Nicoll, M. Thangaraj, H.E. Beere, I. Farrer, D.A. Ritchie, and M. Pepper, *Phys. Rev. Lett.* **101**, 246801 (2008).
74. J.A. Seamons, C.P. Morath, J.L. Reno, and M.P. Lilly, *Phys. Rev. Lett.* **102**, 026804 (2009).
75. С.И. Шевченко, *Письма в ЖЭТФ* **28**, 112 (1978).
76. A.V. Balatsky, Y.N. Joglekar, and P.B. Littlewood, *Phys. Rev. Lett.* **93**, 266801 (2004).
77. S.I. Shevchenko, *Phys. Rev. B* **56**, 10355 (1997).
78. S.I. Shevchenko, *Phys. Rev. B* **57**, 14809 (1998).
79. E.B. Sonin, *Phys. Rev. Lett.* **102**, 106407 (2009).
80. С.И. Шевченко, В. А. Безуглый, *ФНТ* **25**, 496 (1999) [*Low Temp. Phys.* **25**, 366 (1999)].
81. J. Pearl, *Appl. Phys. Lett.* **5**, 65 (1964).
82. S.I. Shevchenko, *Phys. Rev. B* **67**, 214515 (2003).
83. С.И. Шевченко, *ФНТ* **39**, 411 (2013) [*Low Temp. Phys.* **39**, 319 (2013)].
84. L.V. Butov, *J. Phys.: Condens. Matter* **19**, 295202 (2007).
85. V.B. Timofeev, A.V. Gorbunov, and A.V. Larionov, *J. Phys.: Condens. Matter* **19**, 295209 (2007).
86. R. Rappaport, G. Chen, S. Simon, O. Mitrofanov, L. Pfeiffer, and P.M. Platzman, *Phys. Rev. B* **72**, 075428 (2005).
87. R. Rappaport and G. Chen, *J. Phys.: Condens. Matter* **19**, 295207 (2007).
88. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц, *Электродинамика сплошных сред*, Наука, Москва (1982).
89. Y. Kuramoto and C. Horie, *Solid State Commun.* **25**, 713 (1978).
90. H.A. Fertig, *Phys. Rev. B* **40**, 1087 (1989).
91. D. Yoshioka and A.H. MacDonald, *J. Phys. Soc. Jpn.* **59**, 4211 (1990).
92. A.H. MacDonald and E.H. Rezayi, *Phys. Rev. B* **42**, 3224 (1990).
93. K. Moon, H. Mori, K. Yang, S.M. Girvin, A.H. MacDonald, L. Zheng, D. Yoshioka, and S.C. Zhang, *Phys. Rev. B* **51**, 5138 (1995).
94. M. Kellogg, I. B. Spielman, J. P. Eisenstein, L.N. Pfeiffer, and K.W. West, *Phys. Rev. Lett.* **88**, 126804 (2002).
95. M. Kellogg, J.P. Eisenstein, L.N. Pfeiffer, and K.W. West, *Phys. Rev. Lett.* **93**, 036801 (2004).
96. E. Tutuc, M. Shayegan, and D.A. Huse, *Phys. Rev. Lett.* **93**, 036802 (2004).
97. R.D. Wiersma, J.G.S. Lok, S. Kraus, W. Dietsche, K. von Klitzing, D. Schuh, M. Bichler, H.-P. Tranitz, and W. Wegscheider, *Phys. Rev. Lett.* **93**, 266805 (2004).
98. D. Nandi, A.D.K. Finck, J.P. Eisenstein, L.N. Pfeiffer, and K.W. West, *Nature* **488**, 481 (2012).
99. R.B. Laughlin, *Phys. Rev. Lett.* **50**, 1395 (1983).
100. X.G. Wen and A. Zee, *Phys. Rev. Lett.* **69**, 1811 (1992).
101. B.I. Halperin, *Helvetica Physica Acta* **56**, 75 (1983).
102. S.H. Simon, *Solid State Commun.* **134**, 81 (2005).
103. Дж. Шриффер, *Теория сверхпроводимости*, Наука, Москва (1970).
104. L.Yu. Kravchenko and D.V. Fil, *J. Phys.: Condens. Matter* **20**, 325235 (2008).
105. Y.N. Joglekar and A.H. MacDonald, *Phys. Rev. B* **64**, 155315 (2001).
106. Y.N. Joglekar and A.H. MacDonald, *Phys. Rev. B* **65**, 235319 (2002).
107. M. Abolfath, A.H. MacDonald, and L. Radzihovsky, *Phys. Rev. B* **68**, 155318 (2003).
108. Е.М. Лифшиц, Л.П. Питаевский, *Статистическая физика*, Наука, Москва (1978), ч. 2.
109. Ю.Е. Лозовик, А.М. Рувинский, *ЖЭТФ* **112**, 1791 (1997) [*J. Exp. Theor. Phys.* **85**, 979 (1997)].
110. Д.В. Филь, Л.Ю. Кравченко, *ФНТ* **35**, 904 (2009) [*Low Temp. Phys.* **35**, 712 (2009)].
111. A.A. Pikalov and D.V. Fil, *J. Phys.: Condens. Matter* **23**, 265301 (2011).
112. А.И. Безуглый, С.И. Шевченко, *ФНТ* **37**, 736 (2011) [*Low Temp. Phys.* **37**, 583 (2011)].
113. A.A. Pikalov and D.V. Fil, *Nanoscale Research Lett.* **7**, 145 (2012).
114. A.I. Bezuglyj and S.I. Shevchenko, *Phys. Rev. B* **75**, 075322 (2007).
115. R.D. Wiersma, J.G.S. Lok, L. Tiemann, W. Dietsche, K. von Klitzing, D. Schuh, and W. Wegscheider, *Physica E (Amsterdam, Neth.)* **35**, 320 (2006).

116. A. Stern and B.I. Halperin, *Phys. Rev. Lett.* **88**, 106801 (2002).
117. D.J. Bergman and D. Stroud, in: *Solid State Physics*, Vol. 46, H. Ehrenreich and D. Turnbull (eds.), Academic Press, San Diego (1992).
118. А.М. Дыхне, *ЖЭТФ* **59**, 110 (1970).
119. А.М. Dykhne and I.M. Ruzin, *Phys. Rev. B* **50**, 2369 (1994).
120. D.A. Huse, *Phys. Rev. B* **72**, 064514 (2005).
121. H.A. Fertig and G. Murthy, *Phys. Rev. Lett.* **95**, 156802 (2005).
122. D.V. Fil and S.I. Shevchenko, *Phys. Lett. A* **374**, 3335 (2010).
123. Д.Я. Балагуров, *ЖЭТФ* **108**, 2202 (1995).
124. Р.Р. Гусейнов, Л.В. Келдыш, *ЖЭТФ* **63**, 2255 (1972).
125. И.О. Кулик, С.И. Шевченко, *ФНТ* **2**, 1405 (1976) [*Sov. J. Low Temp. Phys.* **2**, 687 (1976)].
126. С.И. Шевченко, *ФНТ* **3**, 605 (1977) [*Sov. J. Low Temp. Phys.* **3**, 293 (1977)].
127. Ю.Е. Лозовик, В.И. Юдсон, *Письма в ЖЭТФ* **25**, 18 (1977).
128. Э.Б. Сонин, *Письма в ЖЭТФ* **25**, 95 (1977).
129. Э.Б. Сонин, *ЖЭТФ* **76**, 670 (1978).
130. X.G. Wen and A. Zee, *Phys. Rev. B* **47**, 2265 (1993).
131. Z.F. Ezawa and A. Iwazaki, *Phys. Rev. Lett.* **70**, 3119 (1993).
132. I.B. Spielman, J.P. Eisenstein, L.N. Pfeiffer, and K.W. West, *Phys. Rev. Lett.* **84**, 5808 (2000).
133. I.B. Spielman, J.P. Eisenstein, L.N. Pfeiffer, and K.W. West, *Phys. Rev. Lett.* **87**, 036803 (2001).
134. I.B. Spielman, M. Kellogg, J.P. Eisenstein, L.N. Pfeiffer, and K.W. West, *Phys. Rev. B* **70**, 081303 (2004).
135. A.R. Champagne, J.P. Eisenstein, L.N. Pfeiffer, and K.W. West, *Phys. Rev. Lett.* **100**, 096801 (2008).
136. A.R. Champagne, A.D.K. Finck, J.P. Eisenstein, L.N. Pfeiffer, and K.W. West, *Phys. Rev. B* **78**, 205310 (2008).
137. S. Misra, N.C. Bishop, E. Tutuc, and M. Shayegan, *Phys. Rev. B* **77**, 161301(R) (2008).
138. A.D.K. Finck, A.R. Champagne, J.P. Eisenstein, L.N. Pfeiffer, and K.W. West, *Phys. Rev. B* **78**, 075302 (2008).
139. L. Tiemann, W. Dietsche, M. Hauser, and K. von Klitzing, *New J. Phys.* **10**, 045018 (2008).
140. L. Tiemann, Y. Yoon, W. Dietsche, W. Wegscheider, and K. von Klitzing, *Phys. Rev. B* **80**, 165120 (2009).
141. Y. Yoon, L. Tiemann, S. Schmult, W. Dietsche, K. von Klitzing, and W. Wegscheider, *Phys. Rev. Lett.* **104**, 116802 (2010).
142. X. Huang, W. Dietsche, M. Hauser, and K. von Klitzing, *Phys. Rev. Lett.* **109**, 156802 (2012).
143. D. Nandi, T. Khaire, A.D.K. Finck, J.P. Eisenstein, L.N. Pfeiffer, and K.W. West, *Phys. Rev. B* **88**, 165308 (2013).
144. D. Zhang, X. Huang, W. Dietsche, M. Hauser, and K. von Klitzing, *Phys. Rev. B* **90**, 085436 (2014).
145. D. Zhang, W. Dietsche, and K. von Klitzing, *Phys. Rev. Lett.* **116**, 186801 (2016).
146. Y.N. Joglekar and A.H. MacDonald, *Phys. Rev. Lett.* **87**, 196802 (2001).
147. A.I. Bezuglyj and S.I. Shevchenko, *Fiz. Nizk. Temp.* **30**, 282 (2004) [*Low Temp. Phys.* **30**, 208 (2004)].
148. E. Rossi, A.S. Nunez, and A.H. MacDonald, *Phys. Rev. Lett.* **95**, 266804 (2005).
149. D.V. Fil and S.I. Shevchenko, *Fiz. Nizk. Temp.* **33**, 1023 (2007). [*Low Temp. Phys.* **33**, 780 (2007)].
150. J.J. Su and A.H. MacDonald, *Nat. Phys.* **4**, 799 (2008).
151. D.V. Fil and S.I. Shevchenko, *J. Phys.: Condens. Matter* **21**, 215701 (2009).
152. J.J. Su and A.H. MacDonald, *Phys. Rev. B* **81**, 184523 (2010).
153. L. Balents and L. Radzihovsky, *Phys. Rev. Lett.* **86**, 1825 (2001).
154. M.M. Fogler and F. Wilczek, *Phys. Rev. Lett.* **86**, 1833 (2001).
155. A. Stern, S.M. Girvin, A.H. MacDonald, and N. Ma, *Phys. Rev. Lett.* **86**, 1829 (2001).
156. P.R. Eastham, N.R. Cooper, and D.K.K. Lee, *Phys. Rev. Lett.* **105**, 236805 (2010).
157. T. Hyart and B. Rosenow, *Phys. Rev. B* **83**, 155315 (2011).
158. А.И. Безуглый, С.И. Шевченко, *ФНТ* **4**, 454 (1978) [*Sov. J. Low Temp. Phys.* **4**, 222 (1978)].
159. H. Soller, F. Dolcini, and A. Komnik, *Phys. Rev. Lett.* **108**, 156401 (2012).
160. D.V. Fil, *Phys. Rev. B* **82**, 193303 (2010).
161. S.I. Shevchenko, *Phys. Rev. Lett.* **72**, 3242 (1994).
162. N. Read, *Phys. Rev. B* **52**, 1926 (1995).
163. C.B. Hanna, A.H. MacDonald, and S.M. Girvin, *Phys. Rev. B* **63**, 125305 (2001).
164. Y. Imry and S. Ma, *Phys. Rev. Lett.* **35**, 1399 (1975).
165. H. Fukuyama and P.A. Lee, *Phys. Rev. B* **17**, 535 (1978).
166. K.S. Novoselov, A.K. Geim, S.V. Morozov, D. Jiang, Y. Zhang, S.V. Dubonos, I.V. Grigorieva, and A.A. Firsov, *Science* **306**, 666 (2004).
167. K.S. Novoselov, A.K. Geim, S.V. Morozov, D. Jiang, M.I. Katsnelson, I.V. Grigorieva, S.V. Dubonos, and A.A. Firsov, *Nature* **438**, 197 (2005).
168. P.R. Wallace, *Phys. Rev.* **71**, 622 (1947).
169. A.H. Castro Neto, F. Guinea, N.M.R. Peres, K.S. Novoselov, and A.K. Geim, *Rev. Mod. Phys.* **81**, 109 (2009).
170. Yu.E. Lozovik and A.A. Sokolik, *Письма в ЖЭТФ* **87**, 61 (2008) [*JETP Lett.* **87**, 55 (2008)].
171. H. Min, R. Bistritzer, J.-J. Su, and A.H. MacDonald, *Phys. Rev. B* **78**, 121401(R) (2008).
172. C.H. Zhang and Y.N. Joglekar, *Phys. Rev. B* **77**, 233405 (2008).
173. B. Seradjeh, H. Weber, and M. Franz, *Phys. Rev. Lett.* **101**, 246404 (2008).
174. M.P. Mink, H.T. C. Stoof, R.A. Duine, and A.H. MacDonald, *Phys. Rev. B* **84**, 155409 (2011).
175. D.K. Efimkin, V.A. Kulbachinskii, and Yu.E. Lozovik, *Письма в ЖЭТФ* **93**, 238 (2011) [*JETP Lett.* **93**, 219 (2011)].
176. K.V. Germash and D.V. Fil, *Phys. Rev. B* **91**, 115442 (2015).
177. M.Y. Kharitonov and K.B. Efetov, *Phys. Rev. B* **78**, 241401 (2008).

178. M.Y. Kharitonov and K.B. Efetov, *Semicond. Sci. Technol.* **25**, 034004 (2010).
179. I. Sodemann, D.A. Pesin, and A.H. MacDonald, *Phys. Rev. B* **85**, 195136 (2012).
180. Yu.E. Lozovik, S.L. Ogarkov, and A.A. Sokolik, *Phys. Rev. B* **86**, 045429 (2012).
181. J. Sabio, F. Sols, and F. Guinea, *Phys. Rev. B* **81**, 045428 (2010).
182. А.А. Соколик, дис. на соиск. уч. ст. к.ф.-м.н., инст-т спектроскопии, Троицк (2010).
183. A. Perali, D. Neilson, and A.R. Hamilton, *Phys. Rev. Lett.* **110**, 146803 (2013).
184. B. Seradjeh, J.E. Moore, and M. Franz, *Phys. Rev. Lett.* **103**, 066402 (2009).
185. M.Z. Hasan and C.L. Kane, *Rev. Mod. Phys.* **82**, 3045 (2010).
186. D.K. Efimkin, Yu.E. Lozovik, and A.A. Sokolik, *Phys. Rev. B* **86**, 115436 (2012).
187. O.L. Berman, Yu.E. Lozovik, and G. Gumbs, *Phys. Rev. B* **77**, 155433 (2008).
188. А.И. Безульий, *ФНТ* **36**, 299 (2010). [*Low Temp. Phys.* **36**, 236 (2010)].
189. O.L. Berman, R.Ya. Kezerashvili, and K. Ziegler, *Phys. Rev. B* **85**, 035418 (2012).
190. F.C. Wu, F. Xue, and A.H. MacDonald, *Phys. Rev. B* **92**, 165121 (2015).
191. B. Debnath, Y. Barlas, D. Wickramaratne, M.R. Neupane, and R.K. Lake, *Phys. Rev. B* **96**, 174504 (2017).
192. O.L. Berman and R.Ya. Kezerashvili, *Phys. Rev. B* **96**, 094502 (2017).
193. S. Kim, I. Jo, J. Nah, Z. Yao, S.K. Banerjee, and E. Tutuc, *Phys. Rev. B* **83**, 161401 (2011).
194. R.V. Gorbachev, A.K. Geim, M.I. Katsnelson, K.S. Novoselov, T. Tudorovskiy, I.V. Grigorieva, A.H. MacDonald, S.V. Morozov, K. Watanabe, T. Taniguchi, and L.A. Ponomarenko, *Nat. Phys.* **8**, 896 (2012).
195. A. Gamucci, D. Spirito, M. Carrega, B. Karmakar, A. Lombardo, M. Bruna, L.N. Pfeiffer, K. W. West, A.C. Ferrari, M. Polini, V. Pellegrini, *Nat. Commun.* **5**, 5824 (2014).
196. J.I.A. Li, T. Taniguchi, K. Watanabe, J. Hone, A. Levchenko, and C.R. Dean, *Phys. Rev. Lett.* **117**, 046802 (2016).
197. K. Lee, J. Xue, D.C. Dillen, K. Watanabe, T. Taniguchi, and E. Tutuc, *Phys. Rev. Lett.* **117**, 046803 (2016).
198. J.I.A. Li, T. Taniguchi, K. Watanabe, J. Hone, and C.R. Dean, *Nature Phys.* **13**, 751 (2017).
199. X. Liu, K. Watanabe, T. Taniguchi, B.I. Halperin, and P. Kim, *Nature Phys.* **13**, 746 (2017).
200. G.W. Burg, N. Prasad, K. Kim, T. Taniguchi, K. Watanabe, A.H. MacDonald, L.F. Register, and E. Tutuc, *Phys. Rev. Lett.* **120**, 177702 (2018).

## Электрон-диркова надпровідність (Огляд)

Д.В. Філь, С.І. Шевченко

Цей огляд присвячений теорії електрон-діркової надплинності в двошарових системах. Йдеться про стан, в якому електрони та дірки з сусідніх шарів утворюють зв'язані пари і бездисипативне перенесення заряду обумовлено рухом пар як цілого. Наявність потоку зв'язаних пар еквівалентно протіканню в шарах, що проводять, рівних за модулем і протилежно спрямованих електричних струмів. Тому таку надплинність можна розглядати як своєрідну надпровідність, яку часто називають протиструмовою (counterflow) надпровідністю. Це явище було передбачено близько 40 років тому, але вивчення проблеми електрон-діркової надпровідності в двошарових системах інтенсивно продовжується досі. У огляді представлений розгорнутий опис теоретичних уявлень і підходів до проблеми електрон-діркової надпровідності.

Ключевые слова: електрон-діркове спаровування, ексітонна надплинність, двошарові системи.

## Electron-hole superconductivity (Review Article)

D.V. Fil and S.I. Shevchenko

This review is devoted to the theory of electron-hole superfluidity in double-layer systems. The question is about the state in that electrons and holes from adjacent layers form bound pairs and nondissipative transfer of charge is provided by motion of pairs as wholes. The occurrence of flow of bound pairs is equivalent to the flowing equal in module and the oppositely directed electric currents in conducting layers. Therefore such superfluidity can be considered as a special type of superconductivity that is often called counterflow superconductivity. This phenomenon was predicted about 40 years ago, but the study of the problem of electron-hole superconductivity in the double-layer systems is in progress until now. In the review the extensive description of theoretical grounds and approaches to the problem of electron-hole superconductivity is presented.

Keywords: electron-hole pairing, exciton superfluidity, bilayer systems.