

УДК 621.873

Ловейкін В.С., д.т.н., Ромасевич Ю.О., к.т.н.

ОПТИМІЗАЦІЯ РУХУ ВАНТАЖОПІДЙОМНОГО КРАНА ІЗ ТРАВЕРСНОЮ ПІДВІСКОЮ ВАНТАЖУ МЕТОДОМ ДИНАМІЧНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

Постановка проблеми. У багатьох вантажопідйомних кранах до гнучкої підвіски закріплена траверса, а безпосередньо до траверси – вантажозахватний орган з вантажем. Оскільки маса траверси може бути у деяких випадках порівняна з масою вантажу, то вона впливає на динаміку руху крана. Оптимізація режимів руху вантажопідйомного крана без врахування маси траверси може мати негативний результат у плані досягнення мети керування, наприклад, усунення коливань вантажу, переміщення крана із вантажем на задану відстань тощо.

Важливою задачею для вантажопідйомних кранів є встановлення керування, при якому усуваються зовнішні впливи, викликані, наприклад, вітровими поривами. Таке керування прийнято називати керуванням у вигляді зворотного зв'язку. Використовуючи оптимальне керування краном у вигляді зворотного зв'язку на практиці ефективність експлуатації крана може значно покращитись. Це викликано рядом причин: зменшенням втомлюваності оператора крана (в ідеалі кранівник лише задає мету керування та слідкує за виконанням процесу), збільшенням точності позиціонування вантажу, зменшенням енергетичних витрат на виконання переміщення тощо.

Аналіз останніх досліджень та публікацій. Більшість дослідників динаміки руху вантажопідйомних кранів користуються двомасовою динамічною моделлю [1-5]. Така модель є нескладною і дозволяє достатньо точно оцінити рух реальної конструкції крана із вантажем на гнучкому підвісі. Однак, якщо конструкція крана обладнана траверсною підвіскою вантажу, то неврахування маси траверси може викликати розбіжність теоретичних та практичних результатів. Тому для проведення досліджень крана із траверсною підвіскою вантажу необхідно прийняти тримасову динамічну модель [6]. Така модель дає змогу адекватно відтворити динаміку руху крана із вантажем. У роботі [6], також проведена оптимізація перехідних режимів руху крана із траверсною підвіскою за допомогою прямого варіаційного методу. Даний метод дозволяє встановити оптимальне програмне керування рухом крана.

Постановка мети та задач дослідження.

Метою приведеного дослідження є синтез оптимального керування вантажопідйомним краном із траверсною підвіскою вантажу методом динамічного програмування. Для досягнення поставленої мети необхідно вирішити такі завдання: 1) побудувати математичну

модель руху крана із траверсною підвіскою вантажу у вигляді системи канонічних диференціальних рівнянь; 2) синтезувати оптимальне керування краном у вигляді зворотного зв'язку для відкритої області керувань; 3) знайти оптимальне керування краном для області керувань обмеженої наперед встановленими границями; 4) проаналізувати отримані результати та вказати шляхи подальших досліджень.

Виклад основного матеріалу.

Для опису руху крана з траверсною підвіскою вантажу використаємо тримасову динамічну розрахункову модель (рис. 1.) [6], у якій приймаються зосередженими маси візка m_1 , траверси m_2 та вантажу m_3 .

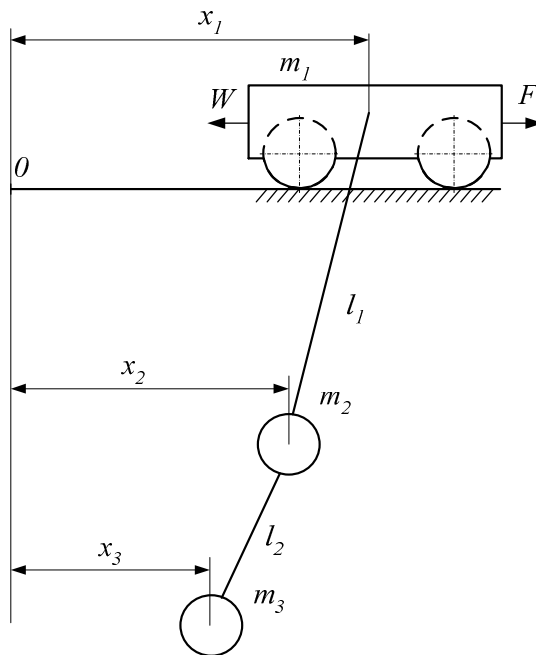


Рис. 1. Розрахункова динамічна модель руху крана із траверсною підвіскою вантажу

Опис руху представленої схеми за допомогою методу Даламбера [7] записується диференціальними рівняннями руху мас:

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 + m_2 \frac{g}{l_1} (x_1 - x_2) = F - W \text{sign}(\dot{x}_1); \\ m_2 \ddot{x}_2 - m_2 \frac{g}{l_1} (x_1 - x_2) + m_3 \frac{g}{l_2} (x_2 - x_3) = 0; \\ \ddot{x}_3 - \frac{g}{l_2} (x_2 - x_3) = 0, \end{cases} \quad (1)$$

де m_1 – маса вантажного візка; m_2 – маса траверси; m_3 – маса вантажу; x_1, x_2, x_3 – координати центрів мас відповідно візка траверси і

вантажу під час руху; g – прискорення вільного падіння; l_1 – довжина гнучкого підвісу, яка з'єднує візок та траверсу; l_2 – довжина гнучкого підвісу, яка з'єднує траверсу та вантаж; F – приводне (тягове або гальмівне) зусилля, що діє на візок; W – сила опору переміщенню, що діє на візок.

Загалом схема, зображена на рис. 1, представляє собою рухомий подвійний математичний маятник.

Будемо вважати, що при переміщенні крана протягом гальмування він не змінює свою швидкість, тобто $\text{sign} \dot{x}_1 = 1$. Систему рівнянь (1) подамо у вигляді одного диференціального рівняння шостого порядку:

$$x_3^{VI} + A x_3^{IV} + B \ddot{x}_3 = \frac{F - W}{m_1} \Omega_{01}^2 \Omega_{02}^2, \quad (2)$$

де A і B - коефіцієнти, які визначаються наступними виразами:

$$A = \Omega_{01}^2 \left(1 + \frac{m_2}{m_1} \right) + \Omega_{02}^2 \left(1 + \frac{m_3}{m_2} \right), \quad B = \Omega_{01}^2 \Omega_{02}^2 \left(1 + \frac{m_2}{m_1} + \frac{m_3}{m_2} \right); \quad \Omega_{01} \quad \text{і} \quad \Omega_{02} -$$

власні частоти коливань математичних маятників із вантажами m_2 і m_3 відповідно, закріпленими на гнучкому підвісі довжиною l_1 та l_2 , відносно нерухомої точки підвісу ($\Omega_{01} = \sqrt{\frac{g}{l_1}}$, $\Omega_{02} = \sqrt{\frac{g}{l_2}}$). Ввівши

позначення $u = \frac{F - W}{m_1} \Omega_{01}^2 \Omega_{02}^2$ та $y_0 = x_3$ запишемо диференціальне рівняння (2) у канонічному вигляді:

$$\begin{cases} \dot{y}_0 = y_1; \\ \dot{y}_1 = y_2; \\ \dot{y}_2 = y_3; \\ \dot{y}_3 = y_4; \\ \dot{y}_4 = y_5; \\ \dot{y}_5 = u - Ay_4 - By_2. \end{cases} \quad (3)$$

Рух крана із траверсною підвіскою вантажу характеризується початковими умовами, які можна записати у вигляді вектора початкових умов $\mathbf{y}(0) = \{y_0(0), y_1(0), y_2(0), y_3(0), y_4(0), y_5(0)\}$.

Для усунення коливань вантажу у момент загальмовування крана необхідно, щоб виконувались такі кінцеві умови $\mathbf{y}(T) = \{y_0(T), y_1(T), y_2(T), y_3(T), y_4(T), y_5(T)\} = 0$.

Для синтезу керування необхідно задати критерій оптимальності, який визначить одне оптимальне керування із усієї множини можливих. Критерієм оптимальності руху крана протягом його гальмування прийємо інтегральний функціонал:

$$I = \int_0^T \left(\sum_{i=0}^{n=5} \delta_i y_i^2 + \delta_6 u^2 \right) dt \rightarrow \min, \quad (4)$$

де $\delta_0, \delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4, \delta_5$ - деякі коефіцієнти. Ці коефіцієнти можна розрахувати за наступною формулою:

$$\delta_j = k_j \tilde{I}_j, \quad j = 0, 1, 2, 3, 4, 5, \quad (5)$$

де k_j - ваговий коефіцієнт, який враховує важливість відповідного j -го показника у структурі критерію; \tilde{I}_j - деякий коефіцієнт, який приводить розмірність j -го показника у структурі критерію (4) до безрозмірного вигляду. Критерій (4) є комплексним лінійно-квадратичним інтегральним критерієм і відображає як фазові координати динамічної системи, так і „витрати” на керування нею.

Керування, яке необхідно знайти, не може бути яким завгодно за величиною. Тому необхідно встановити межі допустимої області, в якій шукається оптимальне керування. Границі такої області визначаються величиною максимальної величини керування, яка у свою чергу визначається перевантажувальною здатністю приводу крана. Перевантажувальну здатність приводу крана необхідно розуміти у „широкому” сенсі – це обмеження по величині електромагнітного моменту двигуна, по величині струму та тривалості його протікання в обмотках двигуна. Крім того, оптимальне керування реалізується за допомогою керованого приводу, тому необхідно також враховувати обмеження накладені на перетворювальні пристрої (частотний перетворювач, пристрій плавного пуску тощо), які живлять двигун. У загальному вигляді обмеження на керування можуть бути записані таким чином:

$$u \in U = \bigcap_k P_q(t, y_i, a_e), \quad q = 1, \dots, Q; \quad i = 0, \dots, I; \quad e = 1, \dots, E, \quad (6)$$

де P_q - деяка q -та множина, яка є складною функцією своїх аргументів; Q - кількість множин, які формують множину U , до якої належить керування u ; I - кількість фазових координат динамічної системи; E - кількість параметрів динамічної системи, які є

аргументами q -тої множини P_q . Для даної задачі оптимального керування краном вираз (6) можна подати у такому вигляді:

$$u \in U = u_{M_{\max}} \cap u_{I_{\max} \cdot t_{\max}}, \quad (7)$$

де $u_{M_{\max}}$ - максимально допустиме керування, яке виплаває із умови неперевикнення максимального моменту двигуна асинхронного електродвигуна приводу крана M_{\max} ; $u_{I_{\max} \cdot t_{\max}}$ - максимально допустиме керування, яке виплаває із умови неперевикнення максимально допустимого струму, який протікає в обмотках двигуна і по джерелу живлення двигуна I_{\max} та максимально допустимій тривалості t_{\max} протікання струму $I_{\max} \cdot u_{M_{\max}}$ та $u_{I_{\max} \cdot t_{\max}}$ є складними функціями:

$$u_{I_{\max} \cdot t_{\max}} = f(y_5, \omega_0, U_{\text{живл}}, R_1, R_2', X_1, X_2', r_{\text{кол}}, m_1, u_{\text{пер}}), \quad (8)$$

$$u_{M_{\max}} = f(y_5, \omega_0, U_{\text{живл}}, R_1, R_2', X_1, X_2', r_{\text{кол}}, m_1, u_{\text{пер}}), \quad (9)$$

де ω_0 - швидкість ідеального холостого ходу двигуна приводу крана; $U_{\text{живл}}$ - напруга живлення двигуна; R_1, R_2' - активний опір статора та приведений активний опір ротора відповідно; X_1, X_2' - реактивний опір статора та приведений реактивний опір ротора відповідно; $r_{\text{кол}}$ - радіус колеса крана; $u_{\text{пер}}$ - передаточне число приводу крана. Зазначимо, що обмеження (7) є складними для аналітичного розв'язання задачі, тому спростимо їх. Будемо вважати, що обмеження (7) не залежать від фазових координат динамічної системи, напруга і частота напруги живлення двигуна, а також параметри самого двигуна R_1, R_2' і X_1, X_2' незмінні в часі. Тоді вираз (7) можна замінити таким:

$$|u| \leq u_{\max}. \quad (10)$$

Таким чином, здійснена постановка задачі оптимального керування динамічною системою „кран із траверсною підвіскою - вантаж”. Ця задача полягає у тому, щоб перевести динамічну систему із початкового положення, яке характеризується початковими умовами у кінцеве, яке характеризується кінцевими умовами. При цьому критерій оптимальності (4) повинен бути якнайменшим. Крім того, накладаються обмеження на керування у вигляді нерівності (10), а момент закінчення керування T є нефіксованим.

Для розв'язування задачі оптимального керування використаємо метод динамічного програмування [8]. Даний метод синтезу оптимального керування дає змогу знати керування у вигляді функції фазових координат динамічної системи. Це керування у вигляді зворотного зв'язку. Основне функціональне рівняння для даної задачі записується таким чином:

$$\min \left(\sum_{i=0}^{n-5} \delta_i y_i^2 + \delta_6 u^2 + \frac{\partial S}{\partial y_0} y_1 + \frac{\partial S}{\partial y_1} y_2 + \frac{\partial S}{\partial y_2} y_3 + \frac{\partial S}{\partial y_3} y_4 + \frac{\partial S}{\partial y_4} y_5 + \frac{\partial S}{\partial y_5} (u - Ay_4 - By_2) \right) = 0, \quad (11)$$

де S - функція Беллмана. Задачу будемо розв'язувати для випадку коли на керування u не накладено обмежень (10). Це дасть змогу знайти аналітичний розв'язок задачі. Однак у подальшому ми врахуємо нерівність (10). Мінімум лівої частини рівняння (11) будемо шукати по функції u , для чого продиференціюємо її за u та прирівняємо отримане до нуля:

$$2\delta_6 u + \frac{\partial S}{\partial y_5} = 0. \quad (12)$$

Знайдемо з рівняння (12) функцію u :

$$u = -\frac{1}{2\delta_6} \frac{\partial S}{\partial y_5}. \quad (13)$$

Пересвідчимося у тому, що функція (13) доставляє виразу (11) мінімум, для чого продиференціюємо вираз (12) ще раз за u :

$$\frac{\partial}{\partial u} \left(2\delta_6 u + \frac{\partial S}{\partial y_5} \right) = 2\delta_6 > 0. \quad (14)$$

Таким чином, вираз (13) буде доставляти лівій частині виразу (11) мінімум. У виразі (14) використано строгу нерівність, оскільки при $\delta_6 = 0$ рівняння (12) перетворюється у тривіальне і оптимальне керування неможливо знайти. Підставимо вираз (13) у рівняння (11), в результаті чого будемо мати:

$$\begin{aligned} & y_2 \left(\frac{\partial S}{\partial y_1} y_2 - B \frac{\partial S}{\partial y_5} \right) + y_0^2 \delta_0 + y_1 \left(\frac{\partial S}{\partial y_0} + y_1 \delta_1 \right) + y_2^2 \delta_2 + y_3 \left(\frac{\partial S}{\partial y_2} + y_3 \delta_3 \right) + \\ & + y_4 \left(\frac{\partial S}{\partial y_3} - A \frac{\partial S}{\partial y_5} + y_4 \delta_4 \right) + y_5 \left(\frac{\partial S}{\partial y_4} + y_5 \delta_5 \right) - \left(\frac{\partial S}{\partial y_5} \right)^2 \frac{1}{4\delta_6} = 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Рівняння (15) є нелінійним диференціальним рівнянням у частинних похідних. Будемо шукати його розв'язок у вигляді квадратичної форми, як це прийнято при розв'язуванні подібних задач [9]:

$$\begin{aligned}
S = & A_0 y_0^2 + A_1 y_1^2 + A_2 y_2^2 + A_3 y_3^2 + A_4 y_4^2 + A_5 y_5^2 + A_6 y_0 y_1 + A_7 y_0 y_2 + \\
& + A_8 y_0 y_3 + A_9 y_0 y_4 + A_{10} y_0 y_5 + A_{11} y_1 y_2 + A_{12} y_1 y_3 + A_{13} y_1 y_4 + A_{14} y_1 y_5 + \\
& + A_{15} y_2 y_3 + A_{16} y_2 y_4 + A_{17} y_2 y_5 + A_{18} y_3 y_4 + A_{19} y_3 y_5 + A_{20} y_4 y_5,
\end{aligned} \quad (16)$$

де $A_0, A_1, A_2, \dots, A_{20}$ - постійні коефіцієнти, які необхідно визначити. Візьмемо частинні похідні з виразу (16) за фазовими координатами динамічної системи:

$$\frac{\partial S}{\partial y_0} = 2A_0 y_0 + A_6 y_1 + A_7 y_2 + A_8 y_3 + A_9 y_4 + A_{10} y_5, \quad (17)$$

$$\frac{\partial S}{\partial y_1} = A_6 y_0 + 2A_1 y_1 + A_{11} y_2 + A_{12} y_3 + A_{13} y_4 + A_{14} y_5, \quad (18)$$

$$\frac{\partial S}{\partial y_2} = A_7 y_0 + A_{11} y_1 + 2A_2 y_2 + A_{15} y_3 + A_{16} y_4 + A_{17} y_5, \quad (19)$$

$$\frac{\partial S}{\partial y_3} = A_8 y_0 + A_{12} y_1 + A_{15} y_2 + 2A_3 y_3 + A_{18} y_4 + A_{19} y_5, \quad (20)$$

$$\frac{\partial S}{\partial y_4} = A_9 y_0 + A_{13} y_1 + A_{16} y_2 + A_{18} y_3 + 2A_4 y_4 + A_{20} y_5, \quad (21)$$

$$\frac{\partial S}{\partial y_5} = A_{10} y_0 + A_{14} y_1 + A_{17} y_2 + A_{19} y_3 + A_{20} y_4 + 2A_5 y_5. \quad (22)$$

Підставимо вирази (17-22) у рівняння (15) і після винесення спільних множників за дужки отримаємо:

$$\begin{aligned}
& y_0^2 \left(\delta_0 - \frac{A_{10}^2}{4\delta_6} \right) + y_1^2 \left(A_6 + \delta_1 - \frac{A_{14}^2}{4\delta_6} \right) + y_2^2 \left(A_{11} - BA_{17} + \delta_2 - \frac{A_{17}^2}{4\delta_6} \right) + y_3^2 \left(A_{15} + \delta_3 - \frac{A_{19}^2}{4\delta_6} \right) + y_4^2 \left(A_{18} - AA_{20} + \right. \\
& + \delta_4 - \frac{A_{20}^2}{4\delta_6} \left. \right) + y_5^2 \left(A_{20} + \delta_5 - \frac{A_5}{\delta_6} \right) + y_0 y_1 \left(A_0 - \frac{A_{10} A_{14}}{2\delta_6} \right) + y_0 y_2 \left(A_6 - BA_{10} - \frac{A_{10} A_{17}}{2\delta_6} \right) + y_0 y_3 \left(A_7 - \frac{A_{10} A_{19}}{2\delta_6} \right) + \\
& + y_0 y_4 \left(AA_{10} + A_8 - \frac{A_{10} A_{20}}{2\delta_6} \right) + y_0 y_5 \left(A_9 - \frac{A_{10} A_5}{\delta_6} \right) + y_1 y_2 \left(2A_1 - BA_{14} + A_7 - \frac{A_{14} A_{17}}{2\delta_6} \right) + y_1 y_3 \left(A_{11} - A_8 - \right. \\
& - \frac{A_{14} A_{19}}{2\delta_6} \left. \right) + y_1 y_4 \left(A_{12} - BA_{19} + 2A_2 - \frac{A_{17} A_{19}}{2\delta_6} \right) + y_1 y_5 \left(A_{12} - BA_{19} + 2A_2 - \frac{A_{17} A_{19}}{2\delta_6} \right) + y_2 y_3 \left(A_{14} - A_{16} - 2 \times \right. \\
& \times BA_5 - \frac{A_{17} A_5}{\delta_6} \left. \right) + y_2 y_4 \left(A_{12} - AA_{14} + A_0 - \frac{A_{14} A_{20}}{2\delta_6} \right) + y_2 y_5 \left(A_{10} - A_{13} - \frac{A_{14} A_5}{\delta_6} \right) + y_3 y_4 \left(A_{13} + A_{15} - AA_{17} - \right. \\
& - BA_{20} - \frac{A_{17} A_{20}}{2\delta_6} \left. \right) + y_3 y_5 \left(A_{16} + AA_{19} + 2A_3 - \frac{A_{19} A_{20}}{2\delta_6} \right) + y_4 y_5 \left(A_{17} + A_{18} - \frac{A_{19} A_5}{\delta_6} \right) = 0.
\end{aligned} \quad (23)$$

Рівняння (23) буде справедливим у тому випадку, коли вирази у дужках будуть рівні нулю, оскільки фазові координати динамічної системи одночасно не можуть бути рівні нулю. Тому рівняння (23)

можна замінити на систему нелінійних алгебраїчних рівнянь, яка отримана шляхом прирівнювання до нуля виразів у дужках із рівняння (23). Не будемо записувати цю систему оскільки вона є досить громіздкою. Отриману систему рівнянь розв'язати у аналітичному вигляді досить важко тому спростимо її. Для цього подамо вираз (13), із врахуванням формули (22), у такому вигляді:

$$u = -\frac{A_{10}y_0 + A_{14}y_1 + A_{17}y_2 + A_{19}y_3 + A_{20}y_4 + 2A_5y_5}{2\delta_6}. \quad (24)$$

Таким чином, для знаходження невідомої функції u необхідно знайти лише шість коефіцієнтів $A_5, A_{10}, A_{14}, A_{17}, A_{19}, A_{20}$. Для визначення цих коефіцієнтів необхідно сформулювати шість рівнянь, які можна отримати із відомої системи рівнянь отриманої із виразу (23). Запишемо систему із шести нелінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} \delta_0 - \frac{A_{10}^2}{4\delta_6} = 0; \\ -BA_{10} + \frac{A_{14}^2}{4\delta_6} - \delta_1 - \frac{A_{10}A_{17}}{2\delta_6} = 0; \\ \frac{A_{14}A_5}{\delta_6} - A_{10} - \delta_3 - \frac{A_{19}^2}{4\delta_6} - AA_{17} - BA_{20} - \frac{A_{17}A_{20}}{2\delta_6} = 0; \\ A_{20} + \delta_5 - \frac{A_5^2}{\delta_6} = 0; \\ A_{17} + AA_{20} - \delta_4 + \frac{A_{20}^2}{4\delta_6} - \frac{A_{19}A_5}{\delta_6} = 0; \\ \frac{A_{14}A_{19}}{2\delta_6} - \frac{A_{10}^2A_{20}}{2\delta_6} - A - BA_{17} + \delta_2 - \frac{A_{17}^2}{4\delta_6} = 0. \end{cases} \quad (25)$$

Перше рівняння системи (25) є незалежним від інших і можемо одразу записати:

$$A_{10} = \pm 2\sqrt{\delta_6\delta_0}. \quad (26)$$

Від'ємний корінь відкидаємо, оскільки він може призвести до нестійкості динамічної системи.

Систему рівнянь (25) будемо розв'язувати чисельним методом. Для цього задамо параметри динамічної системи: маса крана $m_1 = 1000$ кг, маса траверси $m_2 = 300$ кг, маса вантажу $m_3 = 1000$ кг,

довжина гнучкого підвісу $l_1 = 6$ м, довжина гнучкого підвісу $l_2 = 2$ м. Крім того, задамо величини вагових коефіцієнтів: $\delta_0 = \delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = \delta_4 = \delta_5 = 0,1$, $\delta_6 = 0,4$. В результаті розрахунку отримали декілька дійсних та декілька комплексних коренів системи (25). Всі комплексні корені відкидаємо. Крім того, відкидаємо від'ємні корені, оскільки вони можуть привести до нестійкості динамічної системи. Із врахуванням зроблених зауважень для вказаних вище параметрів системи маємо: $A_{14} = 4,98$, $A_{17} = 1,14$, $A_{19} = 7,11$, $A_{20} = 0,23$, $A_5 = 0,36$.

Підставляючи знайдені величини коефіцієнтів у вираз (24), а вираз (24) у диференціальне рівняння (2) отримаємо лінійне диференціальне рівняння

$$x_3^{VI} + \frac{A_5}{\delta_6} x_3^{V} + \left(A + \frac{A_{20}}{2\delta_6} \right) x_3^{IV} + \frac{A_{19}}{2\delta_6} \ddot{x}_3 + (B + A_{17}) \ddot{x}_3 + \frac{A_{14}}{2\delta_6} \dot{x}_3 + \frac{A_{10}}{2\delta_6} x_3 = 0, \quad (27)$$

для розв'язання якого необхідно скласти характеристичне рівняння:

$$p^6 + \frac{A_5}{\delta_6} p^5 + \left(A + \frac{A_{20}}{2\delta_6} \right) p^4 + \frac{A_{19}}{2\delta_6} p^3 + (B + A_{17}) p^2 + \frac{A_{14}}{2\delta_6} p + \frac{A_{10}}{2\delta_6} = 0. \quad (28)$$

Алгебраїчне рівняння шостого порядку (28) неможливо розв'язати в радикалах. Тому будемо шукати чисельний розв'язок диференціального рівняння (27) методом Рунге-Кутта [10]. Початкові умови для чисельного інтегрування рівняння (27) такі: $x_1(0) = x_2(0) = x_3(0) = 0$, $\dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) = \dot{x}_3(0) = 0,5$ м/с. Такі початкові умови означають процес загальмовування крана з початковою швидкості 0,5 м/с, причому коливання мас на гнучких підвісах відсутні.

У результаті чисельного інтегрування отримано наближений розв'язок рівняння (27) за допомогою якого побудовано графічні залежності динаміки руху системи (рис. 2).

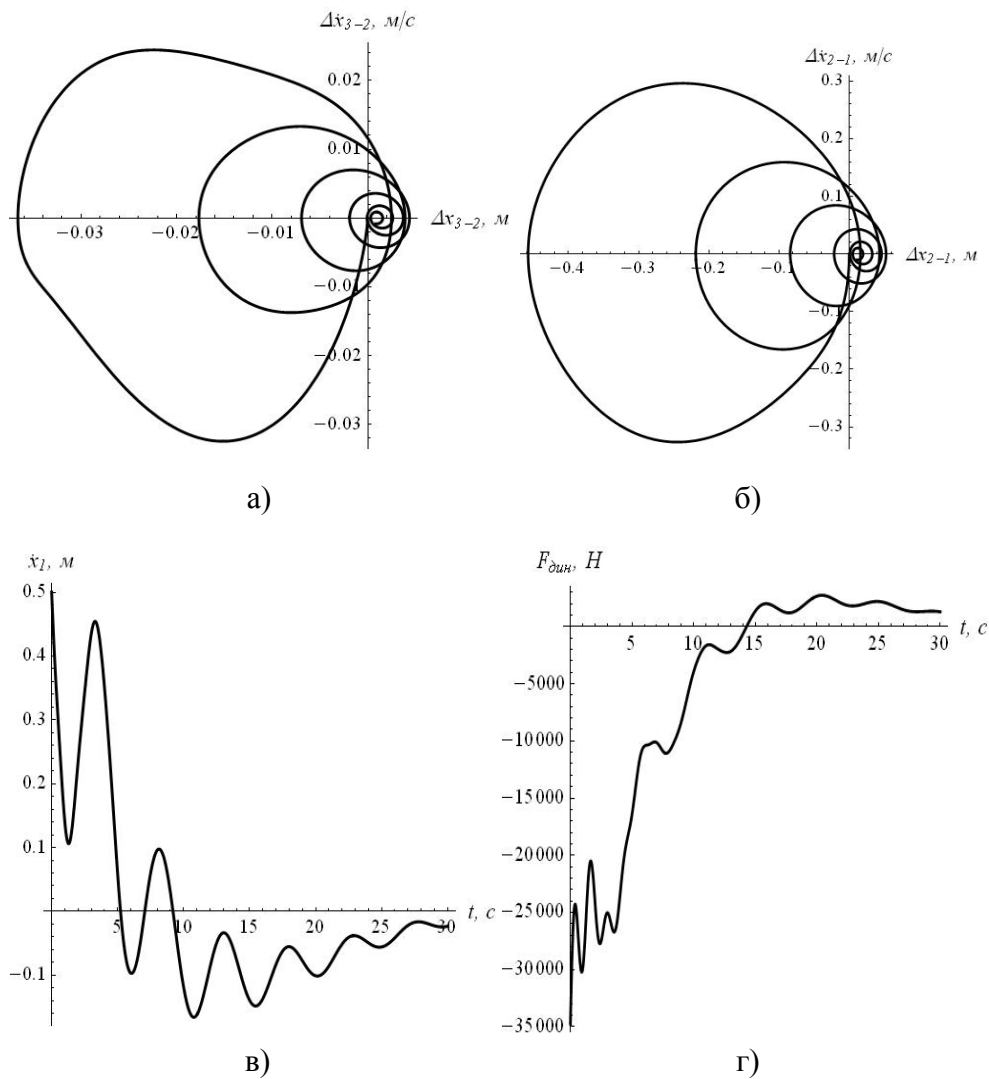


Рис. 2. Фазовий портрет коливань маси m_3 (а) відносно маси m_2 ; фазовий портрет коливань маси m_2 відносно маси m_1 , графік швидкості крана \dot{x}_1 (в), графік динамічної складової приводного зусилля $F_{дин}$ (г)

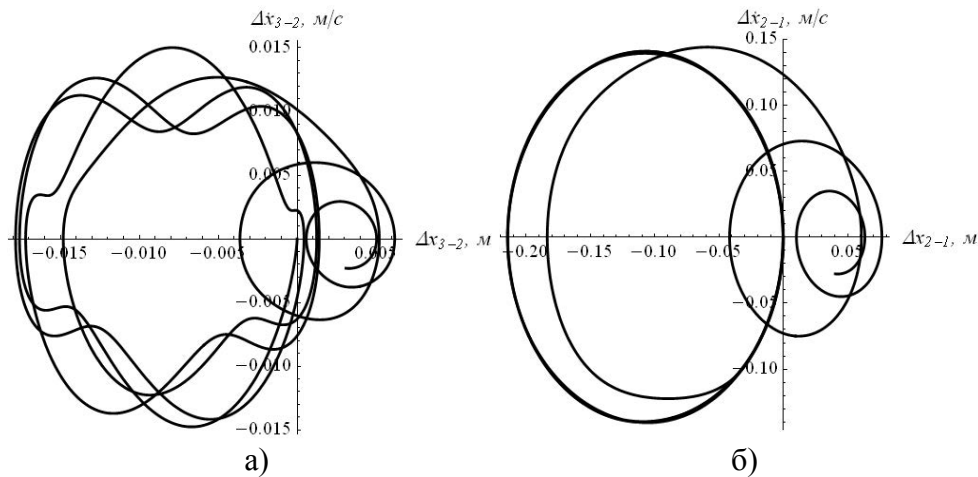
Аналіз графічних залежностей вказує на те, що коливання з плином часу затухають, що було необхідно за умовами задачі. Однак, інтенсивність затухання коливань є незначною. Крім того, існують принципові небажані властивості отриманого оптимального закону керування, а саме: знакозмінний характер швидкості та динамічної складової приводного зусилля, надзвичайно велика початкова величина динамічної складової приводного зусилля. Ці недоліки ставлять під сумнів практичну реалізацію синтезованого оптимального керування. Однак стверджувати те, що синтезований закон руху крана

непридатний для практики не можна. Перш за все потрібно проаналізувати отриманий закон руху крана для виявлення позитивних його властивостей. Задача аналізу ускладнюється тим, що немає готових аналітичних залежностей, які б давали змогу оцінити вплив параметрів динамічної системи, величин вагових коефіцієнтів та початкових умов руху крана на його кінематичні та динамічні характеристики при оптимальному керуванні. Розв'язок задачі оптимізації руху крана із траверсною підвіскою виконаний без врахування обмежень (10). Для врахування цих обмежень використаємо простий прийом: сигнал оптимального керування пропустимо через нелінійний елемент типу „насичення”. У результаті отримуємо таке керування:

$$\tilde{u} = \begin{cases} u_{\max}, & \text{якщо } |u| \geq u_{\max}; \\ u, & \text{якщо } |u| \leq u_{\max}. \end{cases} \quad (29)$$

Покажемо, як таке керування впливає на динаміку руху системи. Для цього чисельно проінтегруємо диференціальне рівняння (2), причому права частина цього рівняння є кусочною функцією фазових координат динамічної системи та величини максимально допустимої величини керування. За отриманим результатом побудуємо графічні залежності (рис. 3). Для побудованих графіків параметри динамічної системи залишаються незмінними, а максимально допустима величина керування прийнята такою $u_{\max} = 1,5 \text{ м/с}^2$.

Аналіз приведених графіків дає змогу встановити, що зменшення величини керування, яке діє на динамічну систему протягом режиму руху „затягує” перехідний процес гальмування.



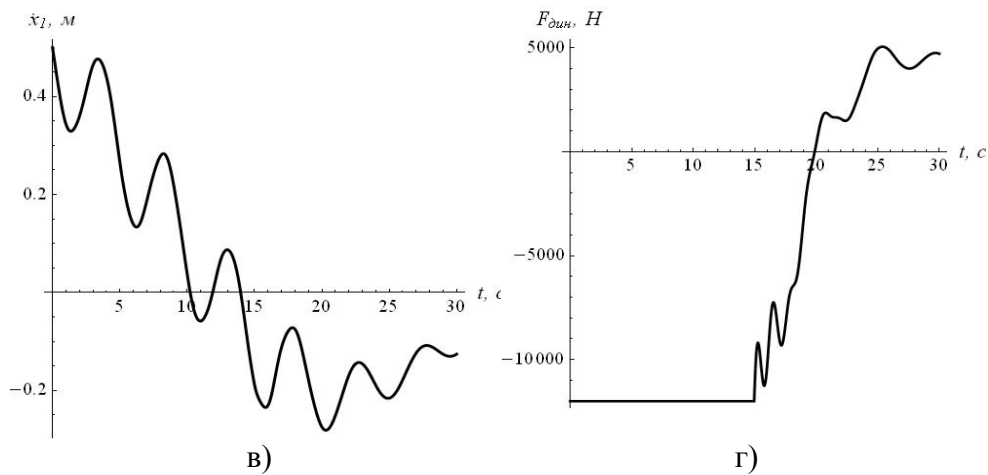


Рис. 3. Фазовий портрет коливань маси m_3 (а) відносно маси m_2 ; фазовий портрет коливань маси m_2 відносно маси m_1 , графік швидкості крана $\dot{\alpha}_1$ (в), графік динамічної складової приводного зусилля $F_{дин}$ (г)

Звідси випливає логічний висновок: оптимальне керування обмежене границею допустимих значень усуває можливість перевантаження приводного двигуна, а також подовжує процес усунення коливань вантажу.

З практичної точки зору небажані властивості оптимального керування доповненого зоною нечутливості залишились, що видно із графіків на рис. 3. Як вже зазначалось необхідні додаткові дослідження синтезованого керування для того, щоб встановити область його використання.

Тепер дослідимо закон керування (29) із використанням принципу максимуму [11]. Це необхідно для того, щоб з'ясувати, чи можна керування (29) назвати оптимальним. Тобто чи обмежене зоною нечутливості керування u залишається оптимальним чи ні? Для проведення такого дослідження запишемо Гамільтоніан для даної динамічної системи:

$$H = \sum_{v=0}^5 \psi_v y_v + \psi_6 (u - Ay_4 - By_2) - \left(\sum_{i=0}^5 \delta_i y_i^2 + \delta_6 u^2 \right), \quad (30)$$

де ψ_v - v -та спряжена змінна. Згідно принципу максимуму, необхідно таким чином керувати процесом, щоб Гамільтоніан (30) був максимальним. Для відкритої області керування ($u \in (-\infty; \infty)$) таке керування знаходиться з умов стаціонарності функції Гамільтона:

$$\frac{\partial H}{\partial u} = \psi_6 - 2\delta_6 u = 0. \quad (31)$$

З рівняння (31) отримаємо:

$$u = \frac{\psi_6}{2\delta_6}. \quad (32)$$

Для того, щоб пересвідчитись, що отримане керування (32) доставляє максимум Гамільтоніану (30), необхідно проаналізувати знак другої похідної Гамільтоніана по керуванню:

$$\frac{\partial^2 H}{\partial u^2} = -2\delta_6 < 0. \quad (33)$$

Вираз (32) справедливий для відкритої області керування. Однак, на керування накладаються обмеження у вигляді нестрогих нерівностей (10). Враховуючи обмеження (10) оптимальне керування можна подати у такому вигляді:

$$u = \begin{cases} u_{\max}, & \text{якщо } \left| \frac{\psi_6}{2\delta_6} \right| \geq u_{\max}; \\ \frac{\psi_6}{2\delta_6}, & \text{якщо } \left| \frac{\psi_6}{2\delta_6} \right| \leq u_{\max}. \end{cases} \quad (34)$$

Аналіз виразів (13), (29) та (34) показує, що вони співпадають якщо:

$$\psi_6 = -\frac{\partial S}{\partial y_5}. \quad (35)$$

Для доведення цієї рівності перетворимо ліву частину рівняння Беллмана (11) таким чином:

$$\begin{aligned} & \min \left(\sum_{v=0}^5 \frac{\partial S}{\partial y_{v-1}} y_v + \frac{\partial S}{\partial y_5} (u - Ay_4 - By_2) + \left(\sum_{i=0}^5 \delta_i y_i^2 + \delta_6 u^2 \right) \right) = \\ & \min(-1) \left(\sum_{v=0}^5 \left(-\frac{\partial S}{\partial y_{v-1}} \right) y_v + \left(-\frac{\partial S}{\partial y_5} \right) (u - Ay_4 - By_2) - \left(\sum_{i=0}^5 \delta_i y_i^2 + \delta_6 u^2 \right) \right) = \\ & \max \left(\sum_{v=0}^5 \left(-\frac{\partial S}{\partial y_{v-1}} \right) y_v + \left(-\frac{\partial S}{\partial y_5} \right) (u - Ay_4 - By_2) - \left(\sum_{i=0}^5 \delta_i y_i^2 + \delta_6 u^2 \right) \right). \end{aligned} \quad (36)$$

Порівнюючи вираз (30) та (36) можемо записати:

$$-\frac{\partial S}{\partial y_{v-1}} = \psi_v. \quad (37)$$

Зокрема для $v=6$ справджується рівність (35).

Таким чином, доведено, що керування (29) є оптимальним. Очевидно, що оптимальне керування (29) вже не буде задовольняти рівняння Беллмана (11), однак вимогу максимуму Гамільтоніана для допустимої області керувань (10) керування (29) задовольняє.

Висновок

У даній роботі розв'язана задача оптимального керування рухом динамічної системи „кран із траверсною підвіскою - вантаж”. Розв'язок задачі шукався за допомогою методу динамічного програмування. Графічні залежності, побудовані із врахуванням отриманого керування, вказують не певні недоліки керування в плані практичної реалізації. Однак, це не означає що від отриманого результату необхідно відмовлятися – його необхідно проаналізувати для того, щоб встановити раціональні режими при яких він дає кращі характеристики процесу. Задача аналізу отриманого керування є складною, оскільки немає всіх аналітичних залежностей, які б описували кінематичні та динамічні характеристики процесу та керування. Ситуація ускладнюється тим, що сама границя допустимої області керування є складною функцією багатьох аргументів. Для аналізу отриманого керування необхідно буде використовувати чисельні методи або/і спрощувати задачу.

Одним із небажаних факторів у отриманому керуванні є надзвичайно велике значення керування у початковий момент часу. У роботі запропоновано усунути цей недолік шляхом використання нелінійної функції типу „насичення”, аргументом якої є оптимальне керування. Доведено, що використання цієї нелінійної функції не вплине на оптимальність процесу, оскільки при цьому функція Гамільтона досягає максимуму.

ЛІТЕРАТУРА

1. Комаров М.С. Динамика грузоподъемных машин / Комаров М.С. – М.: Машиностроение, 1969. – 206 с.
2. Казак С.А. Динамика мостовых кранов / Казак С.А. – М.: Машиностроение, 1968. – 331 с.
3. Лобов Н.А. Динамика грузоподъемных кранов/ Лобов Н.А. – М.: Машиностроение, 1987. – 160 с.
4. Григоров О.В. Совершенствование рабочих характеристик крановых механизмов: дисс. на соиск. степ. доктора техн. наук: 05.05.05 / Григоров Отто Владимирович. – Х., 1995. – 386 с.
5. Моделювання динаміки механізмів вантажопідійомних машин / [Ловейкін В.С., Човнюк Ю.В., Діктерук М.Г., Пастушенко С.І.]. – К.-Миколаїв: РВВ МДАУ, 2004. – 286 с.

6. Ловейкін В.С. Оптимізація перехідних режимів руху механічних систем прямим варіаційним методом / В.С. Ловейкін, Ю.О. Ромасевич. – К.; Ніжин: Видавець ПП Лисенко М.М., 2010. - 184 с.
7. Ловейкін В.С. Теорія технічних систем / В.С. Ловейкін, І.І. Назаренко, О.Г. Онищенко. – К.-Полтава: ІЗМН-ПДТУ, 1998. –175с.
8. Беллман Р., Дрейфус С. Прикладные задачи динамического программирования / Р. Беллман, С. Дрейфус [перевод с англ. Митрофановой, Н.М., Первозванского А.А., Хусу А.П., Шалаевского О.В.] – М.: Наука, 1965. – 460 с.
9. Летов А.М. Динамика полета и управление / А.М. Летов. – М.: Наука, 1969. – 360 с.
10. Дьяконов В. П. Mathematica 4.1/4.2/5.0 в математических и научно-технических расчетах / В.П. Дьяконов. – М.: СОЛОН-Пресс, 2004. – 696 с.
11. Понтрягин Л.С. Математическая теория оптимальных процессов / Л.С. Понтрягин, В.Г. Болтнянский, Р.В. Гамкрелидзе, Е.Ф. Мищенко. – М.: Физматгиз, 1961. – 392 с.