УДК 622.625.6
Гутаревич В.О., к.т.н.

ИССЛЕДОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ ЭКИПАЖА ПОДВЕСНОЙ МОНОРЕЛЬСОВОЙ ДОРОГИ С УЧЕТОМ ДЕФОРМАЦИИ МОНОРЕЛЬСА

Постановка проблемы. Во время движения экипажа подвесной монорельсовой дороги помимо статических нагрузок возникают дополнительные динамические нагрузки, приводящие к колебательным процессам и поперечным перемещениям, учет которых позволит обоснованно устанавливать параметры подвижного состава и монорельса на этапе проектирования.

Анализ последних исследований и публикаций. В работе [1] проведено математическое моделирование рельсовых транспортных средств. Исследования [2-3] посвящены линейным и нелинейным колебаниям элементов конструкций. Вынужденные колебания балок при действии подвижных нагрузок рассмотрены в работах [4-5]. Настоящая работа является продолжением указанных исследований.

Целью данной статьи является установление взаимосвязи между параметрами колебаний экипажа и монорельсового пути для определения дополнительных динамических нагрузок на монорельс, возникающих во время движения подвесной дороги.

Изложение основного материала. Рассмотрим движение одиночного экипажа по подвесному монорельсовому пути, секции которого шарнирно соединены между собой и имеют длину равную L (рис.1).

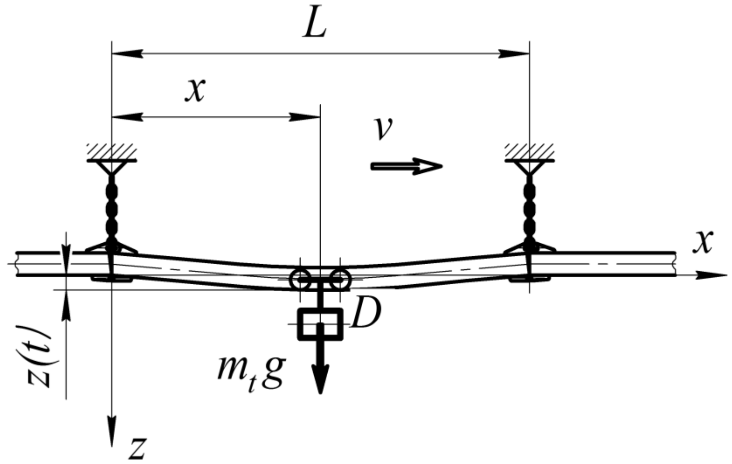

Рисунок 1 - Схема деформации подвесного монорельса под движущимся экипажем

Монорельс в начале пути закреплен, чем исключается его продольное раскачивание. Экипаж представим в виде одномассовой модели с колесами, находящимися на небольшом расстоянии друг от друга. Считаем, что на монорельс действует нагрузка $F_\mu = m_t g$, где m_t – масса экипажа. В результате этого секция монорельсового пути будет прогибаться и движение экипажа будет сопровождаться вертикальными смещениями, которые зависят не только от статической нагрузки, но и от вертикальной силы инерции.

С учетом рекомендаций [2] рассмотрим первоначально монорельс как невесомую балку, лежащую на сплошном упругом основании и изгибаемую сосредоточенной силой F_μ, линия действия которой проходит через центр тяжести экипажа. Дифференциальное уравнение изогнутой оси монорельса будет

$$\frac{\partial^4 z}{dx^4} EJ + k_\mu z = 0, \tag{1}$$

где $E -$ модуль упругости балки, из которой изготовлен монорельс;

$J -$ момент инерции поперечного сечения балки;

$k_\mu -$ жесткость упругого основания, которая определяет погонную нагрузку $k_\mu z$, вызывающую прогиб монорельса z.

Обозначим

$$\alpha_\mu = \sqrt[4]{\frac{k_\mu}{4EJ}},\ \varphi_z = \alpha_\mu x. \tag{2}$$

С учетом обозначений (2) найдем интеграл выражения (1)

$$z = \frac{F_\mu \alpha_\mu}{2k_\mu} e^{-\varphi_z} \left(\cos\varphi_z + \sin\varphi_z\right) \cdot \tag{3}$$

Отсюда следует, что наибольший прогиб монорельса, возникающий под нагрузкой, будет

$$z_f = \frac{F_\mu \alpha_\mu}{2k_\mu} \cdot$$

Входящий в выражение (3) параметр k_μ может быть получен как $k_\mu = D_z / L$, где $D_z -$ усилие, которое необходимо приложить к монорельсу для того, чтобы деформировать подвес на единицу длины.

Тогда

$$\alpha_\mu = \sqrt[4]{\frac{D_z}{4LEJ}} = \frac{1}{L}\sqrt[4]{\frac{3}{2\gamma_z}}, \tag{4}$$

где $\gamma_z -$ коэффициент, учитывающий относительную жесткость монорельса и его подвески, равный

$$\gamma_z = \frac{6EJ}{D_z L^3}.$$

Во время движения экипажа с постоянной скоростью вертикальная реакция в месте контакта колеса с монорельсом составит

$$R_z = \frac{2k_\mu z}{\alpha_\mu} = 2D_z \sqrt[4]{\frac{2}{3}\gamma_z} z.$$

Уравнение движения экипажа будет

$$\frac{d^2 z}{dt^2} m_t + \frac{2k_\mu}{\alpha_\mu} z = F_\mu . \tag{5}$$

В случае, когда $F_\mu = 0$, выражение (5) описывает свободные колебания экипажа, перемещающегося по монорельсу. Прогиб монорельса под действием силы тяжести экипажа в этом случае равен

$$z = z_o \cos\sqrt{\frac{2k_\mu}{m_t \alpha_\mu}} t + z'_o \sqrt{\frac{m_t \alpha_\mu}{2k_\mu}} \sin\sqrt{\frac{2k_\mu}{m_t \alpha_\mu}} t, \tag{6}$$

где z_o – начальное вертикальное перемещение колеса экипажа относительно первоначального положения равновесия;

z'_o – вертикальная скорость колеса в начальный момент времени.

В случае, когда $F_\mu \neq 0$, выражение (5) описывает вынужденные колебания, возникающие под действием силы тяжести экипажа, усилия прижатия колеса экипажа к монорельсу, силы инерции, вызываемой из-за несовпадения оси вращения колеса с его центром тяжести.

При движении экипажа по упругому монорельсу, за счет происходящих колебаний экипажа, усилие прижатия колеса может изменяться в широких пределах. Обозначим β_m – отношение усилия прижатия колеса экипажа к его силе тяжести.

При этом будет

$$F_\mu = m_t g (1 + \beta_m).$$

Тогда решение уравнения (5) имеет вид

$$z = A_\mu \cos\sqrt{\frac{2k_\mu}{\alpha_\mu m_t}} t + B_\mu \sin\sqrt{\frac{2k_\mu}{\alpha_\mu m_t}} t + \frac{\alpha_\mu}{2k_\mu} m_t g (1 + \beta_m), \tag{7}$$

где A_μ, B_μ – произвольные постоянные интегрирования, устанавливающие амплитуду и фазу свободных колебаний, соответствующие начальным условиям движения экипажа.

Если имеется несовпадение оси вращения колеса с его центром тяжести, то выражение F_μ можно представить как $F_\mu = q_o \cos\omega_k t$, где q_o – значение центробежной силы; ω_k – скорость вращения колеса во время движения экипажа по монорельсу.

Отсюда

$$z = A_\mu \cos\sqrt{\frac{2k_\mu}{\alpha_\mu m_t}}t + B_\mu \sin\sqrt{\frac{2k_\mu}{\alpha_\mu m_t}}t + \\ + \frac{1}{1-\dfrac{\alpha_\mu m_t \omega_k^2}{2k_\mu}}\frac{\alpha_\mu}{2k_\mu} q_o \cos\omega_k t. \tag{8}$$

В выражениях (7) и (8) первые два слагаемые учитывают свободные колебания экипажа с монорельсом, а третье – вынужденные колебания. Входящие в эти выражения постоянные A_μ, B_μ должны выбираться с учетом выполнения начальных условий. Так, если под действием силы тяжести в начальный момент движения прогиб монорельса равен статическому прогибу, а начальная скорость равна нулю, то значение прогиба монорельса будет

$$z = \frac{\alpha_\mu}{2k_\mu} m_t g(1+\beta_m) + \\ + \frac{1}{1-\dfrac{\alpha_\mu m_t \omega_k^2}{2k_\mu}}\frac{\alpha_\mu}{2k_\mu} q_o \left(\cos\omega_k t - \cos\sqrt{\frac{2k_\mu}{\alpha_\mu m_t}}t\right). \tag{9}$$

Следует отметить, что период свободных колебаний рассматриваемой системы не зависит от начальных условий и может быть найден как

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\alpha_\mu m_t}{2k_\mu}}. \tag{10}$$

На практике скорость движения экипажа изменяется постепенно. Так, когда угловая скорость ω_k принимает наибольшее значение, влияние действия центробежных сил q_o снижается. При этом целесообразно учитывать только следующие вынужденные колебания

$$\frac{1}{1-\dfrac{\alpha_\mu m_t \omega_k^2}{2k_\mu}}\frac{\alpha_\mu}{2k_\mu} q_o \cos\omega_k t.$$

От статического прогиба монорельса, определяемого как $\frac{\alpha_\mu}{2k_\mu} q_o$, амплитуда колебаний будет отличаться только множителем, так называемым динамическим коэффициентом центробежной силы

$$\mu_o = \frac{1}{1 - \frac{\alpha_\mu m_t \omega_k^2}{2k_\mu}}.$$

На практике данный коэффициент принимает значения больше единицы и определяется угловой скоростью вращения ω_k, а также периодом собственных колебаний T. Используя время полного оборота колеса T_o, можно найти

$$\mu_o = \frac{1}{1 - \left(\frac{T}{T_o}\right)^2}.$$

Полученные выше зависимости применимы для монорельса и колес идеальной формы, не имеющих впадин или выпуклостей. Если монорельс или колеса имеют впадину от уровня идеальной формы глубиной Δz, то при этом прогибу монорельса z соответствует смещение экипажа по вертикали $z + \Delta z$. Тогда уравнение вертикальных перемещений экипажа можно представить в следующем виде

$$\frac{d^2(z + \Delta z)}{dt^2} m_t + \frac{2k_\mu}{\alpha_\mu} z = F_\mu. \tag{11}$$

Из (11) следует

$$\frac{d^2 z}{dt^2} m_t + \frac{2k_\mu}{\alpha_\mu} z = F_\mu - \frac{d^2 \Delta z}{dt^2} m_t. \tag{12}$$

Анализ выражения (12) показывает, что смещению Δz соответствует сила $f_z(t) = \frac{d^2 \Delta z}{dt^2} m_t$.

При движении по монорельсовому пути возникает ряд последовательных ударов. Считаем, что в какой-то момент времени t_0 возникает сила $f_z(t_0)$. За время dt_0 эта сила изменит скорость движения экипажа, что соответствует перемещению

$$z_t = \sqrt{\frac{\alpha_\mu m_t}{2k_\mu}} f_z(t_o) \sin\left(\sqrt{\frac{2k_\mu}{\alpha_\mu m_t}} (t - t_0)\right) dt_o.$$

С учетом выражения (6) полное перемещение экипажа за время t будет

$$z = \sqrt{\frac{\alpha_\mu m_t}{2k_\mu}} \int_0^t f_z(t_o) \sin\left(\sqrt{\frac{2k_\mu}{\alpha_\mu m_t}} (t - t_0) \right) dt_o . \qquad (13)$$

Для незагруженного участка монорельсового пути, соединенного из гнутых отрезков (рис. 2*а*), уравнение продольной оси можно представить

$$\xi(x) = \frac{\Delta z}{2} \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{L_{vz}} \right),$$

где L_{vz} – длина участка закругления, выполненного из гнутых отрезков монорельса.

Для этого случая выражение (12) примет вид

$$\frac{d^2 z}{dt^2} m_t + \frac{2k_\mu}{\alpha_\mu} z = F_\mu - m_t \frac{4\pi^2 v^2 \Delta z}{2L_{vz}} \cos \frac{2\pi x}{L_{vz}}. \qquad (14)$$

где v – скорость движения экипажа.

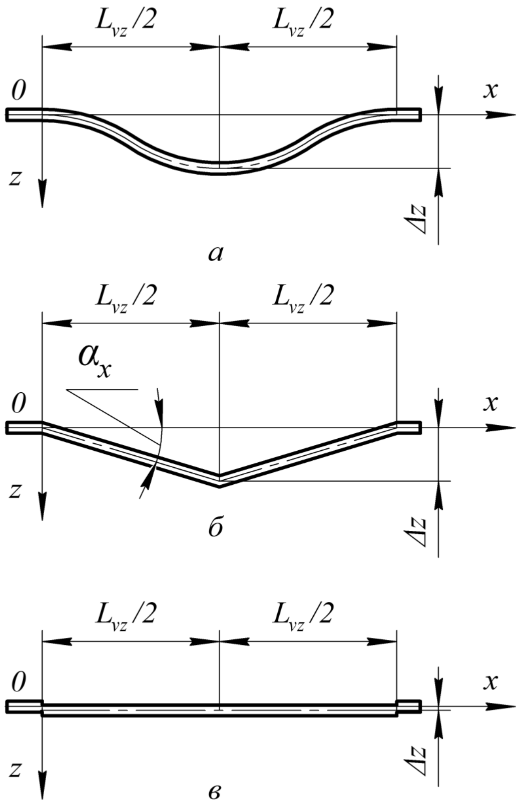

Рисунок 2 - Схема сопряжений секций подвесного монорельса: *а* – из гнутых отрезков; *б* – из прямолинейных отрезков; *в* – со смещением

С учетом выражения (13) решение уравнения (14) будет

$$z = \frac{2\pi^2 v^2 \Delta z}{L_{vz}\left(\dfrac{4\pi^2 v^2}{L_{vz}} - \dfrac{2k_\mu}{\alpha_\mu m_t}\right)}\left(\cos\frac{2\pi v t}{L_{vz}} - \cos\sqrt{\frac{2k_\mu}{\alpha_\mu m_t}}t\right). \quad (15)$$

Определим время движения экипажа по впадине

$$T_0 = \frac{L_{vz}}{v}.$$

Тогда, используя выражение (10), уравнение (15) для любого момента времени t, принимающего значения $0 < t < T_0$, можно записать

$$z = \frac{\Delta z}{2\left(1 - \dfrac{T_0^2}{T^2}\right)}\left(\cos\frac{2\pi t}{T_o} - \cos\frac{2\pi t}{T}\right). \quad (16)$$

Для закруглений монорельса, состоящих из прямолинейных отрезков (секций), возникают колебания при переходе с горизонтального участка на наклонный. Если обозначить α_x – угол наклона отрезка пути (рис. 2*б*), то смещение можно найти как $\xi(x) = \alpha_x x = \alpha_x v t$.

При движении по горизонтальному отрезку вертикальные перемещения экипажа определяются выражением (5). Далее, после прохода точки изгиба, когда вертикальная скорость еще равна нулю, считаем

$$\frac{d(z + \xi(x))}{dt} = 0.$$

В дальнейшем, при движении экипажа по наклонному участку, соответственно имеем

$$\frac{d\xi(x)}{dt} = a_x v.$$

Причем, в начальный момент

$$\left(\frac{dz}{dt}\right)_{t=0} = -a_x v.$$

Амплитуда вынужденных колебаний на этом участке будет

$$z_x = -a_x v\sqrt{\frac{\alpha_\mu m_t}{2k_\mu}}\sin\sqrt{\frac{2k_\mu}{\alpha_\mu m_t}}t$$

или

$$z_x = -\frac{2\Delta z v}{L_x}\sqrt{\frac{\alpha_\mu m_t}{2k_\mu}}\sin\sqrt{\frac{2k_\mu}{\alpha_\mu m_t}}t. \qquad (17)$$

Выражение (17) остается справедливым пока

$$0 \le t \le \frac{T_0}{2}.$$

При $x = \frac{L_x}{2}$ (см. рис. 2*б*) участок монорельсового пути меняет знак уклона. Далее, пока $\frac{T_0}{2} \le t \le T_0$, появляются новые колебания

$$\begin{aligned} z_x = &-\frac{2\Delta z v}{L_x}\sqrt{\frac{\alpha_\mu m_t}{2k_\mu}}\sin\sqrt{\frac{2k_\mu}{\alpha_\mu m_t}}t + \\ &+\frac{4\Delta z v}{L_x}\sqrt{\frac{\alpha_\mu m_t}{2k_\mu}}\sin\sqrt{\frac{2k_\mu}{\alpha_\mu m_t}}\left(t - \frac{T_0}{2}\right). \end{aligned} \qquad (18)$$

При переходе на горизонтальный участок колебания изменяются и с учетом (17) и (18) приобретают следующий вид

$$z_x = \frac{\Delta z T}{T_0}\left(-\sin\frac{2\pi t}{T} + 2\sin\left(\frac{2\pi t}{T} - \frac{\pi T_0}{T}\right) - \sin\left(\frac{2\pi t}{T} - \frac{2\pi T_0}{T}\right)\right).$$

Если монорельсовый путь имеет впадины глубиной Δz (рис. 2*в*), то в начальный момент времени, когда экипаж заезжает во впадину, возникают колебания с амплитудой $\Delta z\cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right)$, а когда выезжает – $\Delta z\cos\left(\frac{2\pi t}{T} - T_0\right)$.

Выводы. На основании вышеизложенного следует, что деформация монорельсового пути при отклонении от идеальной формы зависит главным образом от времени оборота колеса экипажа. Учитывая взаимосвязь между деформацией и действующими нагрузками, которые определяются жесткостью монорельса, следует, что для более жесткого пути одинаковые отклонения от идеальной формы будут приводить к более высоким нагрузкам, действующим на экипаж и подвеску монорельса.

Полученные зависимости, учитывающие взаимосвязь между параметрами экипажа и подвесного монорельса, позволят на этапе проектирования обоснованно устанавливать параметры подвесных монорельсовых дорог.

ЛИТЕРАТУРА

1. Математическое моделирование колебаний рельсовых транспортных средств / В.Ф. Ушкалов, Л.М. Резников, В.С. Иккол и др.; ред. В.Ф. Ушкалов. –К.: Наук.думка, 1989. – 240с.

2. Тимошенко С.П. Прочность и колебания элементов конструкций / С.П. Тимошенко; ред. Э.И. Григолюк. – М.: Наука, 1974. – 704 с.

3. Popp K. Ground Vehicle Dynamics / K. Popp, K. Schiehlen. – Berlin: Springer, 2010. – 350 p

4. Bauchau O.A. Flexible Multibody Dynamics / O.A. Bauchau. – London, New-York: Springer, 2011. – 728 p.

5. Muserosa P. Free vibrations of simply-supported beam bridges under moving loads: Maximum resonance, cancellation and resonant vertical acceleration / P. Muserosa, E. Molinerb, M.D. Martínez-Rodrigob // Journal of Sound and Vibration, – 2013. – Vol. 332. – Iss. 2. – P. 326-345.