

МЕТОД ВЕКТОРНИХ ДІАГРАМ В КУРСАХ ФІЗИКИ ТА ЗАГАЛЬНОЇ ЕЛЕКТРОТЕХНІКИ

Постановка проблеми. В курсі загальної фізики, а особливо в курсі електротехніки, дуже поширений метод векторних діаграм для розв'язання задач вимушених коливань під дією гармонічної зовнішньої сили або гармонічної зовнішньої ЕРС. Однак цей метод викликає певні труднощі у студентів. Виникає потреба в інших способах впровадження і обґрунтування метода векторних діаграм.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Нагадаємо поширене обґрунтування метода векторних діаграм у навчальній літературі [1-7].

Нехай величина x змінюється з часом за гармонічним законом, тобто

$$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi_0), \quad (1)$$

де A – амплітуда коливань, ω – кутова (циклічна) частота, φ_0 – початкова фаза.

Швидкість зміни величини x з часом визначається як перша похідна x за часом t :

$$v_x(t) = \frac{dx}{dt} = \dot{x} = -\omega A \sin(\omega t + \varphi_0).$$

За допомогою формул зведення останню формулу можна записати у вигляді

$$v_x(t) = \omega A \cos\left(\omega t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2}\right). \quad (2)$$

Швидкість зміни швидкості з часом визначається як похідна $v_x(t)$ за часом:

$$\dot{v}_x(t) = -\omega^2 A \cos(\omega t + \varphi_0).$$

За допомогою формул зведення останній формулі можна надати такого вигляду

$$\dot{v}_x(t) = \omega^2 A \cos(\omega t + \varphi_0 + \pi). \quad (3)$$

Співставляючи формули (1) і (2), можна зробити висновок, що при гармонічних коливаннях величини x швидкість зміни цієї величини теж залежить від часу за гармонічним законом із тією ж частотою ω , з амплітудою, яка зв'язана з амплітудою A величини x співвідношенням

$$v_{\max} = \omega A, \quad (4)$$

і фазою, більшою від фази x на $\pi/2$.

Відповідно, при цьому прискорення (тобто швидкість зміни швидкості з часом) теж залежить від часу за гармонічним законом із тією ж частотою ω , з амплітудою, яка зв'язана з амплітудою зміщення x співвідношенням

$$a_{\max} = \omega^2 A, \quad (5)$$

і фазою, більшою від фази x на π . Кажуть, що при гармонічних коливаннях прискорення випереджає швидкість за фазою на $\pi/2$, а швидкість випереджає зміщення за фазою на $\pi/2$.

Ці висновки лежать в основі метода векторних діаграм.

Рисують вісь x -величини, що коливається. З деякої точки O відкладають вектор \vec{A} , довжина якого дорівнює амплітуді коливань величини x , а кут, який утворює вектор \vec{A} з додатним напрямком осі x , дорівнює початковій фазі φ_0 . Потім із тієї самої точки O в додатному напрямку (проти годинникової стрілки) під кутом $\pi/2$ відкладають вектор \vec{v}_m , довжина якого (в деякому масштабі) дорівнює $v_{\max} = \omega A$. І нарешті, з точки O під кутом $\pi/2$ до вектора \vec{v}_m (тобто в напрямку, протилежному вектору \vec{A}) відкладають вектор максимального прискорення \vec{a}_m , що чисельно дорівнює (в деякому масштабі) $a_{\max} = \omega^2 A$. Таким чином, отримуємо взаємне розташування векторів, яке зображене на рис. 1.

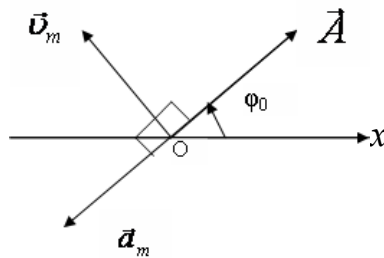


Рис. 1.

Якщо тепер привести всі ці вектори в обертальний рух (не змінюючи їх взаємного розташування) навколо точки O зі сталою кутовою швидкістю ω проти годинникової стрілки, то проекції векторів \vec{A} , \vec{v}_m і \vec{a}_m на вісь x будуть змінюватися з часом, відповідно, за формулами (1), (2) і (3).

Постановка завдання. Пропонується обґрунтування метода векторних діаграм, яке базується на кінематичній моделі обертального і коливального рухів.

Ми хочемо надати методу векторних діаграм більшої наочності, оскільки метод, що базується на розрахунку похідних за часом, здається студентам досить формальним.

Виклад основного матеріалу. Розглянемо таку кінематичну модель. Уявімо собі, що точка M рівномірно обертається по колу з центром O і радіусом A зі сталою кутовою швидкістю ω проти руху годинникової стрілки (рис. 2). Початковий кут, що утворює радіус із додатним напрямком осі x , дорівнює φ_0 . Як при цьому буде рухатися проекція точки M на будь-який діаметр, наприклад, на вісь x ?

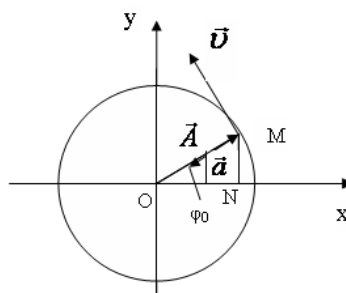


Рис. 2.

Цій моделі відповідає відома лекційна демонстрація, в якій гвіздок рівномірно обертається за допомогою обертальної машини і при цьому досліджується рух тіні гвіздка на екрані, якщо гвіздок освітлюється паралельним пучком світла. З кінематики випливає, що при рівномірному обертанні точки M кут, який утворює радіус OM із віссю x , змінюється з часом за законом

$$\varphi(t) = \omega t + \varphi_0. \quad (6)$$

З рис. 2 легко отримати, що координата точки N залежить від часу за законом, що збігається з рівнянням (1)

$$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi_0). \quad (7)$$

Таким чином, при рівномірному обертанні точки M по колу зі сталою кутовою швидкістю ω проекція N цієї точки на діаметр (на вісь x) здійснює гармонічні коливання, циклічна частота ω яких дорівнює кутовій швидкості точки M.

Далі, замість того, щоб диференціювати вираз (7) за часом, звернемося до рис. 2. Як повинні знати всі студенти зі шкільного курсу фізики, лінійна швидкість точки M, що обертається по колу радіуса A , зв'язана з кутовою швидкістю обертання ω співвідношенням

$$v = \omega A, \quad (8)$$

яке збігається з виразом (4). Крім того, як відомо, лінійна швидкість \vec{v} при криволінійному русі в кожній точці траєкторії напрямлена по дотичній до траєкторії в даній точці. При русі матеріальної точки M по колу її швидкість \vec{v} спрямована по дотичній до кола, а отже, вектор швидкості \vec{v} перпендикулярний до радіуса \vec{A} в кожному положенні. І нарешті, відомо, що при **рівномірному русі** матеріальної точки M по колу вона має доцентрове прискорення \vec{a} , яке напрямлене по радіусу до центра і яке за величиною дорівнює

$$a = \omega^2 A, \quad (9)$$

що збігається з формулою (5).

Висновки. Таким чином, в розглянутій кінематичній моделі ми маємо, що радіус-вектор \vec{A} точки M, вектор \vec{v} її швидкості, а також вектор \vec{a} її доцентрового прискорення в кожний момент часу мають одне й те саме взаємне розташування, яке збігається з відповідним розташуванням векторів на рис. 1.

Легко бачити, що при рівномірному обертанні точки M проекція вектора її швидкості на вісь x змінюється з часом за законом (2), а проекція її прискорення на вісь x залежить від часу за законом (3).

На нашу думку, такий спосіб обґрунтування метода векторних діаграм за допомогою кінематичної моделі є більш наочним, а тому, як можна сподіватись, і більш зрозумілим для студентів, ніж обґрунтування, що базується на диференціюванні гармонічних функцій. У той же час ми розуміємо, що напрямок швидкості вектора \vec{v} по дотичній до траєкторії та формула (9) для нормального (доцентрового) прискорення при обертальному русі по колу доводяться саме за допомогою диференціального числення, хоча і в дещо неявному вигляді.

Перспективи подальших досліджень. Метод векторних діаграм досить часто застосовується в електротехніці при розв'язанні задач, зв'язаних із протіканням змінного струму, що змінюється з часом за гармонічним законом, по колу, яке містить послідовно з'єднані ємність, індуктивність та активний опір.

Розглянемо для визначеності задачу про вимушені електричні коливання, що відбуваються в послідовному RLC-контурі (рис. 3), тобто в контурі, в якому послідовно з'єднані активний опір R , конденсатор ємності C та котушка з індуктивністю L . До цього контуру приєднане зовнішнє джерело, ЕРС якого залежить від часу за гармонічним законом.

Оскільки в електротехніці оперують з поняттями синусоїдальні струми і напруги, то слід враховувати що вихідні рівняння мають вигляд:

$$i = I_m \sin(\omega t + \psi_i),$$

$$u = U_m \sin(\omega t + \psi_u),$$

$$e = E_m \sin(\omega t + \psi_e),$$

хоча з точки зору математики рівняння з косинусоїдальними залежностями не протирічать отриманим результатам.

Зробимо деякі зауваження: в електротехніці для величин, що змінюються за гармонічним законом, прийнято миттєві значення позначати маленькими літерами, а амплітудні та діючі (середньоквадратичні) значення – відповідними великими літерами.

Будемо розглядати залежність зовнішньої ЕРС від часу у вигляді

$$e(t) = E_m \cos(\omega t + \psi_0). \quad (10)$$

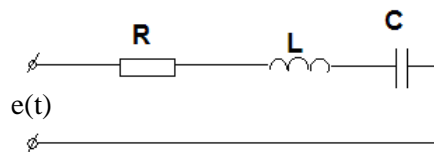


Рис. 3.

У цьому випадку метод векторних діаграм уже не настільки наочний, як у випадку механічних коливань. Але можна скористатись аналогією між механічними та електричними величинами. Якщо заряд на обкладках конденсатора q співставити зміщенню x у механічній системі, то струм i в електричному колі ($i = dq/dt$) можна співставити зі швидкістю, а швидкість зміни струму di/dt можна співставити з прискоренням $a = dv/dt$ у випадку механічних коливань. Виходячи з указаної аналогії для заряду q , сили струму i і швидкості зміни струму di/dt можна намалювати рис. 4, подібний до рис. 1.

При рівномірному обертанні цієї векторної діаграми як цілого проти годинникової стрілки з кутовою швидкістю ω проєкції всіх векторів на вісь x змінюються з часом за гармонічними законами:

$$q(t) = Q_m \cos(\omega t + \psi_q), \quad (11)$$

$$i(t) = I_m \cos\left(\omega t + \psi_q + \frac{\pi}{2}\right), \quad (12)$$

$$\frac{di(t)}{dt} = \omega I_m \cos(\omega t + \psi_q + \pi). \quad (13)$$

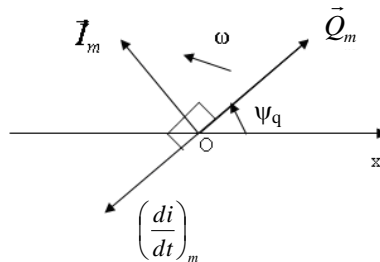


Рис. 4.

Причому амплітуди струму I_m і заряду Q_m зв'язані співвідношенням, аналогічним (4):

$$I_m = \omega Q_m. \quad (14)$$

Звернемо увагу на те, що, як на рис. 1, так і на рис. 4, кожен із векторів вимірюється у своїх одиницях, тому не можна співставляти між собою довжини векторів на рис. 1 (і, відповідно, на рис. 4).

Перейдемо тепер до послідовного RLC-контурі (рис. 3). Якщо розглядати квазістаціонарні процеси (тобто, такі, які відбуваються досить повільно – з малою частотою, коли струм у кожному поперечному перерізі можна вважати однаковим в один і той самий момент часу), а також вважати, що власні коливання згасли (тобто перехідні процеси припинились), то в контурі залишаться тільки вимушені коливання. При цьому до контура на рис. 3 можна застосувати друге правило Кірхгофа: сума миттєвих напруг на окремих елементах послідовного контура дорівнює зовнішній ЕРС (в один і той самий момент часу).

$$u_C(t) + u_R(t) + u_L(t) = e(t). \quad (15)$$

Тут

$$u_C(t) = \frac{q(t)}{C} \text{ —} \quad (16)$$

напруга на конденсаторі;

$$u_R(t) = Ri(t) \text{ —} \quad (17)$$

напруга на активному опорі;

$$u_L(t) = L \frac{di}{dt} \text{ —} \quad (18)$$

напруга на індуктивності (ця напруга відрізняється від ЕРС самоіндукції знаком).

Вважаючи, що частота ω у формулах (11–13) збігається з частотою ω зовнішньої ЕРС (див. формулу (10)), можна рівняння (15) представити у вигляді векторної діаграми, співставляючи кожному доданку свій вектор. Оскільки однозначний фізичний сенс мають тільки різниці фаз, а не сама фаза, то звичайно всі фази в рівнянні (15) відраховують від фази струму, вважаючи її нульовою. Крім того, частіше за все амплітуди напруг у рівнянні (15) виражають через амплітуди сили струму I_m . Тоді амплітуда напруги на конденсаторі, з урахуванням (14), буде мати вигляд

$$(U_C)_m = \frac{I_m}{\omega C}, \quad (19)$$

а амплітуда напруги на індуктивності вигляд

$$(U_L)_m = \omega L I_m. \quad (20)$$

Таким чином, рівняння (15) набуває такого векторного вигляду (рис. 5). Ця діаграма обертається навколо точки O з кутовою швидкістю ω проти годинникової стрілки при незмінному взаємному розташуванні всіх векторів. Зауважимо, що діаграма на рис. 5 зображена для випадку $\omega L > \frac{1}{\omega C}$, або $\omega > \frac{1}{\sqrt{LC}}$. На цій діаграмі всі вектори вимірюються в однакових одиницях (у вольтах), тому за допомогою теореми Піфагора з неї легко отримати вирази для амплітудно-частотної характеристики (АЧХ) контуру і для зсуву фаз між струмом і зовнішньою ЕРС (фазочастотної характеристики – ФЧХ)

$$I_m(\omega) = \frac{E_m}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \quad (21)$$

$$\operatorname{tg} \varphi(\omega) = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}. \quad (22)$$

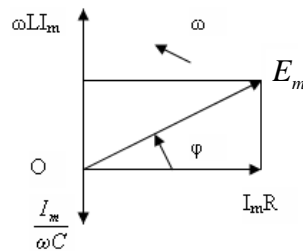


Рис. 5.

Після цього за допомогою векторної діаграми зручно розглядати явище резонансу, яке для послідовного RLC-контуру називається резонансом напруг. Це явище має місце при частоті

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}. \quad (23)$$

При цьому $\varphi = 0$ і напруга на ємності збігається з напругою на індуктивності, а напруга на активному опорі дорівнює зовнішній ЕРС в кожний момент часу.

За допомогою векторної діаграми при цьому можна прослідкувати, як змінюється взаємне розташування всіх векторів при зміні частоти ω зовнішньої ЕРС.

Список використаних джерел

1. Савельев И. В. Курс общей физики. Т. 1. : учеб. пособие для вузов / И. В. Савельев. – М., Наука, 1977. – С. 199.
2. Савельев И. В. Курс общей физики. Т. 2. : учеб. пособие для вузов / И. В. Савельев. – М., Наука, 1978. – С. 258–260.
3. Сивухин Д. В. Общий курс физики. Т. 1. Механика : учеб. пособие для физ. спец. вузов / Д. В. Сивухин. – М., Наука, 1974. – С. 204–205.
4. Сивухин Д. В. Общий курс физики. Т. 3. Электричество : учеб. пособие для физ. спец. вузов / Д. В. Сивухин. – М., Наука, 1977. – С. 557–558, 576–577.
5. Электротехника : учеб. пособие для неэлектротехн. спец. вузов / М. Ю. Анвельт [и др.] ; под ред. В. С. Пантюшина. – М.: Высшая школа, 1976. – С. 81–82.
6. Общая электротехника : учеб. пособие для неэлектротехн. спец. вузов / А. Т. Блажкин [и др.] ; под ред. А. Т. Блажкина. – 4-е изд. перераб. и доп. – Л. : Энергоатомиздат, 1986. – С. 61–63.
7. Будіщев М. С. Електротехніка, електроніка та мікропроцесорна техніка : підруч. для вищ. навч. закладів неелектротехн. спец./ М. С. Будіщев. – Львів: Афіша, 2001. – С. 36–37.

Хохлов В. І.

Метод векторних діаграм в курсах фізики та загальної електротехніки

Звичайно метод векторних діаграм базується на рівнянні гармонічних коливань і на розрахунку похідних цього рівняння за часом. У цій статті запропоновано обґрунтування

метода векторних діаграм, яке базується на кінематичній моделі обертального і коливального рухів. Розглянуто застосування цього методу до електричних коливань у послідовному RLC-контурі.

Ключові слова: векторна діаграма, обертання, гармонічне коливання, амплітуда, частота, фаза, похідна.

Хохлов В. И.

Метод векторных диаграмм в курсах физики и общей электротехники

Обычно метод векторных диаграмм базируется на уравнении гармонических колебаний и на вычислении производных этого уравнения по времени. В данной статье предлагается обоснование метода векторных диаграмм, которое базируется на кинематической модели вращательного и колебательного движений. Рассматривается применение этого метода к электрическим колебаниям в последовательном RLC-контуре.

Ключевые слова: векторная диаграмма, вращение, гармоническое колебание, амплитуда, частота, фаза, производная.

V. Khokhlov

To the Method of Vector Diagrams in Courses of Physics and General Electrical Engineering

Usually the method of vector diagrams is based on equation of harmonic oscillations and on calculation of time derivatives of this equation. In this article the ground of vector diagrams method which is based on kinematic model of rotational and vibrational movements is suggested. The application of this method to electric oscillations in following RLC-circuit is considered.

Key words: vector diagram, rotation, harmonic vibration, amplitude, frequency, phase, derivative.

Стаття надійшла до редакції 30.09.2011 р.