АНАЛИЗ ДИНАМИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ МЕЖОТРАСЛЕВОГО БАЛАНСА МЕТОДОМ ТЕОРИИ ВОЗМУЩЕНИЙ

УДК 518

МАРАСАНОВ Владимир Васильевич
д.т.н., профессор, заведующий кафедрой
Технической кибернетики Херсонского национального технического университета.
Научные интересы: моделирование сложных систем.

Забытовская Оксана Ивановна
ассистент кафедры высшей математики и экономической кибернетики
Херсонского государственного аграрного университета.
Научные интересы: прогнозирование динамических систем, экспертные системы.

Дымова Анна Олеговна
старший преподаватель кафедры Технической кибернетики
Херсонского национального технического университета.
Научные интересы: моделирование процессов и систем, принятие решений
в условиях неопределенности, распознавание образов.

ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМЫ

Одним из эффективных методов исследования экономической динамики как в теоретическом так и в прикладном аспекте являются динамические модели затраты-выпуск (модели межотраслевого баланса). Математические зависимости между величиной капитальных вложений и приростом продукции служат основой построения различных вариантов динамических моделей межотраслевого баланса. Отличительной чертой динамических моделей межотраслевого баланса является выделение производственных капиталовложений (инвестиций) из состава конечной продукции и изучения их влияния на рост объема производства [6]. Изменение внутренних капиталовложений можно рассматривать как возмущение динамической системы.

Цель работы – исследование влияния внутренних инвестиций на величину конечного продукта экономической системы.

ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ

В статистическом балансе капиталовложения отображаются общей величиной в составе конечной продукции. В динамической же схеме произведенный конечный продукт $Y_i(t)$ в i-й отрасли за период t делится на две части: $C_i(t)$ и $K_i(t)$, т.е.

$$Y_i(t) = K_i(t) + C_i(t) \qquad (1)$$

Величина $C_i(t)$ предназначена для личного и общественного потребления, накопления в непроизводственной сфере, на экспорт и т.п. Величина $K_i(t)$ идет на прирост фондов в отраслях, т.е.

$$K_i(t) = \sum_{j=1}^{n} \Delta\varphi_{ij}(t), \qquad (2)$$

где $\Delta\varphi_{ij}(t)$ – количество продукции i-й отрасли, направляемое в текущем периоде в j-ю отрасль в качестве производственных капиталовложений (для увеличения количества производственного оборудования, сооружений и т.п.).

Таким образом, система уравнений производства и распределения продукции за период t в динамическом балансе имеет вид

$$x_i(t)=\sum_{j=1}^{n}x_{ij}(t)+\sum_{j=1}^{n}\Delta\varphi_{ij}(t)+C_i(t),\quad i=\overline{1,n}.$$
$$x_{ij}(t)=a_{ij}(t)x_j(t),\quad i,j=\overline{1,n}, \tag{3}$$

где $a_{ij}(t)$ – коэффициент прямых материальных затрат в период t;

$C_i(t)$ – часть конечного продукта, идущего на потребление.

Прирост продукции j-й отрасли за период t равен

$$\Delta x_j(t)=x_j(t)-x_j(t-1).$$

Примем, что прирост фондов прямо пропорционален приросту продукции, т.е.

$$\Delta\varphi_{ij}(t)=b_{ij}(t)\Delta x_{ij}(t),$$
$$b_{ij}(t)=\frac{\Delta\varphi_{ij}(t)}{\Delta x_j(t)}, \tag{4}$$

где $b_{ij}(t)$ – коэффициент пропорциональности, показывающий сколько продукции i-й отрасли надо вложить в j-ю отрасль, чтобы увеличить выпуск в этой отрасли на единицу (капиталоемкость единицы выпуска продукции j-й отрасли – коэффициент вложений).

Из (3) следует

$$x_i(t)=\sum a_{ij}(t)x_j(t)+\sum b_{ij}(t)\Delta x_j(t)+C_i(t), \tag{5}$$

Так как в непрерывном случае $\frac{d\varphi_{ij}(t)}{dt}=b_{ij}(t)\frac{dx_j(t)}{dt}$, то

$$x_i(t)=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}(t)x_j(t)+\sum_{j=1}^{n}b_{ij}(t)\frac{dx_j(t)}{dt}+C_i(t),\quad i=\overline{1,n} \tag{6}$$

Выражение (6) – динамическая модель В. Леонтьева [6].

Коэффициенты $a_{ij}(t)$ образуют (n×n) – матрицу прямых затрат **A**(t). Коэффициенты $b_{ij}(t)$ образуют (n×n) – матрицу **B**(t) – матрицу внутренних инвестиций.

Введя вектор $\vec{C}(t)$ конечного продукта, идущего на потребление с точностью до структуры потребления в период t $\vec{C}(t)=x(t)\vec{d}(t)$, $\vec{d}(t)$ - вектор, задающий структуру потребления, и вектор трудоемкости продукции $\vec{l}(t)=(l_1(t),l_2(t),\dots,l_n(t))$, $\sum_{j=1}^{n}l_j(t)x_j(t)=L(t)$ - общее количество трудовых ресурсов, задействованных в экономической системе, получим систему (n+1) уравнений

$$\vec{x}(t)=\mathbf{A}(t)\vec{x}(t)+\mathbf{B}(t)\frac{d\vec{x}(t)}{dt}+\vec{x}(t)\vec{d}(t) \tag{7}$$

$$\vec{l}(t)\vec{x}(t)=L(t), \tag{8}$$

где последнее уравнение может выступать в качестве ограничения по трудовым ресурсам.

Представим уравнение (7) в стандартной форме

$$\vec{x}(t)\left[\mathbf{I}-\mathbf{A}(t)-\vec{d}(t)\right]=\mathbf{B}(t)\frac{d\vec{x}(t)}{dt}$$

$\mathbf{B}(t)\frac{d\vec{x}(t)}{dt}=\vec{x}(t)\left[\mathbf{I}-\mathbf{A}(t)-\vec{d}(t)\right]$, считая структуру потребления постоянной и обозначив $\mathbf{A}(t)-\vec{d}(t)=\widetilde{\mathbf{A}}(t)$, получим

$$\frac{d\vec{x}(t)}{dt}=\left[\mathbf{I}-\widetilde{\mathbf{A}}(t)\right]\mathbf{B}^{-1}(t)\vec{x}(t) \tag{9}$$

В модели (9) предполагается, что прирост продукции текущего периода обуславливается вложениями, произведенными в этом же периоде. Хотя в реальных системах материального баланса есть запаздывание инвестиций, амортизация основных производственных фондов.

Решением уравнения (9) будет вектор $\vec{x}(t)$ – значение валового продукта при известных матрицах материальных затрат **A**(t) и матрицах производственных инвестиций **B**(t), которые по смыслу функционирования экономической системы должны быть неотрицательно определенными. Кроме того матрица **A**(t) должна быть неразложимой и продуктивной [4, 6], что эквивалентно одному из следующих требований:

1) максимальное собственное число матрицы **A**(t) λ(A) < 1;

2) матрица $(\mathbf{I}-\mathbf{A}(t))^{-1}$ - положительно определена;

3) матричный ряд $\sum_{i=0}^{\infty}A^i(t)$ сходится;

4)

$$\sum_{i=0}^{\infty}A^i(t)=(\mathbf{I}-\mathbf{A}(t))^{-1} \tag{10}$$

Как показано в [5, 6] плавное изменение элементов матриц **A** и **B** может привести к нарушению их продуктивности, неразложимости и положительной определенности, что приведет к качественным изменениям решений уравнений материального баланса и к неустойчивому функционированию экономической системы. Поэтому роль вырожденной критической точки будут играть вырожденные собственные значения матриц **A**(t) и **B**(t) [1, 5].

Пусть указанные матрицы удовлетворяют условию

$$\left|a_{ij}\right| < 1, \quad \left|b_{ij}\right| < 1 \tag{11}$$

и изменилось условие внутренних инвестиций.

Пусть λ_1 простое собственное значение матрицы **A** при некотором t. Найдем соответствующее собственное значение

$$(\mathbf{A} + \varepsilon\mathbf{B}) \tag{12}$$

Характеристическое уравнение матрицы **A**

$$\det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \lambda^n + C_{n-1}\lambda^{n-1} + \\ + C_{n-2}\lambda^{n-2} + \ldots + C_0 = 0 \tag{13}$$

Тогда характеристическое уравнение (12) будет

$$\det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A} - \varepsilon\mathbf{B}) = \lambda^n + C_{n-1}(\varepsilon)\lambda^{n-1} + \\ + C_{n-2}(\varepsilon)\lambda^{n-2} + \ldots + C_0(\varepsilon) = 0 \tag{14}$$

где $C_r(\varepsilon)$ – полиномы степени (n–r) такие, что

$$C_r(0) = C_r\,. \tag{15}$$

Это становится очевидным (согласно теории алгебраических функций), если запишем точное выражение для $\det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A} - \varepsilon\mathbf{B})$ [1, 2]. Можно наложить [4]:

$$C_r(\varepsilon) = C_r + C_{r1}\varepsilon + C_{r2}\varepsilon^2 + \ldots + C_{r,n-r}\varepsilon^{n-r} \tag{16}$$

Рассмотрим случай, когда λ_1 простой корень (13), то для $|\varepsilon| < 1$ существует простой корень (14), который дается сходящимся степенным рядам

$$\lambda_1(\varepsilon) = \lambda_1 + k_1\varepsilon + k_2\varepsilon^2 + \ldots \tag{17}$$

Очевидно, что $\lambda_1(\varepsilon) \to \lambda_1$ при $\varepsilon \to 0$.

Возмущение элементов матрицы $\boldsymbol{\varepsilon}$ определяет возмущение собственного значения λ_1 характеристического полинома матрицы **A**, что вследствие непрерывной зависимости изменений коэффициентов характеристического полинома от изменений элементов матрицы **A**, в свою очередь, приведет к изменению собственного вектора x_1 матрицы **A**, а оно приведет к изменению направления и величины движения экономической системы. Так как λ_1 – простое собственное значение, $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})$, то, на основе теории линейных уравнений [3], в качестве компонент собственного вектора x можно взять

$$\left(A_{n1}, A_{n2}, \ldots, A_{nn}\right), \tag{18}$$

где A_{n1} – алгебраическое дополнение (n, i)-го элемента $(\mathbf{A} - \lambda_1\,\mathbf{I})$, и, следовательно, A_{ni} – это полиномы по λ_1 степени не выше (n – 1).

Применим этот результат к простому собственному значению $\lambda_1(\varepsilon)$ матрицы $(\mathbf{A} + \varepsilon\mathbf{B})$. Введем обозначение: $\mathbf{x_1}$ – собственный вектор матрицы **A**; $\mathbf{x_1}(\boldsymbol{\varepsilon})$ – собственный вектор матрицы $(\mathbf{A} + \varepsilon\mathbf{B})$. Тогда элементы вектора $\mathbf{x_1}(\boldsymbol{\varepsilon})$ – это полиномы по $\lambda_1(\varepsilon)$ и ε, и так как степенной ряд для $\lambda_1(\varepsilon)$ сходится при заданных ε, то каждый элемент $x_1(\varepsilon)$ представим сходящимся степенным рядом по ε, постоянный член в котором – это соответствующий элемент вектора x_1. Отсюда

$$x_1(\varepsilon) = x_1 + \varepsilon z_1 + \varepsilon^2 z_2 + \ldots \tag{19}$$

где каждая компонента векторного ряда (19) в правой части – сходящийся степенной ряд по ε.

Аналогично результату (17) для собственного значения, получает результат для собственного вектора.

Рассмотрим более сложный случай: матрица **A** имеет элементарные делители. В этом случае существует система правых и левых собственных векторов $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ и $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \ldots, \mathbf{y}_n$ таких, что

$$\mathbf{y}_i^T\mathbf{x}_j = 0 \quad (i \neq j)\,, \tag{20}$$

Хотя эти векторы единственны, если все собственные значения простые [1, 2, 3].

Выразим каждый вектор $\mathbf{z}_i$ в (19) через $\mathbf{x}_j$ в виде

$$\mathbf{z}_i = \sum_{j=1}^{n} S_{ij}\mathbf{x}_j\,, \tag{21}$$

Тогда имеем

$$\mathbf{x}_1(\varepsilon) = \mathbf{x}_1 + \varepsilon\sum_{j=1}^{n} S_{j1}\mathbf{x}_j + \varepsilon^2\sum_{j=1}^{n} S_{j2}\mathbf{x}_j + \ldots \tag{22}$$

и, собирая вместе члены с $\mathbf{x}_j$, получим

$$\mathbf{x}_1(\varepsilon) = (1 + \varepsilon\,S_{11} + \varepsilon^2\,S_{12} + \ldots)\mathbf{x}_1 + \\ +(\varepsilon\,S_{21} + \varepsilon^2\,S_{22} + \ldots)\mathbf{x}_2 + \ldots + (\varepsilon\,S_{n1} + \varepsilon^2\,S_{n2} + \ldots)\mathbf{x}_n \tag{23}$$

Сходимость n степенных рядов, стоящих в скобках, есть простое следствие абсолютной сходимости рядов (19).

Получим точное значение выражения для возмущения первого порядка в терминах правых и левых собственных векторов (20). Обозначим

$$S_i = \mathbf{y}_i^T\mathbf{x}_j,\ i = \overline{1,n} \tag{24}$$

где $\mathbf{y}_j$ и $\mathbf{x}_j$ – нормированные левые и правые собственные векторы.

Если $\mathbf{y}_j$ и $\mathbf{x}_j$ вещественные, то S_i есть косинус угла между этими векторами [2, 3]. В любом случае $|S_i| = |\mathbf{y}_i^T \mathbf{x}_j| \le \|\mathbf{y}_i\|_2 \cdot \|\mathbf{x}_j\|_2 = 1$, где $\|\mathbf{y}_i\|_2, \|\mathbf{x}_j\|_2$ - эвклидовы нормы векторов.

Для нормированных векторов формула (23) будет иметь вид:

$$\mathbf{x}_1(\varepsilon) = \mathbf{x}_1 + (\varepsilon\, t_{21} + \varepsilon^2\, t_{22} + \ldots)\mathbf{x}_2 + \\ + \ldots + (\varepsilon\, t_{n1} + \varepsilon^2\, t_{n2} + \ldots)\mathbf{x}_n\,. \tag{25}$$

Определим величину

$$\beta_{ij} = \mathbf{y}_i^T \mathbf{B} \mathbf{x}_j \tag{26}$$

$$|\beta_{ij}| = |\mathbf{y}_i^T \mathbf{B} \mathbf{x}_j| \le \|\mathbf{B}\|_2 \|\mathbf{y}_i\|_2 \|\mathbf{x}_j\|_2 \tag{27}$$

По определению

$$(\mathbf{A} + \varepsilon \mathbf{B})\, \mathbf{x}_1(\varepsilon) = \lambda_1(\varepsilon)\mathbf{x}_1(\varepsilon) \tag{28}$$

и так как $\lambda_1(\varepsilon)$ и все компоненты вектора $\mathbf{x}_1(\varepsilon)$ представляются сходящимися степенными рядами, можно приравнять члены при одинаковых степенях ε в этом уравнении и используя (17) и (27), получим

$$\mathbf{A}\left(\sum_{i=2}^{n} t_{i1}\mathbf{x}_i\right) + \mathbf{B}\mathbf{x}_1 = \lambda_1\left(\sum_{i=2}^{n} t_{i1}\mathbf{x}_i\right) + k_1\mathbf{x}_1 \tag{29}$$

или

$$\sum_{i=2}^{n} (\lambda_i - \lambda_1) t_{i1}\mathbf{x}_i + \mathbf{B}\mathbf{x}_1 = k_1\mathbf{x}_1 \tag{30}$$

Умножая слева на $\mathbf{Y}_1^T$ и с учетом, что $\mathbf{Y}_1^T \mathbf{x}_i = 0 \quad (i \ne 1)$, получим

$$k_1 = \frac{\mathbf{Y}_1^T \mathbf{B} \mathbf{x}_1}{\mathbf{Y}_1^T \mathbf{x}_1} = \frac{\beta_{11}}{S_1} \tag{31}$$

и, следовательно,

$$|k_1| \le \frac{n}{|S_1|} \tag{32}$$

Умножая (30) слева на $\mathbf{Y}_i^T$, получим

$$(\lambda_i - \lambda_1) t_{i1} S_i + \beta_{i1} = 0 \quad (i = 2, 3, \ldots, n) \tag{33}$$

и, следовательно, из (25) следует, что член первого порядка в возмущении x_1 имеет вид

$$\varepsilon \begin{bmatrix} \dfrac{\beta_{21}x_2}{(\lambda_1 - \lambda_2)S_2} + \dfrac{\beta_{31}x_2}{(\lambda_1 - \lambda_3)S_3} + \\ + \ldots + \dfrac{\beta_{n1}x_n}{(\lambda_1 - \lambda_n)S_n} \end{bmatrix} = \varepsilon \sum_{i=2}^{n} \frac{\beta_{i1}}{S_i(\lambda_1 - \lambda_i)} x_i \tag{34}$$

Рассматривая собственные векторы, мы раскладываем их возмущения на компоненты в направлениях $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$. Когда $\mathbf{x}_i$ ортогональны, (это имеет место когда имеем n элементарных делителей), то можно оценить отклонения экономической системы при заданных возмущениях ε. В качестве ε можно взять коэффициенты инфляции. При больших значениях косинуса угла между векторами $\mathbf{x}_i^T(\varepsilon), \mathbf{x}_i$ составляющие векторов практически совпадают и система устойчива к возмущениям. Случай кратных собственных значений и нелинейных делителей матриц **A** и **B** может быть исследован с переходом к каноническим формам Жордана и использованием теорем Гершгорина [1, 2, 4].

ВЫВОДЫ:

1. При простом собственном значении матрицы материальных затрат **A** исследование влияния возмущений на матрицы внутренних инвестиций **B** и материальных затрат **A** может быть сведено к нахождению косинуса угла между векторами $\mathbf{x}_1$ и $\mathbf{x}_1(\varepsilon)$.

2. При наличии n элементарных делителей матрицы **A** исследование влияния возмущения ε может быть сведено к нахождению косинусов углов между собственными векторами, соответствующих различным собственным значениям. Малые значения косинусов между $\mathbf{x}_i(\varepsilon)$ и $\mathbf{x}_i$ будет означать значительный дрейф экономической системы под действием инфляции.

3. Случай кратных собственных значений и нелинейных делителей требует более сложного исследования с привлечением кроме теории возмущений и алгебраических функций математического аппарата канонических форм Жордана [1].

ЛИТЕРАТУРА:

1. Арнольд В.И. О матрицах, зависящих от параметров //Успехи математических наук. — 1971. — Т.XXVI, Вып. 2 (158). — С.101-114.
2. Б.Л. ван дер Варден. Алгебра. – М.: Наука, 1976.
3. Ф.Р. Гантмакер. Теория матриц. – М.: Наука, 1988.
4. П. Ланкастер. Теория матриц. – М.: Наука, 1978.
5. Р. Гилмор. Прикладная теория катастроф. Т. 1. – М.: Мир, 1984.
6. Основы теории оптимального управления /Под ред. Кротова В.Ф. – М.: Мир, 1984.