

МУЛЬТИФРАКТАЛЬНИЙ АНАЛІЗ І МОДЕЛЮВАННЯ ТРАФІКА В ІНФОРМАЦІЙНИХ ТЕЛЕКОМУНІКАЦІЙНИХ МЕРЕЖАХ

УДК 621.72:004.724.4

БУДКОВА Людмила Валеріївна

аспірантка кафедри безпеки інформації та телекомунікацій ДВНЗ «Національний гірничий університет».

Наукові інтереси: аналіз та моделювання мережного трафіку.

e-mail: budkovalv@i.ua

КОРНІЄНКО Валерій Іванович

д.т.н., доцент, професор кафедри безпеки інформації та телекомунікацій ДВНЗ «Національний гірничий університет».

Наукові інтереси: методи та засоби ідентифікації, прогнозування і керування складними нелінійними системами.

e-mail: vikor7@ukr.net

ВСТУП

Постійне збільшення обсягу трафіку в інформаційних телекомунікаційних мережах (ІТМ) породжує необхідність його ідентифікації та прогнозування для попередження перевантажень в мережі і уникнення погіршення якості послуг.

ПОСТАНОВКА ЗАВДАННЯ

Трафік, що виникає в сучасних ІТМ, є нелінійним, стохастичним та, в більшості випадків, самоподібним (фрактальним) процесом [1].

Подальший розвиток телекомунікаційних мереж пов'язаний з їх плануванням, що дозволяє визначити необхідні мережеві ресурси та забезпечити задану комутаційну ємність. Проектування засобів телекомунікацій, заснованих на статистичних даних та необхідному математичному апараті з використанням прогнозування, дозволяє збалансувати навантаження на маршрутизатори, комутатори і канали зв'язку та, таким чином, підвищити надійність й ефективність мережі.

Оцінка характеристик мережевого трафіку необхідна не тільки для класифікації породжуючих процесів, але і для побудови його адекватної імітаційної моделі,

що дозволяє забезпечити якість обслуговування в ІТМ.

Встановлено [2-3], що агрегований трафік від різних джерел на малих часових масштабах проявляє мультифрактальний характер, тобто має гнучкий закон масштабування.

Припустимо, що процес займає обмежену область розмірністю d у евклідовому просторі і є множиною точок $N \rightarrow \infty$, розташованих в цій області [4]. Тоді розбивши її на кубічні осередки об'ємом ε^d і відібравши осередки, що містять хоч одну точку, отримаємо загальну кількість зайнятих осередків $N(\varepsilon)$, номер яких змінюється на інтервалі $i \in [1, N(\varepsilon)]$. При цьому узагальнена статистична сума (часткова функція), визначається як

$$Z(q, \varepsilon) = \sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} p_i^q(\varepsilon), \quad (1)$$

де p_i – вірогідність заселення осередків

$p_i(\varepsilon) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{n_i(\varepsilon)}{N}$, $n_i(\varepsilon)$ – кількість точок в i -ому осередку, q – коефіцієнт ($q \in \mathbb{R}$).

Залежність узагальненої статистичної функції від сторони осередку описується як

$$Z(q, \varepsilon) \approx \varepsilon^{-\tau_q}, \quad (2)$$

де τ_q – скейлінгова експонента (масштабна функція), що визначається як

$$\tau_q = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln Z(q, \varepsilon)}{\ln \varepsilon}, \quad (3)$$

$$\tau_q = (q-1)D_q, \quad (4)$$

де D_q – спектр узагальнених фрактальних розмірностей Рені, який характеризує розподіл точок в деякій області і показує наскільки неоднорідною є досліджувана множина точок.

Якщо D_q залежить від q , то даною множиною точок є мультифрактал (неоднорідна фрактальна множина) з нелінійною функцією τ_q .

Для характеристики мультифракталів також використовують функцію мультифрактального спектру (спектр сингулярностей) $f(\alpha)$.

Якщо $\alpha = 1/t$, то початкові моменти процесу, якому притаманна властивість самоподоби, можна визначити як

$$\begin{aligned} M\left[|x(t)|^q\right] &= M\left[|t^H x(t)|^q\right] = \\ &= t^{qH} M\left[|x(1)|^q\right] = c(q) \cdot t^{qH}, \end{aligned} \quad (5)$$

де $c(q)$ – коефіцієнт моменту, $c(q) = M\left[|x(1)|^q\right]$, M – математичне очікування; x – процес; t – час, H – показник Херста.

Мультифрактальний процес має стаціонарні прирости і задовольняє умові

$$M\left[|x(t)|^q\right] = c(q) \cdot t^{qh(q)} = c(q) \cdot t^{\tau(q)+1}, \quad (6)$$

де $h(q)$ – узагальнений показник Херста (показник Гельдера) [4]. У разі монофрактальних процесів $h(q) = H$.

Виявити мультифрактальну особливість мережевого трафіку можна шляхом розрахунку масштабної функції $\tau(q)$ і моментного коефіцієнта $c(q)$.

Мета статті. Аналіз мультифрактальних властивостей трафіку в інформаційних телекомунікаційних мережах та дослідження його мультифрактальних моделей.

ОСНОВНА ЧАСТИНА.

МУЛЬТИФРАКТАЛЬНІ МОДЕЛІ

Вони ґрунтуються на використанні

мультиплікативних каскадів, що застосовують ітеративну процедуру.

Спочатку одиничний інтервал ділиться на два рівні підінтервали, вагові коефіцієнти яких r_1 і $r_2 = 1 - r_1$ відповідно. Для кожного підінтервалу процедура повторюється. Вагові коефіцієнти є незалежними, випадковими і однаково розподіленими величинами $R \in [0,1]$ з функцією розподілу вірогідності $F_R(x)$, $M[R] = 1/2$. На k -ому кроці ітеративної процедури міра $\mu(\Delta t_k)$ підінтервалу довжини $\Delta t_k = 2^{-k}$ задовольняє співвідношенню масштабування:

$$M[\mu(\Delta t_k)^q] = (M[R^q])^k = \Delta t_k^{-\log M[R^q]}, \quad (7)$$

яке визначає мультифрактальний процес з функцією масштабування:

$$\tau_0(q) = -\log_2 M[R^q]. \quad (8)$$

Завдання каскадного моделювання полягає в знаходженні розподілу вірогідності для множників R такого, щоб виконувалась рівність (8) [3].

Не менш поширеними є мультифрактальні вейвлет моделі (МВМ), що дозволяють моделювати позитивні часові ряди заданої довжини [5]. В основі їх функціонування лежить метод вейвлет перетворення, а часовий ряд представляється у вигляді:

$$x(t) = \sum_k U_{J_0,k} \phi_{J_0,k}(t) + \sum_{j=J_0}^{\infty} \sum_k W_{j,k} \psi_{j,k}(t), \quad (9)$$

де $\psi_{j,k}(t) = 2^{j/2} \psi(2^j t - k)$, $\phi_{j,k}(t) = 2^{j/2} \phi(2^j t - k)$ – вейвлет та відповідна йому масштабуюча функція; $W_{j,k} = \int x(t) \psi_{j,k}(t) dt$ – деталізуючі коефіцієнти; $U_{j,k} = \int x(t) \phi_{j,k}(t) dt$ – апроксимуючі (скейлінг) коефіцієнти; j – кількість рівнів вейвлет-розкладання; $j = J_0$ – найменша роздільна здатність; k показує просторове розташування аналізу.

Враховуючи, що на практиці часто розглядається дискретний сигнал $x^{(n)}(k)$ з кінцевою тривалістю, що апроксимує сигнал $x(t)$ з роздільною здатністю 2^{-n} , то напівнескінченну суму в (9) необхідно замінити на суму з кінцевим числом масштабів, тобто $0 \leq j < n$ [5].

В якості материнського вейвлета використовується вейвлет Хаара, який є простим орто-

нормованим вейвлет базисом, для якого апроксимуючі і вейвлет коефіцієнти відповідно можуть бути рекурсивно обчислені як

$$\begin{aligned} U_{j-1,k} &= 2^{-1/2}(U_{j,2k} + U_{j,2k+1}), \\ W_{j-1,k} &= 2^{-1/2}(U_{j,2k} - U_{j,2k+1}), \\ W_{j,k} &= A_{j,k}U_{j,k}, \end{aligned} \quad (10)$$

де $A_{j,k}$ – незалежні, випадкові, симетричні відносно нуля змінні $A_{j,k} \in [-1,1]$. Для простоти і гнучкості генерування множників $A_{j,k}$ використовується симетричний бета-розподіл $\beta(p, p)$ та симетричний розподіл точечних мас [5].

Тоді отримаємо

$$\begin{aligned} U_{j,2k} &= 2^{-1/2}(1 + A_{j+1,k})U_{j-1,k}, \\ U_{j,2k+1} &= 2^{-1/2}(1 - A_{j+1,k})U_{j-1,k}. \end{aligned} \quad (11)$$

Скейлінг-коефіцієнти, обчислені при найдетальнішій роздільній здатності, є вихідними значеннями процесу, тобто

$$x^{(n)}[k] = 2^{-n/2}U_{n,k}, \quad k = 0, \dots, 2^n - 1. \quad (12)$$

Мультифрактальні моделі забезпечують гнучкіший закон масштабної поведінки [3] і вдало відтворюють трафік, агрегований від декількох джерел, що істотно відрізняються; аналітично прості. Проте вони оцінюють тільки верхню огинаючу мультифрактального спектру, що може призводити до помилкових результатів.

МУЛЬТИФРАКТАЛЬНИЙ АНАЛІЗ ДЕТРЕНДОВИХ ФЛУКТУАЦІЙ (АДФ)

Для аналізу властивостей самоподоби і довготривалої залежності нестационарних часових рядів застосовують метод АДФ [6], який є різновидом дисперсійного аналізу. Цей метод застосовується для визначення масштабної поведінки часового ряду у присутності можливих трендів без знання їх походження і форми [7].

Інтегрований часовий ряд визначається як

$$y(k) = \sum_{i=1}^k (x(i) - \bar{x}), \quad k = 1, \dots, N, \quad (13)$$

де $x(i)$ – часовий ряд, N – довжина ряду, \bar{x} – середнє значення ряду.

Ряд $y(k)$ розбивається на m підпослідовностей довжини n ($nm = N$), для кожної з якої методом

найменших квадратів обчислюється локальний тренд $y_n(k)$ – рівняння прямої, апроксимуючої послідовність $y(k)$. Середньоквадратична похибка такої апроксимації визначається як

$$F(n) = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N [y(k) - y_n(k)]^2}. \quad (14)$$

Відповідні розрахунки повторюються для відрізків різної довжини. Про наявність самоподоби свідчить ступеневий характер залежності $F(n) \sim n^\alpha$ і лінійний характер в подвійному логарифмічному масштабі $\log F(\log n)$. При цьому показник скейлінга α визначається як кут нахилу прямої, що апроксимує графік $\log F(\log n)$. Залежно від значення даного показника можна класифікувати часовий ряд. Так, для випадкового процесу (некорельована поведінка) $\alpha = 0,5$; $0 < \alpha < 0,5$ відповідає антиперсистентному ряду; $0,5 < \alpha < 1$ визначає персистентні довготривалі кореляції; $\alpha = 1$ характерне для 1/f-шуму. При $\alpha > 1$ кореляції існують, проте ступеневу залежність вони не відображають; $\alpha = 1,5$ характерне для броунівського шуму.

При мультифрактальному АДФ обчислюється кумулятивний ряд $y(k)$ згідно (13), який потім розділяється на $N_s = N/s$ непересічних відрізків довжини s . Проте оскільки довжина ряду N не завжди кратна шкалі s , то для обліку останнього відрізка, число елементів якого менше s , процедура розподілу повторюється, починаючи з протилежного кінця ряду. Таким чином, отримуємо $2N_s$ відрізків $v=1, \dots, N_s, N_s+1, \dots, 2N_s$ завдовжки s . При реалізації даного алгоритму прийнято обмежувати довжину сегментів s , $10 < s < N/4$.

Методом найменших квадратів для кожного з $2N_s$ сегментів визначається локальний тренд $y_v(k)$ та обчислюється дисперсія для кожного сегменту $v = 1, \dots, N_s$:

$$F^2(v, s) = \frac{1}{s} \sum_{k=1}^s \{y[(v-1)s+k] - y_v(k)\}^2, \quad (15)$$

і для кожного $v = N_s + 1, \dots, 2N_s$:

$$F^2(v, s) = \frac{1}{s} \sum_{k=1}^s \{y[N - (v - N_s)s + k] - y_v(k)\}^2. \quad (16)$$

Функції флуктуацій q -го порядку визначається усередненням дисперсій (15), (16):

$$F_q(s) = \left\{ \frac{1}{2N_s} \sum_{v=1}^{2N_s} [F^2(v,s)]^{q/2} \right\}^{1/q} \quad (17)$$

При $q = 0$ замість (17) використовується вираз

$$F_0(s) = \exp \left\{ \frac{1}{4N_s} \sum_{v=1}^{2N_s} \ln [F^2(v,s)] \right\}. \quad (18)$$

Якщо залежність $F_q(s)$ від s у подвійному логарифмічному масштабі при фіксованому значенні q описується прямою лінією на графіку і має ступеневий характер

$$F_q(s) \sim s^{h(q)}, \quad (19)$$

то даний часовий ряд зводиться до самоподібної множини, що проявляє довготривалі кореляції.

З виразів (17), (19) випливає, що при $q = 2$ узагальнений показник Херста $h(q) = H$. Для монофрактальних часових рядів узагальнений показник Херста не залежить від q , а флуктуаційна функція $F^2(v,s)$ однакова для всіх відрізків v .

Для мультифрактальних рядів $h(q)$ – нелінійна функція. При позитивних значеннях q основний внесок у функцію $F_q(s)$ дають сегменти з великими відхиленнями $F^2(v,s)$, а при негативних – з малими. Таким чином, при негативних значеннях q узагальнений показник Херста $h(q)$ описує поведінку сегментів, що проявляють малі флуктуації, а при позитивних – великі.

МЕТОД МАКСИМУМІВ МОДУЛІВ ВЕЙВЛЕТ-ПЕРЕТВОРЕННЯ (ММВП)

Даний метод знайшов широке застосування при аналізі мультифрактальних властивостей нестационарних процесів. Він зводиться до виконання двох етапів. На першому етапі обчислюється вейвлет перетворення часового ряду $x(i)$ довжини N

$$W(n,s) = \frac{1}{s} \sum_{i=1}^N x(i) \psi \left[\frac{i-n}{s} \right], \quad (20)$$

де s – параметр масштабу, n – момент часу (параметр зсуву), $\psi(x)$ – вейвлет, за допомогою якого виключаються з часового ряду тренди, які можуть бути апроксимовані многочленами до $(m-1)$ -го порядку включно [8].

За наявності локальної сингулярності в даних

вейвлет коефіцієнти визначаються відповідно до ступеневого закону

$$W(n_0,s) \sim s^{h(n_0)}. \quad (21)$$

Узагальнений показник Херста $h(n_0)$ можна визначити, побудувавши графік залежності $W(n_0,s)$ від s у подвійному логарифмічному масштабі і обчисливши нахил прямої. Однією з особливостей даного методу є те, що $h(n_0)$ не залежить від вибору вейвлета ψ .

Другий етап полягає в обчисленні часткової функції

$$Z(q,s) = \sum_{i=1}^{i_{\max}} |W(n_i,s)|^q. \quad (22)$$

При $s \rightarrow 0$ часткова функція описується ступеневим законом виду [9]

$$Z(q,s) \sim s^{\tau(q)}. \quad (23)$$

Оскільки в методі ММВП розглядаються нерегулярні сигнали, то замість спектру сингулярностей $f(\alpha)$ використовується аналогічна функція $D(h)$ [10], для чого застосовується перетворення Лежандра

$$\begin{cases} h = d\tau / dq; \\ D(h) = qh - \tau(q). \end{cases} \quad (24)$$

Для монофрактальних об'єктів залежність $\tau(q)$ є лінійною, а для мультифрактальних – нелінійною з великим числом узагальнених показників Херста $h(q) \neq \text{const}$.

АНАЛІЗ ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНИХ ДАНИХ ТА МОДЕЛЮВАННЯ

Для аналізу та моделювання використовувались експериментальні сигнали трафіку автоматичної телефонної станції на базі системи комутації EWSD (сигнал 1) та трафіку, що передавався через мережу Інтернет (сигнал 2) [11].

Система EWSD надає абонентам розширений набір послуг зв'язку: інтегральне обслуговування, обмін даними і обмін голосовою інформацією, крім того вона є зоною. Час агрегації (дискретизації) для сигналу 1 складає 1 год.

Дані реалізації трафіку мережі Інтернет представляють собою залежність розміру Ethernet кадрів в байтах від часу. Для того, щоб привести початкові дані до еквідистантної шкали по часовій осі була проведена процедура агрегації з кроком в 5 с.

Для моделювання мережевого трафіку використовувались мультифрактальні вейвлет моделі двох типів: МВМ з бета-розподілом та гібридна МВМ, в якій бета розподіл використовується на грубих масштабах, а розподіл точечних мас – на точних масштабах.

Результати оцінки характеристик (відповідно до методики [12]) та моделювання сигналів трафіку наведені на рис. 1-3 та в табл. 1.

За видом автокореляційних функцій (АКФ) (рис. 1, а, б), спектрів (рис. 2, а, б) та дисперсій (рис. 3, а, б) експериментальних сигналів можна сказати про самоподобу їх породжуючих процесів, оскільки АКФ мають довготривалі кореляції, енергія спектрів спадає по ступеневому закону, а дисперсії поволі убувають. (На

графіках АКФ наведені їх апроксимації у вигляді поволі (ПУЗ) та швидко (ШУЗ) убуваючих залежностей).

Моделювання сигналів трафіку мультифрактальними вейвлет моделями підтверджує їх якісні оцінки (рис. 1, в, г, рис. 2, в, г, рис. 3, в, г). Крім того, статистична перевірка за непараметричним критерієм знаків дозволила встановити адекватність експериментальних і модельних сигналів з рівнем значущості 0,01.

Розрахунки дозволили визначити (табл. 1), що експериментальні і модельні сигнали 1 і 2 підпорядковуються субекспоненційним законам розподілу з показниками «важкості хвоста» [5,3; 5,7] і [1,2; 1,5] відповідно (гіпотези про тотожність розподілу значень сигналів приймалися з вірогідністю 95 %).

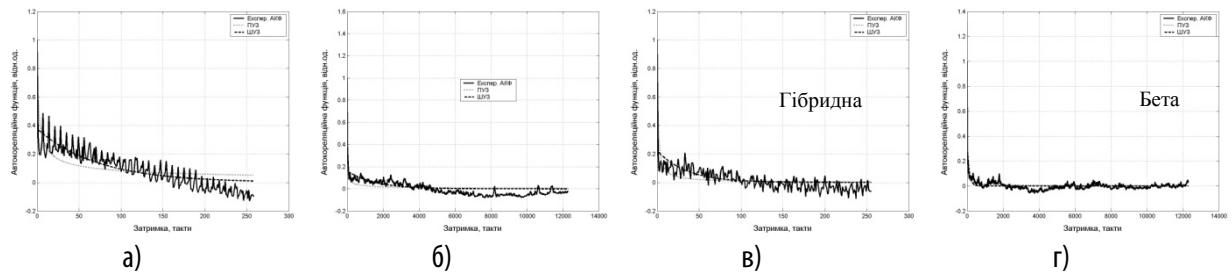


Рисунок 1 – АКФ експериментальних сигналів 1 (а) і 2 (б) та модельних сигналів 1 (в) і 2 (г)

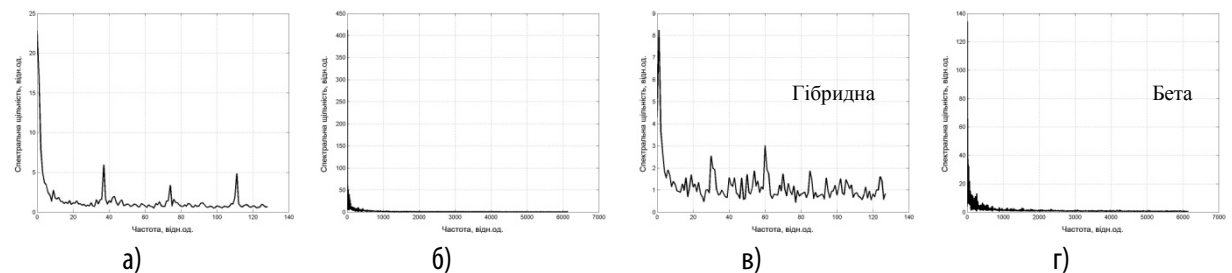


Рисунок 2 – Спектри експериментальних сигналів 1 (а) і 2 (б) та модельних сигналів 1 (в) і 2 (г)

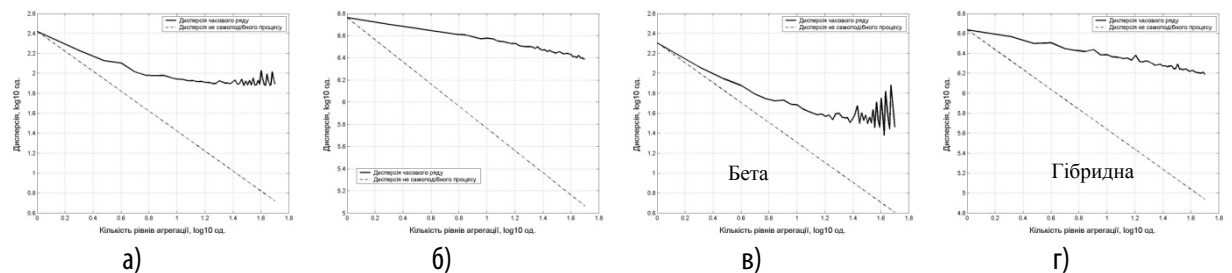


Рисунок 3 – Дисперсії експериментальних сигналів 1 (а) і 2 (б) та модельних сигналів 1 (в) і 2 (г)

Таблиця 1 –

Характеристики сигналів

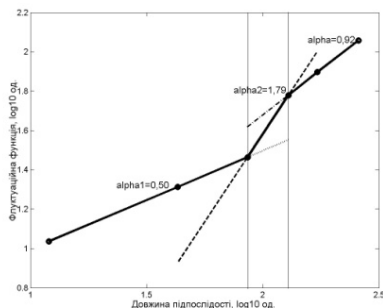
Показник	Сигнал 1			Сигнал 2		
	Експериментальний	Бета МВМ	Гібридна МВМ	Експериментальний	Бета МВМ	Гібридна МВМ
АКФ	Поволі убуваюча залежність					
Спектр	Ступеневий закон із сплесками			Ступеневий закон		
Вейвлет-перетворення	Деревоподібна структура скейлтона					
Дисперсія	Поволі убуваюча					
Закон розподілу за критерієм: Колмогорова Пірсона	Логнормальний Логнормальний		Гамма-розподіл Нормальний	Парето Парето		Парето Логнормальний
Показник «важкості хвоста»	~5,4	~5,7	~5,3	~1,4	~1,5	~1,2
BDS-тест	Хаотичний нелінійний процес		Стохастичний нелінійний процес	Хаотичний нелінійний процес		
Показник Херста - періодограмний метод	0,923	0,891	0,936	0,980	0,940	0,884
- метод агрегованої дисперсії	0,904	0,843	0,842	0,888	0,843	0,869
- R/S аналіз	0,814	0,910	0,776	0,913	0,858	0,877
Кореляційна розмірність	3,584	3,710	3,898	2,956	2,978	2,864
Кореляційна ентропія	0,954	0,898	0,827	0,640	0,742	0,857
Інтервал прогнозування	1,694	1,800	1,954	2,525	2,178	1,886
Розмірність атратора	$4 \leq d \leq 6$	$4 \leq d \leq 6$	$4 \leq d \leq 6$	$2 \leq d \leq 4$	$2 \leq d \leq 5$	$2 \leq d \leq 5$

В цілому, згідно результатам BDS-теста [12] сигнали породжуються хаотичними нелінійними процесами з показниками Херста [0,814; 0,923] і [0,888; 0,980]. Тобто, це персистентні ряди з довготривалою кореляцією.

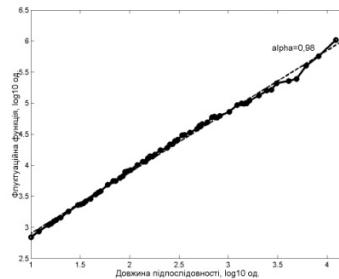
Значення кореляційних ентропій і розмірностей атракторів експериментальних сигналів наведені в табл. 1, при цьому інтервали точної передбачуваності (глибина точного прогнозу) склали $T_{C_1} = 1,694$ і

$T_{C_2} = 2,697$ тактів дискретизації.

Числові значення характеристик модельних сигналів в цілому відповідають характеристикам експериментальних сигналів, при цьому бета МВМ мають меншу похибку визначення характеристик, ніж гібридні МВМ.



а)



б)

Рисунок 4 – Флуктуаційні функції експериментальних сигналів 1 (а) і 2 (б) за АДФ

Проведений аналіз детрендових флуктуацій дозволив отримати наступні результати. Поведінка сигналу 1 (рис. 4, а) на інтервалі від 10 до 86 тактів некорельована, оскільки показник скейлінга $\alpha_1 = 0,5$. Проміжку часу від 87 до 129 тактів відповідає $\alpha_2 = 1,79 > 1$, що свідчить про кореляції, проте ступеневу залежність вони не мають. На інтервалі більше 129 тактів показник приймає значення $0,5 < \alpha = 0,92 < 1$, що властиве для персистентних процесів, які мають тренд. Для сигналу 2 значення $\alpha = 0,98$ близьке до 1 (рис. 4, б), що властиво для 1/f-шума (фліккер-шума), для якого енергія спектра

зворотньопропорційна частоті.

Слід відмітити, що для експериментальних сигналів отримані значення показника скейлінга α співпадають зі значеннями показника Херста (табл. 1), отриманими періодограмним методом.

Результати мультифрактального АДФ наведені на рис. 5. При обмеженні значень порядку $-5 \leq q \leq 5$ на масштабах $s < 2^5 = 32$ (для сигналу 1) та $s < 2^5 = 32$ (для сигналу 2) трафіки можна розглядати як монофрактальний процес.

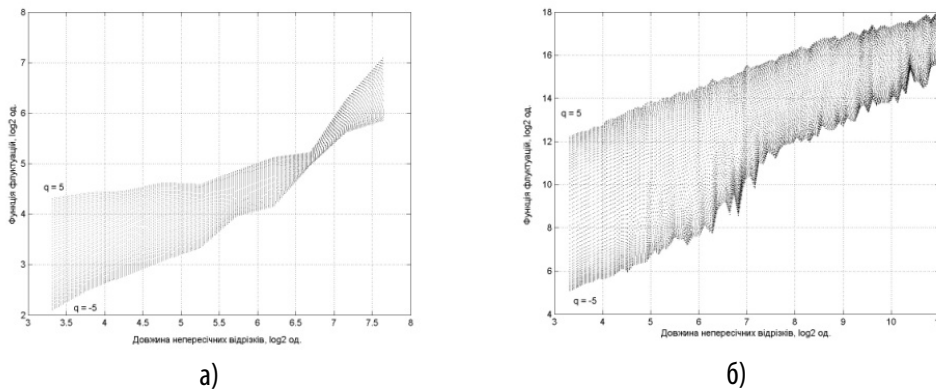


Рисунок 5 – Флуктуаційні функції експериментальних сигналів 1 (а) і 2 (б) за мультифрактальним АДФ

В результаті проведеного дослідження сигналів з використанням ММВП були отримані наступні результати. Графіки часткових функцій $Z(q, s)$ (рис. 6) пока-

зують, що при варіації значення їх порядку $-5 < q < 5$ на масштабі $s \leq 2^3 = 8$ експериментальні сигнали виявляють монофрактальні властивості.

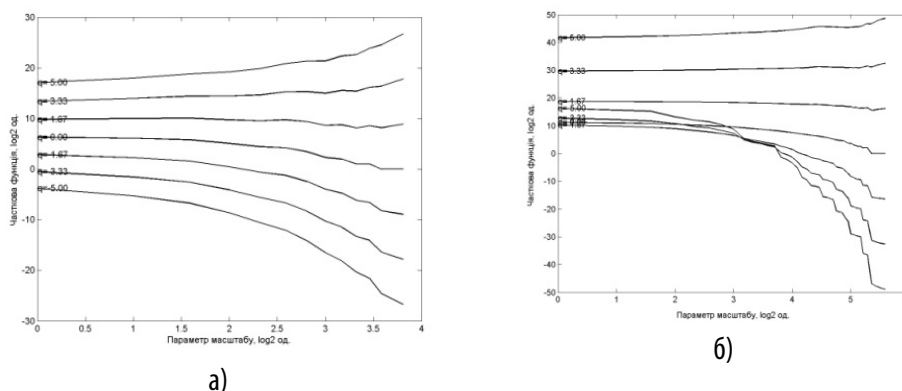


Рисунок 6 – Часткові функції експериментальних сигналів 1 (а) і 2 (б)

Графіки скейлінгових експонент $\tau(q)$, показників Гельдера (узагальнених показників Херста) $h(q)$ та

спектрів сингулярності $D(h)$ експериментальних сигналів наведені на рис. 7.

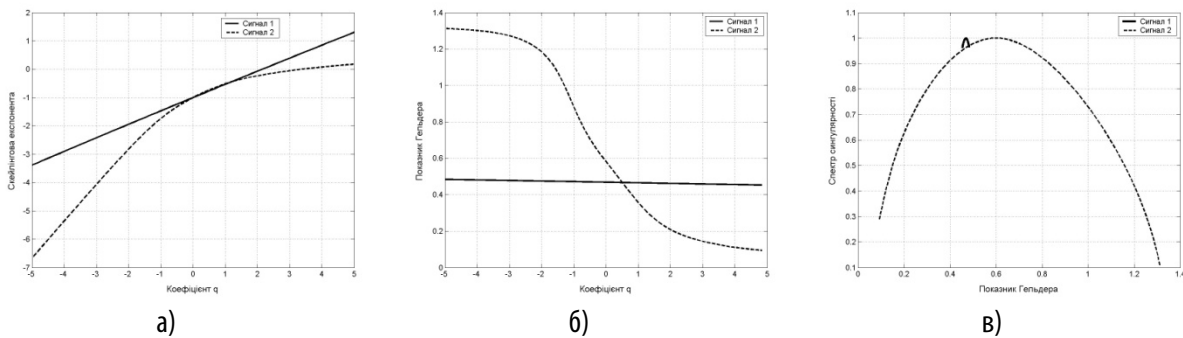


Рисунок 7 – Скейлінгові експоненти (а), показники Гельдера (б) і спектри сингулярностей (в) експериментальних сигналів

З графіків випливає, що експериментальний сигнал 1 при варіації значення порядку $-5 \leq q \leq 5$ породжується монофрактальним процесом: скейлінгова експонента є прямою лінією, показник Гельдера практично не змінюється, а спектр сингулярностей є компактною множиною точок.

Сигнал 2 в цілому виявив мультифрактальні властивості: його скейлінгова експонента є кривою лінією, показник Гельдера залежить від значення порядку, а спектр сингулярностей не є компактною множиною. Разом з тим, при обмеженні варіації значень порядку експериментальний сигнал 2 може бути апроксимований монофрактальними моделями.

ЛІТЕРАТУРА:

1. Crovella M.E. Self-Similarity in World Wide Web Traffic: Evidence and Possible Causes /M.E. Crovella, A. Bestavros //IEEE Transactions on Networking. – 1997. – Vol. 5. – №6. – pp.835-846.
2. Riedi R.H. Multifractal properties of tcp traffic: A numerical study /R.H. Riedi, J.L. V'ehel //Technical Report 3129, INRIA. – 1997.
3. Sheluhin O.I. Mul'tifraktaly. Infokommunikacionnye prilozhenija /O.I. Sheluhin. – M.: Gorjachaja linija-Telekom, 2011. – 576 c.
4. Bozhokin S.V. Fraktaly i mul'tifraktaly /S.V. Bozhokin, D.A. Parshin. – Izhevsk: NIC «Reguljarnaja i haoticheskaja dinamika», 2001. – 128 s.
5. Riedi R.H. A multifractal wavelet model with application to network traffic /R.H. Riedi, M.S. Crouse, V. Ribeiro, R.G. Baraniuk //IEEE Transactions on Information Theory. – 1999. – V.45. – pp.992-1018.
6. Peng C.K. Quantification of scaling exponents and crossover phenomena in non-stationary heartbeat time series /C.K. Peng, S. Havlin, H.E. Stanley, A.L. Goldberger //Chaos. – 1995. – V.5. – pp.82-87.
7. Kantelhardt J.W. Detecting long-range correlations with detrended fluctuation analysis /J.W. Kantelhardt, E. Koscielny-Bunde, H.H.A. Rego, S. Havlin, A. Bunde //Physica A. – 2001. – №295. – R.441-454.
8. Kantelhardt J.W. Multifractal detrended fluctuation analysis of non-stationary time series / J.W. Kantelhardt, S.A. Zschiegner, A. Bunde, S. Havlin, E. Koscielny-Bunde, H.E. Stanley //Physica A. – 2002. – №316. – pp.87-114.
9. Muzy J.F. Multifractal formalism for fractal signals: the structure-function approach versus the wavelet-transform modulus-maxima method /J.F. Muzy, E. Bacry, A. Arneodo //Physical Review E. – 1993. – V.47. – pp.875-884.
10. Pavlov A.N. Mul'tifraktal'nyj analiz signalov na osnove vejvlet-preobrazovanija /A.N. Pavlov, B.C. Anishhenko //Izv. Saratovskogo un-ta. – 2007. – T.7. – Ser. Fizika. – Vyp.1. – S.3-25.
11. Arhiv trafika: <http://ita.ee.lbl.gov>.
12. Budkova L.V. Kompleksna ocinka karakteristik ta identifikacija trafiku v informacijnih telekomunikacijnih mrezhah /L.V. Budkova, V.I. Kornienko //Sistemi obrobki informacii. – 2013. – №2 (109). – S.207-211.

Рецензент: д.т.н., проф. Піступов І.М., Національний гірничий університет, Дніпропетровськ.