ИССЛЕДОВАНИЕ НА ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТЬ МОДЕЛЕЙ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ, ПОЛУЧЕННЫХ ПРОЕКЦИОННЫМ МЕТОДОМ

УДК 62-50

МАРАСАНОВ Владимир Васильевич
д.т.н., профессор кафедры технической кибернетики Херсонского национального технического университета.
Научные интересы: методы исследования сложных динамических систем

ДЫМОВА Анна Олеговна
Старший преподаватель кафедры технической кибернетики Херсонского национального технического университета.
Научные интересы: методы исследования сложных динамических систем, принятие решений в условиях неопределенности

ДЫМОВ Владимир Степанович
к.т.н., доцент кафедры технической кибернетики Херсонского национального технического университета.
Научные интересы: методы исследования сложных динамических систем, оптимизация в телекоммуникационных системах

ВВЕДЕНИЕ

Рассматривается возможность оценки чувствительности параметров моделей динамических систем, получаемых проекционными методами. [2, 7]

Оценка чувствительности системы определяет дополнительное движение системы (возмущение).

ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМЫ

Решение задач оптимизации управления сложными динамическими системами и их идентификации при частично наблюдаемых выходных сигналах значительно усложняются и могут быть решены при определенных допущениях относительно структуры матриц системы.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

Первая группа задач нами решена на основе работ [1, 2, 3, 7, 8] проекционными методами (проекцией множества параметров пространства состояний динамической системы на множество выходных частично наблюдаемых сигналов и нахождения оптимальных управляющих воздействий в виде линейных комбинаций проекций векторов состояний системы [2, 6, 7, 8]).

При исследовании возможности оптимального управления исходили из того, что система описывается векторно-матричным дифференциальным уравнением [2, 6]

$$\dot{\vec{x}} = \mathbf{A}(t)\vec{x}(t) + \mathbf{D}(t)\vec{m}(t) + \vec{n}(t), \qquad (1)$$

где $\vec{x}(t)$ – n-мерный вектор, представляющий переменные состояния;

$\vec{m}(t)$ – r-мерный вектор, представляющий управляющие воздействия;

$\vec{n}(t)$ – s-мерный вектор, представляющий внешние случайные воздействия;

$\mathbf{A}(t)$ – матрица коэффициентов процессов;

$\mathbf{D}(t)$ – матрица управления.

Решение уравнения (1) имеет вид [2]

$$\vec{x}(t)=\varphi(t,t_0)\vec{x}(t)+\int_{t_0}^{t}[\varphi(t,\tau)\mathbf{D}(\tau)\vec{m}(\tau)+\vec{n}(\tau)]d\tau \qquad (2)$$

,

где $\varphi(t,t_0)$ – матрица перехода, удовлетворяющая однородному дифференциальному уравнению

$$\frac{d\varphi(t,t_0)}{dt}=\mathbf{A}(t)\varphi(t,t_0) \qquad (3)$$

и соотношению

$$\varphi(t_0,t_0)=\mathbf{I}, \qquad (4)$$

где **I** – единичная матрица.

В дискретных динамических системах с цифровым управлением решение дается уравнением переходных состояний [1, 2]

$$\vec{x}(k+1)=\varphi(k)\vec{x}(k)+G(k)\vec{m}(k)+\vec{u}(k), \qquad (5)$$

где

$$\varphi(k)=\varphi\big((k+1)T,kT\big), \qquad (6)$$

$$G(k)=\int_{kT}^{(k+1)T}\varphi\big((k+1)T,\tau\big)\mathbf{D}(\tau)d\tau, \qquad (7)$$

$$\vec{u}(k)=\int_{kT}^{(k+1)T}\varphi\big((k+1)T,\tau\big)\mathbf{D}(\tau)d\tau, \qquad (8)$$

Принцип построения оптимального управления динамической системой определяется показателем качества, в требованиях которого учитываются ограничения, при выполнении которых гарантируется физическая реализуемость оптимального управления динамической системой.

При реализации цифровых систем управления показатель качества определяется квадратичной формой

$$J_N=\sum_{k=1}^{N}\Big\{[\vec{x}^d(k)-\vec{x}(k)]'\mathbf{Q}(k)[\vec{x}^d(k)-\vec{x}(k)]+\lambda\vec{m}'(k-1)\mathbf{H}(k-1)\vec{m}(k-1)\Big\}, \qquad (9)$$

где $\vec{x}^d$ – вектор желаемого состояния;

Q, **H** – положительно определенные симметричные матрицы.

Первое слагаемое в (9) дает отклонение от заданного процесса в любой момент времени *kT*, второе слагаемое учитывает ограничение энергии управляющего воздействия. [1, 2, 6].

При соответствующем выборе матрицы **Q** любую координату состояния процесса можно сделать более важной и эффективной для оценки качества системы по сравнению с другой переменной.

Аналогично, путем выбора элементов матрицы **H** можно наложить желаемые ограничения на энергию управляющих воздействий. Оптимальное управление заключается в определении последовательности векторов управления $\vec{m}'(0),\vec{m}'(1),\ldots,\vec{m}'(N-1)$, минимизирующих ожидаемое среднее значение показателя качества [1, 2, 3].

Для линейных систем, характеризуемых уравнением переходных состояний (5), вектор реализуемого управления, минимизирующего ожидаемое среднее значение показателя качества дается формулой [1, 2]:

$$\overrightarrow{\hat{m}^{\circ}}(k/k)=\mathbf{B}(N-k)\hat{\vec{x}}(k/k), \qquad (10)$$

где **B**(*N-k*) – матрица обратной связи, элементами которой являются коэффициенты обратной связи;

$\hat{\vec{x}}(k/j)$ – оценка вектора состояния $\vec{x}(k)$, использующая измеренные значения $\vec{y}(j),\vec{y}(j-1),\ldots,\vec{y}(0)$ вектора выхода, оптимальная в том смысле, что ожидаемое среднее значение

$$E\left\{[\vec{x}(k)-\vec{\hat{x}}(k/j)]'[\vec{x}(k)-\vec{\hat{x}}(k/j)]\right\} \qquad (11)$$

минимально, $\vec{\hat{x}}(k/k)$ – это ортогональная проекция вектора состояния на подпространство выходных сигналов *Y*(*j*) [7]. Поэтому

$$\vec{x}(k)=\vec{\hat{x}}(k/k)+\vec{\tilde{x}}(k/k), \qquad (12)$$

Y(*j*) является подпространством пространства $\vec{x}(k)$ – пространства векторов состояния динамической системы.[2, 6, 7]

Вектор оптимального управления $\overrightarrow{\hat{m}^{\circ}}(k/k)$ можно записать в виде суммы его ортогональной проекции $\hat{m}^{\circ}(k/k)$ на подпространство *Y*(*j*) и его нормальной компоненты $\overrightarrow{\tilde{m}^{\circ}}(k/k)$.[7]. По аналогии можно записать

$$\overrightarrow{\hat{m}^{\circ}}(k/k)+\overrightarrow{\tilde{m}^{\circ}}=\mathbf{B}(N-k)\vec{\hat{x}}(k/k)+\mathbf{B}(N-k)\vec{\tilde{x}}(k/k).$$

Используя основные свойства ортогональной проекции [1], находим

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\hat{m}^{\circ}}(k/k)&=\mathbf{B}(N-k)\vec{\hat{x}}(k/k)\\ \overrightarrow{\tilde{m}^{\circ}}(k/k)&=\mathbf{B}(N-k)\vec{\tilde{x}}(k/k)\end{aligned} \qquad (13)$$

Ортогональная проекция $\overrightarrow{\hat{m}^{\circ}}(k/k)$, которая является наилучшей оценкой для $\vec{m}^{\circ}(k)$, связана линейно с наилучшей оценкой для $\vec{x}(k)$. Нормальная компонента вектора $\overrightarrow{\tilde{m}^{\circ}}(k)$ представляет собой ошибку оценки. [2, 7].

Оценка $\vec{m}^{\circ}(k)$ физически реализуема, так как является функцией оценки $\vec{\hat{x}}(k/k)$, которая может быть определена по измерениям выходных сигналов.

Покажем теперь, что используя принцип оптимальности и когда вместо вектора оптимального управления $\vec{m}^{\circ}(k)$ используется его наилучшая оценка и качество системы определяется по минимуму среднего значения J_N. Выражение (9) описывает оптимальный закон управления [3]. При доказательстве этого используется симметричность матриц **Q** и **H** [4, 5]. Обозначим минимум ожидаемого среднего значения J_N через

$$f_N[\vec{x}(0)]=\min_{\vec{m}(j)} EJ_N, \quad j=1,2,\ldots,N. \qquad (14)$$

Очевидно, что когда $\vec{m}(j)=\vec{m}^{\circ}(j)$, то $EJ_N = f_N$ и $EJ_N - f_N = 0$. Однако, когда $\vec{m}(k)=\vec{m}^{\circ}(k)$, то $EJ_N - f_N > 0$, т.е. вводится ошибка, так как по определению f_N является минимумом для EJ_N. Следовательно, задача состоит в определении для $\vec{m}^{\circ}(k)$ оценки, минимизирующей ошибку $EJ_N - f_N$, обусловленную нереализуемостью $\vec{m}^{\circ}(k)$. Эта оценка называется наилучшей оценкой и она дается ортогональной проекцией $\vec{\hat{m}}(k/k)$ и поэтому уравнение $\overrightarrow{\hat{m}^{\circ}}(k/k)=\mathbf{B}(N-k)\vec{\hat{x}}(k/k)$ описывает оптимальный закон управления для процессов с координатами, недоступными для измерения. И задача сводится к нахождению оценок для многошагового процесса, в результате которого последовательно находятся оценки для всех шагов и в каждом последующем шаге используются найденные оптимальные решения на предыдущем шаге, т.е. реализуется принцип динамического программирования.

Применяя принцип оптимальности, минимальное значение $f_N[\vec{x}(0)]$ для *N*-шагового процесса управления с $N > 1$ можно записать в виде

$$f_N[\vec{x}(0)] = \min_{\vec{m}(0)} E\left\{\vec{x}'(1)\mathbf{Q}(1)\vec{x}(1) + \lambda\vec{m}'(0)\mathbf{H}(0)\vec{m}(0) + f_{N-1}[\vec{x}(1)]\right\}, \quad (15)$$

где связь между $\vec{x}(1)$ и $\vec{m}(0)$ дается уравнением

$$\vec{x}(k+1) + \varphi(k)\vec{x}(k) + G(k)\vec{m}(k) + \vec{u}(k). \quad (16)$$

Для $N = 1$ минимум равен [2]

$$f_1[\vec{x}(0)] = \min_{\vec{m}(0)} E\left\{\vec{x}'(1)\mathbf{Q}(1)\vec{x}(1) + \lambda\vec{m}'(0)\mathbf{H}(0)\vec{m}(0)\right\}. \quad (17)$$

Здесь, как было сказано ранее, принята симметричность матриц **Q** и **H**.

В уравнении (1) **A** – основная матрица системы, так как ее структура определяет характер переходной матрицы состояния (3) и поэтому чувствительность системы определяется чувствительностью корней характеристического уравнения матрицы **A**. простейшим методом анализа чувствительности является численное исследование параметрической модели системы во всем диапазоне изменения определяющей совокупности параметров. Основным методом исследования в теории чувствительности является использование функций чувствительности.

Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ – множество собственных значений характеристического полинома матрицы **A**. при этом переменные состояния $\vec{x}_i,\ i = \overline{1,n}$ и показатели качества $J_1, J_2, \ldots, J_s$ являются однозначными функциями параметров $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$, т.е.

$$\vec{x}_i(t,\lambda) = \vec{x}(t,\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_m),\ i = \overline{1,n} \quad (18)$$

и

$$J_i(\lambda) = J_i(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_m),\ i = \overline{1,s} \quad (19)$$

Частные производные $\dfrac{\partial\vec{x}_i(t,\lambda)}{\partial\lambda_k}$, $\dfrac{\partial J_i(\lambda)}{\partial\lambda_k}$ называются функциями чувствительности первого порядка величин $\vec{x}_i$ и J_i по аргументам $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$

$$\frac{\partial^k \vec{x}_i}{\partial\lambda_1^{k_1}\partial\lambda_2^{k_2}\ldots\partial\lambda_m^{k_m}},\quad \frac{\partial^k J_i}{\partial\lambda_1^{k_1}\partial\lambda_2^{k_2}\ldots\partial\lambda_m^{k_m}},$$
$$k_1 + k_2 + \ldots + k_m = k$$

называются функциями чувствительности k-го порядка по соответствующим комбинациям параметров. Очевидно, что функции чувствительности переменных состояния $\vec{x}(t,\lambda)$ зависят от t и параметров λ, а функции чувствительности показателей качества только от параметров $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$. Функции чувствительности различных порядков являются решениями уравнений модели системы. Эти уравнения являются уравнениями чувствительности.

Совокупность исходной математической модели (1) и критериев качества (9), определяющих функции чувствительности называются моделью чувствительности изучаемой системы.

Рассмотрим два случая. Первый – $(\overline{\lambda_1},\ldots,\overline{\lambda_m})$ – фиксированное (расчетное) значение параметров; $(\overline{\lambda_1},\ldots,\overline{\lambda_m}) = \overline{\lambda}$ – базисная совокупность; $\overline{\lambda}$ соответствует совокупности переменных состояния [3, 5]. $\overline{\vec{x}_i} = \vec{x}_i(t,\lambda)$ будем называть основным базовым движением системы. Базовому движению соответствует базовое значение показателей качества $\overline{J_i} = J_i(\overline{\lambda})$. При изменении параметров $\lambda_i = \overline{\lambda_i} + \mu$ получим новое движение $\vec{x}_i = \vec{x}_i(t,\overline{\lambda_1}+\mu_1,\ldots,\overline{\lambda_m}+\mu_m) = \vec{x}_i(t,\overline{\lambda}+\vec{\mu})$, которому соответствуют новые значения показателей качества $J_i = J_i(\overline{\lambda_1} + \mu_1, ..., \overline{\lambda_m} + \mu_m) = J_i(\vec{\lambda} + \vec{\mu})$. Вектор $\Delta\vec{x}_i = \vec{x}_i(t, \bar{\vec{\lambda}} + \vec{\mu}) - \vec{x}_i(t, \bar{\vec{\mu}})$, называется дополнительным движением, который вызван изменением собственных значений матрицы **A**.

При этом могут быть два исхода:

1) действительная часть одного или нескольких собственных значений характеристического полинома окажется положительной и система будет неустойчивой;

2) суммарное изменение λ_i даст изменение показателя качества не соответствующему проектному заданию.

Решение задач 1) и 2) будет произведено методами теории возмущений на основании теорем Гершгорина. [4, 8].

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И ВЫВОДЫ

1. Проекционные методики исследования динамических систем позволяют при определенном подборе матриц **Q** и **H** решать задачу нахождения квазиоптимального управления с определенной точностью при неполном наблюдении выходных сигналов системы.
2. Исследование получаемых моделей динамических систем на чувствительность позволяют определить критические изменения собственных значений оператора системы и прогнозировать неустойчивые режимы работы системы.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Sejdzh EH.P. Optimal`noe upravlenie sistemami. - T.III. / Sejdzh EH.P., Uajt CH.S. - M.: Radio i svjaz`, 1982. - 392 s.
2. Tu JU. Sovremennaja teorija upravlenija / JUlius Tu - M.: Mashinostroenie, 1971. - 472 s.
3. Rozenvasser E.N. CHuvstvitel`nost` sistem upravlenija / Rozenvasser E.N., JUsupov R.M. - M.: Nauka, 1981. - 464 s.
4. Uilkinson Dzh.KH. Algebraicheskaja problema sobstvennykh znachenij / Dzh.KH. Uilkinson - M.: Nauka, 1972. - 565 s.
5. Rajnshke K. Modeli nadezhnosti i chuvstvitel`nosti sistem / Kurt Rajnshke ; per. s nem. B.A.Kozlova - M.: Mir, 1979. - 454 s.
6. Derusso P. Prostranstvo sostojanij v teorii upravlenija / Derusso P., Roj R., Klouz CH. ; per. s angl. R. T. JAnushevskogo - M.: Nauka, 1970. - 620 s.
7. Gantmakher F.R. Teorija matric / Feliks Ruvimovich Grantmakher - M.: Nauka, 1988. - 552 s.
8. Lankaster P. Teorija matric / Piter Lankaster - M.: Nauka, 1978. - 280 s.

Рецензент: д.т.н., проф. Рудакова А.В.
Херсонский национальный технический университет