ПРИМЕНЕНИЕ МОДИФИЦИРОВАННОГО МЕТОДА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ К РЕШЕНИЮ СИСТЕМ НЕЛИНЕЙНЫХ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

УДК 629.782.05

ГУСЫНИН Андрей Вячеславович
к.т.н., доцент, аналитик по компьютерным коммуникациям ООО «Тич Консалтинг Украина»,
Научные интересы: авиационно-космические системы, многорежимные летательные аппараты, динамика полета, дифференциальные преобразования.
e-mail: gusynin@gmail.com

ВВЕДЕНИЕ

Многие прикладные задачи в области динамики полета летательных аппаратов, оптимизации управления подвижными объектами, механики сплошной среды, автоматики, физики описываются системами нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Большинство таких систем не имеют точного аналитического решения и для их решения применяются различные численные методы. Применение большинства этих методов сопряжено с преодолением ряда математических и вычислительных сложностей. Одним из методов, позволяющих успешно преодолеть данные трудности, является разработанный Пуховым Г.Е. метод дифференциальных преобразований функций и уравнений (МДП) [1-4]. Данный метод является численно-аналитическим и основан на преобразованиях Тейлора. Основным преимуществом данного подхода является то, что он может быть применен непосредственно к решению систем нелинейных уравнений без их предварительной линеаризации, допускает возможность получения решения в аналитическом виде и значительно уменьшает объем вычислительных работ.

Часто при решении систем нелинейных дифференциальных уравнений, в том числе и с применением метода дифференциальных преобразований, возникают математические трудности, связанные со сложной нелинейностью входящих в систему уравнений. Эти трудности можно преодолеть с помощью полиномов Адомиана [5-7]. В основу данного подхода положено разбиение каждого входящего в систему нелинейного дифференциального уравнения на линейные и нелинейные составляющие и аппроксимация неизвестной нелинейной части уравнений полиномами Адомиана. Применение полиномов Адомиана в методе дифференциальных преобразований (модифицированный метод дифференциальных преобразований) значительно упрощает решение систем нелинейных дифференциальных уравнений и расширяет сферу применения данного метода. В работе [8] показана эффективность применения модифицированного метода дифференциальных преобразований к решению нелинейных дифференциальных уравнений.

Целью данной работы является оценка возможности и эффективности применения модифицированного метода дифференциальных преобразований (ММДП) к решению систем нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений.

МОДИФИЦИРОВАННЫЙ МЕТОД ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

Дифференциальные преобразования позволяют заменить в математической модели физического процесса функции $x(t)$ непрерывного аргумента t их спектральными моделями в форме дискретных функций $X(k)$ целочисленного аргумента $k = 0,1,2,...$.

Дифференциальные преобразования функции $x(t)$ имеют следующий вид:

$$X(k) = \frac{H^k}{k!}\left[\frac{d^k x(t)}{dt^k}\right]_{t=t_0}, \qquad (1)$$

где $x(t)$ - оригинал функции, представляющий собой непрерывную, бесконечное число раз дифференцируемую и ограниченную вместе со всеми своими производными функцию действительного аргумента t, $X(k)$ - дифференциальное изображение оригинала (дифференциальный спектр), представляющее собой дискретную функцию целочисленного аргумента $k = 0,1,2,...$, H - масштабная постоянная, имеющая размерность аргумента t и часто равная отрезку $0 \le t \le H$, на котором рассматривают функцию $x(t)$.

Обратным преобразованием, позволяющем по изображению $X(k)$ получить оригинал $x(t)$ в форме степенного ряда Тейлора, является:

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{t}{H}\right)^k X(k). \qquad (2)$$

Следовательно, можно записать:

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(t)^k}{k!}\left[\frac{d^k x(t)}{dt^k}\right]_{t=0}. \qquad (3)$$

Величина H должна быть меньше радиуса сходимости ряда ρ, который можно определить на основе признака сходимости Даламбера:

$$\rho = \overline{\lim_{k\to\infty}}\left|\frac{X(k)}{H^k} : \frac{H(k+1)}{H^{k+1}}\right| = H\overline{\lim_{k\to\infty}}\left|\frac{X(k)}{X(k+1)}\right|. \qquad (4)$$

Рассмотрим систему, состоящую из n нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений первой степени:

$$\begin{aligned}&\dot{x}_i(t) = u_i\left[t, x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t)\right] + \\ &+ f_i\left[t, x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t)\right],\ i = 1,2,...,n\end{aligned} \qquad (5)$$

с заданными начальными условиями $x_1(0), x_2(0), ..., x_n(0)$, где $u_i[t, x_1(t), x_2(t),..., x_n(t)]$, $f_i[t, x_1(t), x_2(t),..., x_n(t)]$ - соответственно линейные и нелинейные части уравнений.

В соответствии с методом полиномов Адомиана нелинейные части уравнений аппроксимируются полиномами Адомиана в виде бесконечного ряда:

$$f_i[t, x_1(t), x_2(t),..., x_n(t)] = \sum_{k=0}^{\infty} A_{ik}(t),\ i = 1,2,...,n \qquad (6)$$

а решение исходной системы представляется в виде ряда:

$$x_i(t) = \sum_{m=0}^{\infty} x_{im}(t), \quad i = 1,2,..., n. \qquad (7)$$

Полиномы Адомиана A_{ik} могут быть построены по следующей общей формуле:

$$A_{ik}=\frac{1}{k!}\{\frac{d^k}{d\lambda^k}\left[f_i(t,\sum_{m=0}^{\infty}\lambda^m x_{1m},\sum_{m=0}^{\infty}\lambda^m x_{2m},\ldots,\sum_{m=0}^{\infty}\lambda^m x_{nm})\right]\}_{\lambda=0},\ k=0,1,2,\ldots;\ i=1,2,\ldots,n. \quad (8)$$

и вычислены с использованием выражений [9]:

$$\begin{aligned}
&A_{i0}=f_i(x_{i0}),\ A_{i1}=x_{i1}f_i^{(1)}(x_{i0}),\ A_{i2}=x_{i2}f_i^{(1)}(x_{i0})+\frac{1}{2!}x_{i1}^2 f_i^{(2)}(x_{i0}),\\
&A_{i3}=x_{i3}f_i^{(1)}(x_{i0})+x_{i1}x_{i2}f_i^{(2)}(x_{i0})+\frac{1}{3!}x_{i1}^3 f_i^{(3)}(x_{i0}),\\
&A_{i4}=x_{i4}f_i^{(1)}(x_{i0})+\left(x_{i1}x_{i3}+\frac{1}{2!}x_{i2}^2\right)f_i^{(2)}(x_{i0})+\frac{1}{2!}x_{i1}^2x_{i2}f_i^{(3)}(x_{i0})+\frac{1}{4!}x_{i1}^4 f_i^{(4)}(x_{i0}),\\
&A_{i5}=x_{i5}f_i^{(1)}(x_{i0})+\left(x_{i2}x_{i3}+x_{i1}x_{i4}\right)f_i^{(2)}(x_{i0})+\frac{1}{2!}\left(x_{i1}^2x_{i3}+x_{i1}x_{i2}^2\right)f_i^{(3)}(x_{i0})+\\
&\qquad+\frac{1}{3!}x_{i1}^3x_{i2}f_i^{(4)}(x_{i0})+\frac{1}{5!}x_{i1}^5 f_i^{(5)}(x_{i0}),\ldots
\end{aligned} \quad (9)$$

С учетом свойств дифференциальных преобразований компоненты дифференциальных изображений $F_i(k)$ нелинейных частей $f_i[t,x_1(t),x_2(t),\ldots,x_n(t)]$ искомой системы дифференциальных уравнений имеют вид:

$$\begin{aligned}
&F_i(0)=f_i[x_i(0)]=f_i[X_i(0)]=f_i(x_{i0}),\ F_i(1)=\frac{d}{dt}f_i[x_i(t)]\Big|_{t=0}=\dot{x}_i(0)f_i^{(1)}[x_i(0)]=X_i(1)f_i^{(1)}[X_i(0)],\\
&F_i(2)=X_i(2)f_i^{(1)}[X_i(0)]+\frac{1}{2!}[X_i(1)]^2 f_i^{(2)}[X_i(0)],\\
&F_i(3)=X_i(3)f_i^{(1)}[X_i(0)]+X_i(1)X_i(2)f_i^{(2)}[X_i(0)]+\frac{1}{3!}[X_i(1)]^3 f_i^{(3)}[X_i(0)],\\
&F_i(4)=X_i(4)f_i^{(1)}[X_i(0)]+[X_i(1)X_i(3)+\frac{1}{2!}[X_i(2)]^2]f_i^{(2)}[X_i(0)]+\\
&\qquad+\frac{1}{2!}[X_i(1)]^2X_i(2)f_i^{(3)}[X_i(0)]+\frac{1}{4!}[X_i(1)]^4 f_i^{(4)}[X_i(0)],\\
&F_i(5)=X_i(5)f_i^{(1)}[X_i(0)]+[X_i(2)X_i(3)+X_i(1)X_i(4)]f_i^{(2)}[X_i(0)]+\frac{1}{2!}[X_i(1)]^2X_i(3)+\\
&\qquad+X_i(1)[X_i(2)]^2)f_i^{(3)}[X_i(0)]+\frac{1}{3!}[X_i(1)]^3X_i(2)f_i^{(4)}[X_i(0)]+\frac{1}{5!}[X_i(1)]^5 f_i^{(5)}[X_i(0)],\ldots.
\end{aligned} \quad (10)$$

Сравнение выражений (9) и (10) показывает, что компоненты дифференциальных изображений оригиналов нелинейных функций дифференциальных уравнений заданной системы и соответствующие компоненты полиномов Адомиана имеют одинаковую математическую структуру. Это означает, что компонены дифференциальных изображений оригиналов нелинейных функций системы уравнений могут быть получены из соответствующих компонентов полиномов Адомиана путем замещения каждой компоненты решения $x_{ik}(t)$ соответствующим компонентом дифференциального изображения $X_i(k)$ того же индекса.

В работе [10] показано, что такое замещение может быть применено к любым видам нелинейностей дифференциальных уравнений. Таким образом, для решения системы нелинейных дифференциальных уравнений можно применить комбинированный метод дифференциальных преобразований с аппроксимацией нелинейных частей уравнений полиномами Адомиана по следующему алгоритму [8]. Составляется спектральная модель искомой системы дифференциальных уравнений. В данной модели дифференциальное изображение оригинала каждой нелинейной функции $F_i(k)$ замещается компонентами $\tilde{A}_{ik}$, которые получаются из компонентов A_{ik} полиномов Адомиана путем замещения в нем каждого элемента $x_{ik}(t)$ на соответствующее дифференциальное изображение $X_i(k)$ того же индекса. Затем вычисляются дискреты дифференциальных изображений каждого уравнения исходной системы и, с учетом (2), получают оригинал решения заданной системы дифференциальных уравнений.

Учитывая наличие эффективных методов вычисления полиномов Адомиана, такой подход позволяет преодолеть математические трудности при вычислении дифференциальных изображений сложных нелинейностей и существенно снизить вычислительные затраты при нахождении приближенного решения систем нелинейных дифференциальных уравнений.

ПРИМЕНЕНИЕ МОДИФИЦИРОВАННОГО МЕТОДА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

Ниже представлены примеры решения систем нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений модифицированным методом дифференциальных преобразований и дано сравнение полученных результатов с решением, полученным по методу Рунге-Кутта.

Пример 1. Рассмотрим систему нелинейных дифференциальных уравнений [11,12]:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1(t)}{dt} = -x_1(t), \\ \dfrac{dx_2(t)}{dt} = x_1(t) - x_2^2(t), \\ \dfrac{dx_3(t)}{dx} = x_2^2(t), \end{cases} \tag{11}$$

с начальными условиями $x_1(0)=1,\ x_2(0)=0,\ x_3(0)=0.$

В соответствии с вышеприведенным алгоритмом запишем спектральную модель задачи (11) в виде:

$$\begin{aligned} &(k+1)X_1(k+1) = -X_1(k) \\ &(k+1)X_2(k+1) = X_1(k) - \tilde{A}_{2k} \\ &(k+1)X_3(k+1) = \tilde{A}_{3k} \\ &X_1(0)=1,\ \ X_2(0)=0,\ \ X_3(0)=0\ . \end{aligned} \tag{12}$$

В соответствии с процедурой (9), для нелинейных частей системы уравнений (11) $f_2[x_2(t)] = f_3[x_2(t)] = x_2^2(t)$ вычисляем компоненты A_{2k}, A_{3k} полиномов Адомиана и по ним определяем соответствующие компоненты $\tilde{A}_{2k}$, $\tilde{A}_{3k}$ для замещения ими соответствующих компонентов дифференциальных изображений нелинейных частей второго и третьего уравнений в спектральной модели исходной системы:

$$\tilde{A}_{20} = \tilde{A}_{30} = X_2^2(0),$$

$$\tilde{A}_{21} = \tilde{A}_{31} = 2X_2(0)X_2(1),$$

$$\tilde{A}_{22} = \tilde{A}_{32} = X_2^2(1) + 2X_2(0)X_2(2),$$

$$\tilde{A}_{23} = \tilde{A}_{33} = 2X_2(0)X_2(3) + 2X_2(1)X_2(2),$$

$$\tilde{A}_{24} = \tilde{A}_{34} = 2X_2(0)X_2(4) + 2X_2(1)X_2(3) + X_2^2(2),$$

$$\tilde{A}_{25} = \tilde{A}_{35} = 2X_2(0)X_2(5) + 2\left[X_2(2)X_2(3) + X_2(1)X_2(4)\right], \ldots$$

Подставляя значения $\tilde{A}_{ik}$ в (12) получим для $k = 0,1,2,\ldots$ следующие дискреты дифференциальных спектров:

а) Для первого уравнения:

$$X_1(0)=1,\ X_1(1)=-1,\ X_1(2)=\frac{1}{2},\ X_1(3)=-\frac{1}{6},\ X_1(4)=$$

б) Для второго уравнения:

$$X_2(0)=0,\ X_2(1)=1,\ X_2(2)=-\frac{1}{2},\ X_2(3)=-\frac{1}{6},\ X_2($$

в) Для третьего уравнения:

$$X_3(0)=0,\ X_3(1)=0,\ X_3(2)=0,\ X_3(3)=\frac{1}{3},\ X_3(4)=-\frac{1}{4},\ X_3(5)=-\frac{1}{60},\ X_3(6)=\frac{7}{72},\ldots$$

Таким образом, с учетом (2) при $H=1$ приближенное решение системы уравнений (11) при $H=1$ имеет вид:

$$\begin{aligned} x_1(t)&=1-t+\frac{1}{2}t^2-\frac{1}{6}t^3+\frac{1}{24}t^4-\frac{1}{120}t^5+\frac{1}{720}t^6+\ldots \\ x_2(t)&=t-\frac{1}{2}t^2-\frac{1}{6}t^3+\frac{5}{24}t^4+\frac{1}{40}t^5-\frac{71}{720}t^6+\ldots \\ x_3(t)&=\frac{1}{3}t^3-\frac{1}{4}t^4-\frac{1}{60}t^5+\frac{7}{72}t^6+\ldots \end{aligned} \qquad (13)$$

В табл. 1 показано сравнение между решением, полученным с использованием метода Рунге-Кутта, и решением по модифицированному методу дифференциальных преобразований, а также приведена относительная ошибка решения, полученного по ММДП с использованием 5-ти дискрет дифференциальных изображений каждого уравнения исходной системы.

Таблица 1 -

Сравнительная оценка решения примера 1

t	Решение методом Рунге-Кутта			ММДП			ε_r		
	$x_1(t)$	$x_2(t)$	$x_3(t)$	$x_1(t)$	$x_2(t)$	$x_3(t)$	$x_1(t)$	$x_2(t)$	$x_3(t)$
0	1	0	0	1	0	0	0	0	0
0.1	0.90484	0.09485	3.08e-04	0.90485	0.09485	3.08e-04	3.34e-09	1.84e-08	2.59e-08
0.2	0.81873	0.17900	2.27e-03	0.81873	0.17900	2.27e-03	5.21e-09	6.65e-07	4.05e-08
0.3	0.74082	0.25218	7.00e-03	0.74082	0.25218	7.00e-03	4.40e-08	1.21e-05	3.42e-07
0.4	0.67032	0.31457	1.51e-02	0.67032	0.31452	1.52e-02	3.11e-07	9.78e-05	2.42e-06
0.5	0.60653	0.36668	2.68e-02	0.60653	0.36643	2.70e-02	1.46e-06	4.93e-04	1.13e-05
0.6	0.54881	0.40927	4.19e-02	0.54882	0.40834	4.28e-02	5.17e-06	1.84e-03	4.01e-05
0.7	0.49659	0.44326	6.02e-02	0.49660	0.44045	6.29e-02	1.50e-05	5.57e-03	1.17e-04
0.8	0.44933	0.46962	8.11e-02	0.44937	0.46234	8.83e-02	3.78e-05	1.45e-02	2.93e-04
0.9	0.40657	0.48934	1.04e-01	0.40666	0.47254	1.21e-01	8.52e-05	3.34e-02	6.62e-04
1.0	0.36788	0.50335	1.29e-01	0.36806	0.46806	1.64e-01	1.76e-04	7.01e-02	1.37e-03

Пример 2. Рассмотрим следующую систему нелинейных дифференциальных уравнений [11,13]:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1(t)}{dt}=-k_1x_1(t)+k_2x_2(t)x_3(t), \\ \dfrac{dx_2(t)}{dt}=k_3x_1(t)+k_4x_2(t)y_3(t)-k_5x_2^2(t), \\ \dfrac{dx_3(t)}{dt}=k_6x_2^2(t), \end{cases} \qquad (14)$$

где $k_1 = 0{,}04,\ k_2 = 0{,}01,\ k_3 = 400,\ k_5 = 3000,\ k_6 = 300$,

с заданными начальными условиями $x_1(0) = 1,\ x_2(0) = 0,\ x_3(0) = 0$.

Спектральную модель задачи (14) представим в виде:

$$\begin{cases} (k+1)X_1(k+1) = k_2 \sum_{\ell=0}^{k} X_3(\ell) X_2(k-\ell) - k_1 X_1(k), \\ (k+1)X_2(k+1) = k_3 X_1(k) + k_4 \sum_{\ell=0}^{k} X_3(\ell) X_2(k-\ell) - k_5 \tilde{A}_{2k}, \\ (k+1)X_3(k+1) = k_6 \tilde{A}_{3k}, \\ X_1(0) = 1,\ \ X_2(0) = 0,\ \ X_3(0) = 0 \end{cases} \qquad (15)$$

Для нелинейных частей второго и третьего уравнений системы (14) $f_2[x_2(t)] = f_3[x_2(t)] = x_2^2(t)$ вычисляем компоненты A_{2k}, A_{3k} полиномов Адомиана и по ним соответствующие компоненты $\tilde{A}_{2k}, \tilde{A}_{3k}$ для замещения ими компонентов дифференциальных изображений нелинейных частей в соответствующих уравнениях спектральной модели:

$$\tilde{A}_{20} = \tilde{A}_{30} = X_2^2(0),$$

$$\tilde{A}_{21} = \tilde{A}_{31} = 2X_2(0)X_2(1),$$

$$\tilde{A}_{22} = \tilde{A}_{32} = X_2^2(1) + 2X_2(0)X_2(2),$$

$$\tilde{A}_{23} = \tilde{A}_{33} = 2X_2(0)X_2(3) + 2X_2(1)X_2(2),$$

$$\tilde{A}_{24} = \tilde{A}_{34} = 2X_2(0)X_2(4) + 2X_2(1)X_2(3) + X_2^2(2),$$

$$\tilde{A}_{25} = \tilde{A}_{35} = 2X_2(0)X_2(5) + 2\left[X_2(2)X_2(3) + X_2(1)X_2(4)\right], \ldots$$

Подставляя полученные значения $\tilde{A}_{2k}, \tilde{A}_{3k}$ в спектральную модель (15) получим для $k = 0,1,2,\ldots$ соответствующие дискреты дифференциальных спектров:

а) Для первого уравнения:

$$X_1(0) = 1,\ X_1(1) = -k_1,\ X_1(2) = \frac{1}{2}k_1^2,\ X_1(3) = -\frac{1}{6}k_1^3,\ X_1(4) = \frac{1}{24}k_1^4,\ X_1(5) = \left[\frac{1}{15}k_2 k_6 k_3^3 - \frac{1}{120}k_1^5\right],$$

$$X_1(6) = \left[\frac{1}{720}k_1^6 - \frac{29}{360}k_1 k_2 k_6 k_3^3\right], \ldots$$

б) Для второго уравнения:

$$X_2(0)=0,\ X_2(1)=k_3,\ X_2(2)=-\frac{1}{2}k_1k_3,\ X_2(3)=\frac{1}{6}k_1^2k_3-\frac{1}{3}k_3^2k_5,\ X_2(4)=\frac{1}{4}k_1k_5k_3^2-\frac{1}{24}k_3k_1^3,$$

$$X_2(5)=\frac{1}{120}k_1^4k_3+\frac{2}{15}k_5^2k_3^3-\frac{7}{60}k_5k_1^2k_3^2+\frac{1}{15}k_3^3k_4k_6,$$

$$X_2(6)=\frac{1}{24}k_1^3k_3^2k_5-\frac{1}{720}k_1^5k_3-\frac{5}{36}k_1k_3^3k_5^2+\frac{1}{90}k_2k_3^4k_6-\frac{5}{72}k_1k_3^3k_4k_6.,..$$

в) Для третьего уравнения:

$$X_3(0)=0,\ X_3(1)=0,\ X_3(2)=0,\ X_3(3)=\frac{1}{3}k_6k_3^2,\ X_3(4)=-\frac{1}{4}k_1k_6k_3^2,\ X_3(5)=\frac{7}{60}k_6k_1^2k_3^2-\frac{2}{15}k_6k_5k_3^3,$$

$$X_3(6)=\frac{5}{36}k_1k_5k_6k_3^3-\frac{1}{24}k_6k_1^3k_3^2,\ldots$$

Следовательно, с учетом (2) приближенное решение искомой системы дифференциальных уравнений при $H=1$ имеет вид:

$$\begin{aligned}
x_1(t)&=1-k_1t+\left[\frac{1}{2}k_1^2\right]t^2-\left[\frac{1}{6}k_1^3\right]t^3+\left[\frac{1}{24}k_1^4\right]t^4+\left[\frac{1}{15}k_2k_3^3k_6-\frac{1}{120}k_1^5\right]t^5+\\
&+\left[\frac{1}{720}k_1^6-\frac{29}{360}k_1k_2k_6k_3^3\right].t^6+..,\\
x_2(t)&=k_3t-\left[\frac{1}{2}k_3k_1\right]t^2+\left[\frac{1}{6}k_1^2k_3-\frac{1}{3}k_3^2k_5\right]t^3+\left[\frac{1}{4}k_1k_5k_3^2-\frac{1}{24}k_3k_1^3\right]t^4+\\
&+\left[\frac{1}{120}k_1^4k_3+\frac{2}{15}k_5^2k_3^3-\frac{7}{60}k_5k_1^2k_3^2+\frac{1}{15}k_3^3k_4k_6\right]t^5+\\
&+\left[\frac{1}{24}k_1^3k_3^2k_5-\frac{1}{720}k_1^5k_3-\frac{5}{36}k_1k_3^3k_5^2+\frac{1}{90}k_2k_3^4k_6-\frac{5}{72}k_1k_3^3k_4k_6\right]t^6+\ldots,\\
x_3(t)&=\left[\frac{1}{3}k_6k_3^2\right]t^3-\left[\frac{1}{4}k_6k_1k_3^2\right]t^4+\left[\frac{7}{60}k_6k_1^2k_3^2-\frac{2}{15}k_6k_5k_3^3\right]t^5+\\
&+\left[\frac{5}{36}k_1k_5k_6k_3^3-\frac{1}{24}k_6k_1^3k_3^2\right]t^6+\ldots,
\end{aligned}\qquad(16)$$

В табл. 2 показано сравнение между решением, полученным с использованием метода Рунге-Кутта, и решением по модифицированному методу дифференциальных преобразований, а также приведена относительная ошибка решения, полученная по ММДП с использованием 5-ти дискрет дифференциального изображения каждого уравнения исходной системы.

Таблица 2 -

Сравнительная оценка решения примера 2

t	Решение методом Рунге-Кутта			ММДП			ε_r		
	$x_1(t)$	$x_2(t)$	$x_3(t)$	$x_1(t)$	$x_2(t)$	$x_3(t)$	$x_1(t)$	$x_2(t)$	$x_3(t)$
0.0000	1	0	0	1	0	0	0	0	0
0.0002	0.99999	0.07874	1.26e-05	0.99999	0.07874	1.28e-05	9.99e-15	1.59e-06	9.23e-12
0.0004	0.99998	0.15049	9.51e-05	0.99998	0.15055	1.02e-04	1.21e-12	1.95e-04	1.12e-09
0.0006	0.99998	0.21052	2.95e-04	0.99998	0.21141	3.46e-04	1.88e-11	3.05e-03	1.74e-08
0.0008	0.99997	0.25728	6.27e-04	0.99997	0.26325	8.19e-04	1.25e-10	2.05e-02	1.15e-07
0.0010	0.99996	0.29170	1.08e-03	0.99996	0.31681	1.60e-03	5.17e-10	8.61e-02	4.77e-07

Пример 3. Рассмотрим следующую систему нелинейных дифференциальных уравнений [14,15]:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1(t)}{dt} = cx_1(t) + \eta x_2(t) - \varepsilon x_1(t)^3, \\ \dfrac{dx_2(t)}{dt} = -\theta x_1(t) - \gamma x_2(t), \\ x_1(0) = 1, \quad x_2(0) = 1, \end{cases} \qquad (17)$$

где $c = \eta = \gamma = \theta = 1, \varepsilon$ - постоянные величины.

Спектральную модель системы (17) запишем в виде:

$$\begin{cases} X_1(k+1) = \dfrac{cX_1(k) + \eta X_2(k) - \varepsilon \tilde{A}_{1k}}{k+1} \\ X_2(k+1) = \dfrac{-\theta X_1(k) - \gamma X_2(k)}{k+1} \\ X_1(0) = 1, \quad X_2(0) = 1 \end{cases} . \qquad (18)$$

Вычисляем компоненты A_k полинома Адомиана и соответствующие компоненты $\tilde{A}_{1k}$ для замещения ими компонентов дифференциального изображения нелинейной части первого уравнения $f_1[x(t)] = x^3(t)$ спектральной модели:

$$\tilde{A}_{10} = X_1^3(0),$$

$$\tilde{A}_{11} = 3X_1^2(0)X_1(1),$$

$$\tilde{A}_{12} = 3X_1(0)X_1^2(1) + 3X_1^2(0)X_1(2),$$

$$\tilde{A}_{13} = 3X_1^2(0)X_1(3) + 6X_1(0)X_1(1)X_1(2) + X_1^3(1),$$

$$\tilde{A}_{14} = 3X_1(0)X_1^2(2) + 3X_1^2(1)X_1(2) + 3X_1^2(0)X_1(4) + 6X_1(0)X_1(1)X_1(3),$$

$$\tilde{A}_{15} = 3X_1(1)X_1^2(2) + 3X_1^2(1)X_1(3) + 3X_1^2(0)X_1(5) + 6X_1(0)X_1(1)X_1(4) + 6X_1(0)X_1(2)X_1(3), \ldots$$

Из спектральной модели (18) с учетом полученных выражений для $\widetilde{A}_{1k}$ последовательно для $k = 0,1,2,...$ находим соответствующие дискреты дифференциальных изображений первого и второго уравнений:

$$X_1(0) = 1,\ \ X_1(1) = c + \eta - \varepsilon,\ X_1(2) = \frac{c^2 + \eta(c - 3\varepsilon - \theta - \gamma) + \varepsilon(3\varepsilon - 4c)}{2},$$

$$X_1(3) = \frac{3c(c^2 + \eta c - 13c\varepsilon - 2\eta\theta - \eta\gamma - 18\varepsilon\eta + 27\varepsilon^2) - \eta(\eta\theta - 4\theta\varepsilon - \gamma\theta - \gamma^2 - 3\varepsilon\gamma - 21\varepsilon^2 + 6\varepsilon\eta) + 15\varepsilon^3}{6}, ...$$

$$X_2(0) = 1,\ \ X_2(1) = -\theta - \gamma,\ \ X_2(2) = \frac{\theta(-c - \eta + \varepsilon + \gamma) + \gamma^2}{2},$$

$$X_2(3) = \frac{\theta(-c^2 - \eta c + 4c\varepsilon + \eta\theta + 2\theta\gamma) - \gamma^3 + \theta(3\eta\varepsilon - 3\varepsilon^2 + c\gamma - \gamma\varepsilon - \gamma^2)}{6}, ...$$

Тогда с учетом выражения (2) приближенное решение уравнения (17) при $H = 1$ будет иметь вид:

$$x_1(t) = 1 + (c + \eta - \varepsilon)t + \left(\frac{(c(c - 4\varepsilon + \eta) + \eta(-\theta - 3\varepsilon - \gamma) + 3\varepsilon^2)}{2}\right)t^2 +$$
$$+\left(\frac{c(c^2 + \eta c - 13c\varepsilon - 2\eta\theta - \eta\gamma - 18\varepsilon\eta + 27\varepsilon^2 - \eta(\eta\theta - 4\theta\varepsilon - \gamma\theta - \gamma^2 - 3\varepsilon\gamma - 21\varepsilon^2 + 6\varepsilon\eta) + 15\varepsilon^3)}{6}\right)t^3 + ...$$

$$x_2(t) = 1 + (-\theta - \gamma)t + \left(\frac{\theta(-c - \eta + \varepsilon + \gamma) + \gamma^2}{2}\right)t^2 + \qquad (19)$$
$$+\left(\frac{\theta(-c^2 - \eta c + 4c\varepsilon + \eta\theta + 2\theta\gamma) - \gamma^3 + \theta(3\eta\varepsilon - 3\varepsilon^2 + c\gamma - \gamma\varepsilon - \gamma^2)}{6}\right)t^3 + ...$$

В табл. 3 показано сравнение между решением, полученным с использованием метода Рунге-Кутта, и решением, полученным по модифицированному методу дифференциальных преобразований, а также приведена относительная ошибка решения, полученная по ММДП с использованием 5-ти дискрет дифференциального изображения первого уравнения исходной системы.

Таблица 3 -

Сравнительная оценка решения примера 3

t	Решение методом Рунге-Кутта		ММДП		ε_r	
	$x(t)$	$y(t)$	$x(t)$	$y(t)$	$x(t)$	$y(t)$
0	1	1	1	1	0	0
0.2	1.36308	0.60289	1.36308	0.60289	2.68e-07	1.06e-07
0.4	1.67808	0.21614	1.67817	0.21615	4.18e-05	1.08e-05
0.6	1.92697	-0.15163	1.92876	-0.15150	8.12e-04	1.29e-04
0.8	2.10100	-0.49088	2.11539	-0.49034	6.53e-03	5.48e-04
1.0	2.20245	-0.79328	2.27285	-0.79255	3.20e-02	7.32e-04

ВЫВОДЫ

Рассмотрено применение комбинированного метода дифференциальных преобразований и метода полиномов Адомиана к решению систем нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Метод основан на решении дифференциальных уравнений в области изображений с аппроксимацией нелинейных членов уравнений полиномами Адомиана и дальнейшим получением оригинала решения в виде ряда Тейлора. Приведены примеры решения с разными типами нелинейностей. Полученные численные результаты показывают эффективность применения данного подхода и хорошую сходимость с решением, полученным методом Рунге-Кутта. По сравнению со стандартным модифицированный метод дифференциальных преобразований позволяет преодолеть математические трудности, связанные со сложной нелинейностью в дифференциальных уравнениях системы, проще в применении и сокращает объем вычислений.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Puhov G.E. O primenenii preobrazovanij Taylora k resheniju differencial'nyh uravnenij // Electronnoe modelirovanie. - 1976. - Vyp. 11, №128. - S. 18-23.
2. Puhov G.E. Preobrazovanija Taylora i ih primenenie v electrotehnike i electronike. – K.: Naukova Dumka, 1978. – 260 s.
3. Puhov G.E. Differencial'nye preobrazovanija funkcij i uravnenij. – K.: Naukova Dumka, 1980. – 419 s.
4. Puhov G.E. Differencial'nye preobrazovanija i matematicheskoe modelirovanie fizicheskih processov. – K.: Naukova Dumka, 1986. – 160 s.
5. Adomian G. Solving frontier problems of physics: the decomposition method. – Kluwer Academic Publishers, Boston, MA, 1994.
6. Fatoorehchi H., Abolghasemi H. Improving the differential transform method: A novel technique to obtain the differential transforms of nonlinearities by the Adomian polynomials // Applied Mathematical Modeling. – 2013. – Vol. 37, Issue 8. -P. 6008-6017.
7. Elsaid A. Adomian polynomials: a powerful tool for iterative methods of series solution of nonlinear equation//Journal of Applied Analysis and Computation. – 2012. - Vol.2, No.4. – P.381-394.
8. Gusynin A.V. Reshenie nelineynih differencial'nyh uravnenij modifitsirovanim metodom differencial'nyh preobrazovanij // Naukovij visnyk ukrNDIPB. – 2016. - №10. - С. 15-25.
9. Adomian G. A review of the decomposition method in applied mathematics // J. Math. Anal. Appl. – 1988. – No.135.- P. 501-544.
10. Ebaid A. On a general formula for computing the one-dimensional differential transform of nonlinear functions and its applications // Proceedings of the American Conference on Applied Mathematics. – 2012. - Harvard, Cambridge, USA. – P. 92-97.
11. Hassan Abdel-Halim I.H. Application to differential transformation method for solving systems of differential equations // Applied Mathematical Modelling. – 2008. – No.32. – P.2552-2559.
12. Rao Ramesh T.R. A comparison between the differential transform method and homotopy perturbation method for a system of non-linear chemistry problems // Indian journal of applied research. – 2016. – Vol.6, issue 2. – P.171-180.
13. Dogan N. Solution of the system of ordinary differential equations by combined Laplace transform-Adomian decomposition method // Mathematical and computational applications. – 2012. – Vol.17, No.3. – P.203-211.
14. Zeng Yi. The Laplace-Adomian-Pade technique for the ENSO model // Mathematical problems in engineering. – 2013. – Article ID 954857. – P.1-4.
15. Gubes M., Peker Alpaslan H., Oturanc G. application of differential transform method for El Nino Southern Oscillation (ENSO) model with compared Adomian decomposition and variational iteration method // Journal of mathematics and computer science. – 2015. - No.15. – P. 167-178.

Рецензент: д.т.н., проф. Лысенко А.И.
Институт телекоммуникационных систем НТУУ «КПИ».