РЕШЕНИЕ ПРОБЛЕМЫ ПОЛНОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОПИСАНИЯ ВЫСКАЗЫВАНИЙ С ПРИМЕНЕНИЕМ ИСЧИСЛЕНИЯ ПРЕДИКАТОВ

УДК 510.635

ШАБАНОВ-КУШНАРЕНКО Сергей Юрьевич
доктор технических наук, профессор, профессор кафедры программной инженерии
Харьковского национального университета радиоэлектроники.
Научные интересы: алгебрологические методы моделирования интеллектуальных динамических систем.
E-mail: sergabaev@mail.ru.

ШАБАНОВА-КУШНАРЕНКО Любовь Владимировна
кандидат технических наук, инженер кафедры интеллектуальных компьютерных систем
Национального технического университета «ХПИ».
Научные интересы: формальные средства анализа и моделирования информационных процессов.
E-mail: lyubov_shabanova@mail.ua.

ВВЕДЕНИЕ

В работах [1-3, 5-8] изучалась структура сложных высказываний, составляемых из простых высказываний. В исчислении высказываний отсутствует изучение структуры простых высказываний и поэтому достигается лишь частичное математическое описание высказываний. Полное же математическое описание высказываний достигается в исчислении предикатов, изучающем структуру простых высказываний. В исчислении предикатов можно выделить три аспекта:

1) алгебру предикатов, изучающую математический аппарат исчисления предикатов, являющийся обобщением алгебры логики;

2) логику предикатов, математически описывающую высказывания средствами алгебры предикатов и являющуюся обобщением логики высказываний;

3) собственно исчисление предикатов, формализующее логику предикатов и являющееся обобщением исчисления высказываний. Главным средством математического описания высказываний в логике предикатов служит понятие предиката, являющееся обобщением понятия булевой функции.

Одной из актуальных задач информатики является формализация сложных мыслительных процессов, лежащих в основе логического мышления [4, 9, 10]. Для решения этой задачи используются логические исчисления. Однако в исчислении высказываний отсутствует изучение структуры простых высказываний и поэтому достигается лишь частичное математическое описание высказываний. Полное же математическое описание высказываний возможно в исчислении предикатов. Настоящая статья посвящена развитию этого формального аппарата.

В результате выполненных исследований показано, что с помощью предикатов может быть выполнена формализация любых простых высказываний. В виде предикатов второго порядка формализованы кванторы от унарных предикатов.

1. Предикаты. Постановка задачи: показать возможность и эффективность применения аппарата предикатов для полной формализации высказываний.

Метод решения: формульная запись высказываний на языке алгебры предикатов.

Сформулируем понятие предиката. В алгебре предикатов принято произвольно фиксированное множество называть предметной областью. Элементы предметной области называют предметами. Переменная, определенная на некоторой предметной области, называется предметной переменной. В частном случае, когда предметная область содержит всего два предмета – «0» и «1», предметы превращаются в булевы константы, а предметная переменная – в булеву переменную. Функция $y=P(x_1, x_2,..., x_n)$ от предметных переменных $x_1, x_2,..., x_n$, заданных на некоторой предметной области M, принимающая булевы значения y, называется n-арным предикатом. Если $n=1$, то предикат называют унарным, если $n=2$ - бинарным, если $n=3$ - тернарным. В частном случае $M=\{0,1\}$, предикат превращается в булеву функцию. Предикаты, имеющие конечную предметную область, назовем конечными. Предикаты, имеющие бесконечную предметную область, назовем бесконечными.

2. Формализация простых высказываний. Справедливо следующее важное утверждение: с помощью предикатов, в принципе, может быть выполнена формализация любых простых высказываний. Это утверждение следует рассматривать не как уже свершившийся факт, а как программную установку. К настоящему времени еще далеко не все простые высказывания удалось формализовать с помощью предикатов, однако существует уверенность, что это можно сделать. Существует даже мнение, что для формализации любых простых высказываний, встречающихся в человеческой практике, достаточно одних только предикатов. Рассмотрим примеры формализации простых высказываний с помощью предикатов. Пусть x, y, z - произвольные натуральные числа.

Пример 1. Формализуем высказывание «x - есть простое число». С этой целью введем предметную область $M=\{0,1,2,...\}$ в виде множества всех натуральных чисел. На множестве M введем следующий унарный предикат:

$$Q(x)=\begin{cases}1, \text{ если } x \text{ - простое число,}\\ 0, \text{ если } x \text{ - не простое число.}\end{cases}$$

Этот предикат можно задать в виде таблицы (табл. 1) или записать в виде формулы (покажем, как это делается, несколько позже). Нетрудно заметить, что высказывание «x - есть простое число» истинно, когда $Q(x)=1$, и ложно, когда $Q(x)=0$. Таким образом, с помощью предиката $Q(x)$ можно определить истинностное значение высказывания «x - есть простое число» (например, по табл. 1, или же по формуле). Определим, к примеру, истинно ли высказывание «6 есть простое число». По табл. 1 находим: Q(6)=0. Следовательно, высказывание ложно. Для высказывания «7 есть простое число» аналогичным образом находим Q(7)=1. Данное высказывание истинно. Из рассмотренного примера следует вывод: предикат $y=Q(x)$ может быть принят в качестве математического эквивалента высказывания «x есть простое число».

Заметим, что переменная x играет роль истинностной переменной данного высказывания, а функция $Q(x)$ играет роль функции истинности того же высказывания.

Таблица 1.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	...
Q(x)	0	1	1	1	0	1	0	1	0	0	0	1	0	1	0	...

<u>Пример 2.</u> Пусть требуется записать формулу для предиката $k(x)$, формализующего высказывание «x есть четное число». При построении формулы используем в качестве элементарных функций арифметические операции над целыми числами, операцию $[x]$ выделения целой части положительного дробного числа и знаковую функцию

$$\mathrm{sgn}A = \begin{cases} 1, \text{ если } A<0, \\ 0, \text{ если } A \geq 0. \end{cases}$$

На множестве M введем унарный предикат

$$k(x) = \begin{cases} 1, \text{ если } x \text{ - четное число}, \\ 0, \text{ если } x \text{ - нечетное число}. \end{cases}$$

Запишем предикат $k(x)$ в виде формулы: $k(x)=\mathrm{sgn}([x/2]-x/2)$. Определим с помощью введенного предиката истинность высказывания «8 есть четное число»: $k(8)=\mathrm{sgn}\ ([8/2]-8/2)=1$. Следовательно, данное высказывание истинно. Определим теперь истинность высказывания «7 есть четное число»: $k(7)=\mathrm{sgn}([7/2]-7/2)= \mathrm{sgn}(-1/2)=0$, т.е. данное высказывание ложно. Таким образом, мы показали, что предикат $k(x)$ действительно формализует заданное высказывание.

<u>Пример 3.</u> Формализуем высказывание «x – меньше или равно y» или в краткой записи «$x \leq y$». На множестве M вводим бинарный предикат

$$R(x, y) = \begin{cases} 1, \text{ если } x \leq y, \\ 0, \text{ если } x > y, \end{cases}$$

записывая его в виде формулы $R(x, y)=\mathrm{sgn}(y-x)$. Определим с помощью введенного предиката, истинно или нет высказывание «2 меньше или равно 3»: $R(2, 3)=\mathrm{sgn}(3-2)=\mathrm{sgn}(1)=1$. Следовательно, данное высказывание истинно. Для высказывания «5 меньше или равно 3» имеем: $R(5, 3)=\mathrm{sgn}(3-5)=\mathrm{sgn}(-2)=0$. Данное высказывание ложно. Таким образом мы доказали, что полученная формула предиката $R(x, y)$ формализует заданное высказывание.

<u>Пример 4.</u> Запишем формулу для предиката $D(x, y)$, формализующего высказывание «$x=y$». Используем тот факт, что высказывание «$x=y$» равносильно высказыванию «$x \leq y$ и $y \leq x$». На множестве M вводим бинарный предикат

$$D(x, y) = \begin{cases} 1, \text{ если } x = y, \\ 0, \text{ если } x \neq y. \end{cases}$$

Запишем предикат $D(x, y)$ в виде формулы: $D(x, y)=\mathrm{sgn}(y-x) \wedge \mathrm{sgn}(x-y)$. Покажем, что он действительно формализует заданное высказывание. В самом деле: высказывание «5=5» истинно, т.к. $D(5, 5)=\mathrm{sgn}(5-5) \wedge \mathrm{sgn}(5-5)=1 \wedge 1=1$; высказывание же «7=5» ложно, т.к. $D(7, 5)=\mathrm{sgn}(7-5) \wedge$ $\wedge\, \mathrm{sgn}(5-7)=0 \wedge 1=1$.

Пример 5. Формализуем высказывание «$x+y=z$». На множестве M вводим тернарный предикат:

$$S(x,y,z)=\begin{cases}1, \text{ если } x+y=z,\\ 0, \text{ если } x+y\neq z.\end{cases}$$

Формулу предиката строим аналогично предыдущему примеру:

$S(x,y,z)=\operatorname{sgn}(x+y-z)\wedge\operatorname{sgn}(z-x-y)$.

Определим с помощью введенного нами предиката истинность следующих высказываний: «4+3=7» - истинное высказывание, т.к. $S(4,3,7)=\operatorname{sgn}(4+3-7)\wedge\operatorname{sgn}(7-4-3)=1\wedge1=1$; «5+2=13» - ложное высказывание, т.к. $S(5,2,13)=\operatorname{sgn}(5+2-13)\wedge\operatorname{sgn}(13-5-2)=0\wedge1=0$. Таким образом мы показали, что предикат $S(x,y,z)$ действительно формализует заданное высказывание.

Пример 6. Решим теперь обратную задачу. По заданному предикату найдем высказывание, которое он формализует. Пусть задан предикат $T(x,y)=Q(x)\wedge R(x,y)\supset S(x,x,y)$, где $Q(x)$, $R(x,y)$, $S(x,x,y)$ - введенные выше предикаты. Запишем высказывание, соответствующее предикату T. Очевидно, искомое высказывание будет иметь следующий вид: «Если x - простое число и x меньше или равно y, то $x+x=y$».

Пример 7. Определить значение предиката $T(x,y)$ сначала содержательно, а затем формально, для следующих значений: $T(2,3)$ и $T(5,10)$. Для первого предиката на содержательном уровне имеем следующее высказывание: «Если 2 - простое число и $2\leq3$, то 2+2=3». На формальном уровне: $T(2,3)=Q(2)\wedge R(2,3)\supset S(2,2,3)=1\wedge1\supset0=0$. Таким образом, и на содержательном и на формальном уровнях получили, что предикат $T(2,3)$ описывает ложное высказывание. Теперь исследуем второй предикат $T(5,10)$. На содержательном уровне он описывает высказывание: «Если 5 - простое число и $5\leq10$, то 5+5=10». На формальном уровне имеем: $T(5,10)=Q(5)\wedge R(5,10)\supset S(5,5,10)=1\wedge1\supset1=1$. Предикат $T(5,10)$ и на содержательном, и на формальном уровнях описывает истинное высказывание.

3. Кванторы унарных предикатов. Кроме предикатов, рассмотренных ранее, в алгебре предикатов вводят две специальные функции. Это так называемые кванторные функции, у которых значениями аргумента служат предикаты, а значениями функции - булевы константы 0 и 1. Функции эти называются кванторами общности и существования. Сформулируем их определение. Пусть M - некоторая предметная область. Рассмотрим систему N всевозможных предикатов $P(x)$, заданных на M. Переменную P, заданную на множестве N, назовем переменным предикатом. Значениями переменной P служат конкретные предикаты системы N. Если множество M конечно и содержит n элементов, то система N содержит 2^n предикатов. Докажем это утверждение. С этой целью свяжем с каждым предикатом свое подмножество множества M всех тех элементов x, для которых $P(x)=1$. Таким образом, каждому предикату соответствует свое подмножество множества M. Очевидно, что число таких всевозможных подмножеств будет равно 2^n, а значит, и предикатов множества N также будет 2^n.

Квантором общности называется функция $F_1(P)$, заданная на множестве N со значениями в множестве $\{0,1\}$ и определяемая условиями:

$$F_1(P)=\forall xP(x)=\begin{cases}1, \text{ если для всех } x\in M\ P(x)=1,\\ 0 \text{ - в противном случае.}\end{cases}$$

Квантор общности равен единице только для одного предиката, тождественно равного единице: $P(x)\equiv 1$. Для всех остальных предикатов квантор общности равен нулю. Запись $\forall x$ читается «для всех x...». Квантором существования называется функция $F_2(P)$, заданная на множестве N со значениями в множестве $\{0,1\}$ и определяемая условиями:

$$F_2(P)=\exists xP(x)=$$
$$=\begin{cases}1, \text{ если существует } x\in M, \text{ для которого } P(x)=1,\\ 0 \text{ - в противном случае.}\end{cases}$$

Квантор существования равен нулю только для одного предиката, тождественно равного нулю: $P(x)\equiv 0$, для всех остальных предикатов он равен единице. Запись $\exists x$ читается так: «существует x такой, что ...».

Предикаты, заданные на предметной области, называют предикатами первого порядка; предикаты, заданные на множестве всех предикатов первого порядка, называют предикатами второго порядка. Кванторы можно рассматривать как простейшие предикаты второго порядка. Переменная в формуле, от которой значения функции, соответствующей этой формуле, не зависят, называется связанной переменной. Примеры связанных переменных встречаются в математике. Например, в выражениях $\int_0^1 f(x)\,dx$, $\sum_{i=1}^{n} a_i c_i$ переменные x и i являются связанными, т.к. значения интеграла и суммы от этих переменных не зависят. В выражениях кванторов $\forall xP(x)$ и $\exists xP(x)$ предметная переменная x - связанная, т.к. значение квантора от нее фактически не зависит, оно определяется только видом предиката $P(x)$. Переменная в формуле, от которой значения функции, соответствующей этой формуле, зависят, называется свободной переменной. Например, интеграл вида $\int_0^x f(x)\,dx$ уже зависит от верхнего предела x. Предметная переменная x в выражении $P(x)$ является свободной, т.к. от ее значений зависит значение предиката $P(x)$.

Кванторы допускают простую логическую интерпретацию. Например, запись $\forall xP(x)$ интерпретируем в виде высказывания «Для всех x натуральное число x - простое» или иначе «Каждое натуральное число x - простое». Содержательным путем устанавливаем, что это - ложное высказывание. Формально находим: $Q(x)\neq 1$, следовательно, $\forall xQ(x)=0$.

Запись $\exists xQ(x)$ интерпретируем как высказывание: «Существует натуральное число x, являющееся простым», или в другом варианте: «Некоторые натуральные числа x - простые». Содержательно - это истинное высказывание; формально: $Q(x)\neq 0$, следовательно $\exists xQ(x)=1$. Рассмотрим примеры перехода от формул к высказываниям. Содержательным и формальным путем определим истинностные значения полученных высказываний. Под предикатами R и S будем понимать те же самые предикаты, что и в примерах из п. 2.

Пример 1. Дана формула $\forall xR(0,x)$. Перейдем от этого предиката к формализуемому им высказыванию: «Для любого натурального числа x выполняется условие $0\leq x$». Определим истинностное значение полученного высказывания на содержательном и формальном уровнях.

Содержательно данное высказывание истинно. На формальном уровне условие $\forall x R(0,x)=1$ будет выполнено, если $\forall x R(0,x)\equiv 1$. Проверим так ли это: $R(0,1)=\mathrm{sgn}(1-0)=1$. Таким образом, $R(0,x)\neq 0$ и, следовательно, $\forall x R(0,x)=1$. Итак, мы показали, что высказывание, формализуемое предикатом $\forall x R(0,x)$, истинно на содержательном и формальном уровне.

Пример 2. Дана формула $\exists x R(x,x-1)$. Данный предикат формализует высказывание «Существует такое натуральное число x, что $x \leq x-1$». Очевидно, что на содержательном уровне данное высказывание ложно. На формальном уровне имеем: $\exists x R(x,x-1)=0$, если $R(x,x-1)=0$. В самом деле: $R(1,0)=\mathrm{sgn}(0-1)=0$, т.е. $R(x,x-1)=1$. Следовательно, $\exists x R(x,x-1)=0$, т.е. и на формальном уровне полученное высказывание ложно.

Пример 3. Дана формула $\forall x\, S(x,x,x)$. Перейдем от нее к высказыванию: «Для любого натурального числа x выполняется условие $x+x=x$». Содержательно это высказывание ложно. На формальном уровне имеем: $\forall x\, S(x,x,x)=1$, если $S(x,x,x)\equiv 1$; $S(1,1,1)=\mathrm{sgn}(1-1-1)\wedge \mathrm{sgn}(1-1-1)=$ $0\wedge 0=0$, т.е. $S(x,x,x)\neq 1$. Следовательно, $\forall x\, S(x,x,x)=0$. Итак, данный предикат формализует высказывание, ложное и на содержательном, и на формальном уровнях.

Пример 4. Дана формула $\exists x\, S(x,x,x)$. Формализуемое данным предикатом высказывание имеет вид: «Существует такой x, что выполняется условие $x+x=x$». Содержательно это высказывание истинно. На формальном уровне: $\exists x\, S(x,x,x)=0$, если $S(x,x,x)\equiv 0$; $S(0,0,0)=\mathrm{sgn}(0-0-0)\wedge$ $\mathrm{sgn}(0-0-0)=1\wedge 1=1$, т.е. $S(x,x,x)\neq 0$. Следовательно, $\exists x\, S(x,x,x)=1$. Таким образом, заданный предикат формализует высказывание, истинное на содержательном и формальном уровнях.

4. Кванторы многоместных предикатов. Понятия кванторов общности и существования легко обобщаются на случай многоместных предикатов. Квантором общности предиката $P(x_1,x_2,...,x_i,...,x_n)$ по переменной называется функция

$$F_1(P,x_1,x_2,...,x_{i-1},x_{i+1},...,x_n)= \\ =\forall x_i\, P(x_1,x_2,...,x_i,...,x_n)= \\ =\begin{cases} 1, \text{ если для всех } x_i\in M\ P(x_1,x_2,...,x_i,...,x_n)=1, \\ 0 - \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Квантором существования предиката $P(x_1,x_2,...,x_i,...,x_n)$ по переменной x_i называется функция

$$F_2(P,x_1,x_2,...,x_{i-1},x_{i+1},...,x_n)= \\ \exists x_i P(x_1,x_2,...,x_i,...,x_n)= \\ =\begin{cases} 1, \text{ если для } x_i\ P(x_1,x_2,...,x_i,...,x_n)=1, \\ 0 - \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

Кванторы многоместных предикатов зависят как от предметных переменных, так и от переменного предиката. Такие функции смешанного типа относят к предикатам второго порядка. Конкретные фиксированные предикаты называются индивидуальными предикатами. Примеры индивидуальных предикатов $Q(x)$, $R(x,y)$, $S(x,y,z)$ рассмотрены в [1, п. 2]. Заметим, что индивидуальные предикаты являются значениями переменного предиката.

Пусть $P_0(x_1,x_2,...,x_n)$ - индивидуальный n-арный предикат. Квантор индивидуального предиката представляет собой индивидуальный $(n-1)$-арный предикат:

$$\forall x_i\, P_0(x_1,x_2,...,x_i,...,x_n)=F_1(x_1,x_2,...,x_{i-1},x_{i+1}...,x_n),$$
$$\exists x_i\, P_0(x_1,x_2,...,x_i,...,x_n)=F_2(x_1,x_2,...,x_{i-1},x_{i+1}...,x_n).$$

На $(n-1)$-арный предикат можно снова действовать одним из двух кванторов по одной из оставшихся свободных переменных, в результате получаем $(n-2)$-арный предикат и т.д. Кванторы унарных индивидуальных представляют собой булевы константы: $\forall x\, P_0(x)=\sigma_1$; $\exists x\, P_0(x)=\sigma_2$; $\sigma_1, \sigma_1 \in \{0,1\}$. Таким образом, в результате n-кратного действия кванторами на n-арный индивидуальный предикат, получаем булеву константу. Кванторы многоместных индивидуальных предикатов допускают простую логическую интерпретацию. Покажем это на примерах перехода к высказываниям от заданных формул. Истинностные значения получаемых высказываний будем определять содержательным и формальным способами.

Пример 1. Формулу $\forall x, y\, R(x,y)$ интерпретируем как высказывание «Для любых x,y выполняется условие $x \le y$». Содержательно это ложное высказывание. На формальном уровне имеем: $R(1,0)=0$, а следовательно $R(1,y)\ne 1$, т.е. $\forall y R(1,y)=0$. Следовательно, $F(x)=\forall y\, R(x,y)\ne 1$, откуда $\forall x\, F(x)=\forall x, y\, R(x,y)=0$. Таким образом, данный предикат формализует высказывание, ложное и на содержательном, и на формальном уровнях.

Пример 2. Формулу $\exists x \forall y\, R(x,y)$ интерпретируем как высказывание «Существует x такой, что для любого y $x \le y$». Содержательно данное высказывание истинно. Формально имеем: $R(0,1)=\mathrm{sgn}(1-0)=1$, откуда $R(0,y)\ne 0$. Следовательно, $\forall y R(0,y)=1$, поэтому $F(x)=\forall y\, R(x,y)\ne 0$. Таким образом, $\exists x\, F(x)=1$, т.е. $\forall x, y\, R(x,y)=1$. На формальном уровне данное высказывание также истинно.

Пример 3. Предикат $\exists y \forall x\, R(x,y)$ формализует высказывание «Для любого натурального числа x найдется такое натуральное число y, что $x \le y$». Содержательно это ложное высказывание. Формально имеем: $R(x,0)=\mathrm{sgn}(0-x)=\mathrm{sgn}(x-0)=0$, следовательно, $\forall x\, R(x,0)=0$. Поэтому $F(x)=\forall x\, R(x,0)=0$. Таким образом, $\exists y\, F(y)=0$, т.е. $\exists y \forall x\, R(x,y)=0$. Итак мы показали, что данное высказывание ложно и на содержательном, и на формальном уровнях.

Пример 4. Предикат $\forall x, y, z\, S(x,y,z)$ формализует высказывание «Для всех натуральных чисел x,y,z $x+y=z$». Содержательно данное высказывание ложно. На формальном уровне: $S(1,3,5)=\mathrm{sgn}(1+3-5)\wedge \mathrm{sgn}(5-1-3)=0\wedge 1=0$, следовательно, $S(a,b,z)\ne 1$, где a,b - натуральные числа. Следовательно, имеет место $S(a,b,z)=0$, поэтому $F_1(y)=\forall z\, S(a,b,z)\ne 1=0$, $F_2(y)=\forall y,z\, S(a,y,z)=0$. Таким образом, $F_3(x)=\forall x\, F_2(x)=0$, т.е. $\forall x,y,z\, S(x,y,z)=0$, на формальном уровне данное высказывание ложно.

Пример 5. Предикат $\forall x, y, z\, S(x,y,z)$ формализует высказывание «Для любых натуральных чисел x и y найдется такое натуральное число z, такое что $x+y=z$». На содержательном уровне это высказывание истинно. На формальном уровне имеем: $S(1,2,3)=\mathrm{sgn}(1+2-3)\wedge \mathrm{sgn}(3-1-2)=1\wedge 1=1$, следовательно, $S(a,b,z)\ne 0$, где a,b - натуральные числа. Тогда $\exists z\, S(a,b,z)=1$, поэтому $F_1(y)=\exists z\, S(a,y,z)\ne 0=1$. Таким образом, $F_2(x)=\forall y \exists z\, S(x,y,z)=1$, $F_3=\forall x\, F_2(x)= =\forall x, y \exists z\, S(x,y,z)=1$. Итак, мы показали, что данное высказывание истинно и на содержательном, и на формальном уровнях.

ВЫВОДЫ

Итак, в работе рассмотрено решение проблемы полного математического описания высказываний путем изучения структуры простых высказываний. Использован аппарат исчисления предикатов, являющийся обобщением алгебры логики. Исчисление предикатов формализует логику предикатов и обобщает исчисление высказываний. Приведены примеры построения формул для предикатов, формализующих высказывания и высказываний по формулам предикатов. Рассмотрены кванторные функции от унарных предикатов и примеры формализации высказываний соответствующими предикатами второго порядка.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Leschinskiy V.A. O logicheskoy formalizacii sloznyh vyskazivaniy // Sistemy obrabotki informacii. – Harkov: HUPS. – 2016. – №8(145). – S. 73-76.
2. Leschinskiy V.A. O teoremah ischisleniya vyskazyvaniy // Sistemy obrabotki informacii. – Harkov: HUPS. – 2016. – №9(146). – S. 97-100.
3. Leschinskiy V.A. O formalnyh svoystvah ischisleniya vyskazyvaniy // Sbornik nauchnyh trudov HUPS. – Harkov: HUPS. – 2016. – №3(47). – S. 85-87.
4. Ewa Walaszewska Relevance-theoretic Lexical Pragmatics: Theory and Applications / Cambridge Scholars Publishing, 2015 – 230 p.
5. Leschinskiy V.A., Leshchynska I.O. O formulnoy zapisi slozhnyh vyskazyvaniy // Sbornik nauchnyh trudov HUPS. – Harkov: HUPS. – 2016. - №2(47). - S. 105-107.
6. Shabanov-Kushnarenko S.Yu., Abed Tamer Kudhair, Leshchynska I.O. Razrabotka predikatnyh modeley logicheskih svyazey ponyatiy // Sbornik nauchnyh trudov HUPS. – Harkov: HUPS. - 2013. - №4. - S. 144-147.
7. Shabanov-Kushnarenko S.Yu., Abed Tamer Kudhair, Leshchynska I.O. Predikatnyi podhod k formalizacii neyavnyh znaniy // Sistemy obrabotki informacii. – Harkov: HUPS. – 2013. - №9. - S. 113-116.
8. Leschinskiy V.A., Leshchynska I.O. O formulnom opisanii peremennyh slozhnyh vyskazyvaniy // Sbornik nauchnyh trudov HUPS. – Harkov: HUPS. – 2016. - №3(48). - S. 92-95.
9. Bondarenko M.F., Shabanov-Kushnarenko Yu.P. Teoriya intellekta. Uchebnik – Harkov: izd-vo SMIT, 2007 – 576 s.
10. Nilson N. Principy iskusstvennogo intellekta. - M.: Kniga po Trebovaniyu, 2012. – 369 s.

Рецензент: д.т.н., проф. Шостак І. В.,
Національний аерокосмічний університет
«ХАІ» ім. М.Є. Жуковського