

УДК 539.3

*В. Ф. Мейш, д-р физ.-мат. наук, Т. В. Шипицына*

## ОСЕСИММЕТРИЧНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ ПРИ ДЕЙСТВИИ НЕСТАЦИОНАРНОЙ НАГРУЗКИ

В работе рассмотрена задача осесимметричных колебаний цилиндрической оболочки переменной толщины при действии нестационарной нагрузки. Приведена постановка и разработан алгоритм решения поставленной задачи. Система дифференциальных уравнений основана на использовании теории оболочек типа Тимошенко. Приведен пример расчета динамического поведения цилиндрической оболочки переменной толщины при нестационарной нагрузке.

**Ключевые слова:** цилиндрические оболочки, переменная толщина, теория оболочек типа Тимошенко, вынужденные колебания, численные методы.

**Введение.** Задачам поведения неоднородных по толщине цилиндрических оболочек при действии различного вида нагрузок посвящено значительное число публикаций. Условно публикации по данной тематике можно разбить на три группы: статические задачи с учетом неоднородности по толщине оболочки [2, 3, 7], задача на собственные и гармонические колебания [1, 4, 6] и задачи на вынужденные колебания неоднородных оболочек [5, 8]. Практически отсутствуют работы по динамическому поведению неоднородных цилиндрических оболочек при нестационарных нагрузках. Предлагаемая работа относится к третьей группе публикаций – задачи динамики оболочек переменной толщины при нестационарных нагрузках [9].

В рамках модели уравнений теории оболочек типа Тимошенко приведена постановка исходной задачи, построен численный алгоритм решения задачи, проведен анализ численных результатов.

**Изложение основного материала.** В данной работе рассматривается постановка задачи динамического поведения цилиндрических оболочек переменной толщины при действии нестационарной нагрузки. Предполагается, что неоднородная по толщине цилиндрическая оболочка находится под действием внутренней распределенной нагрузки  $P_3(x, t)$ , где  $x$  и  $t$  – пространственная и временная координаты.

При построении математической модели процесса динамического деформирования цилиндрической оболочки переменной толщины используется геометрически и физически линейный вариант теории оболочек типа Тимошенко [5, 8].

Уравнения колебаний цилиндрической оболочки имеют следующий вид:

$$\frac{\partial T_{11}}{\partial x} = \rho h(x) \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}; \quad (1)$$

$$\frac{\partial T_{13}}{\partial x} - k_2 T_{22} + P_3(x, t) = \rho h(x) \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2};$$

$$\frac{\partial M_{11}}{\partial x} - T_{13} = \rho \frac{h^3(x)}{12} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2}.$$

Соотношения усилия – моменты с соответствующими величинами деформаций имеют вид:

$$T_{11} = B_{11}(x)(\varepsilon_{11} + \nu_2 \varepsilon_{22}), \quad T_{22} = B_{22}(x)(\varepsilon_{22} + \nu_1 \varepsilon_{11}), \quad T_{13} = B_{13}(x) \varepsilon_{13}; \quad (2)$$

$$M_{11} = D_{11}(x)(\kappa_{11} + \nu_2 \kappa_{22}), \quad M_{22} = D_{22}(x)(\kappa_{22} + \nu_1 \kappa_{11});$$

$$B_{11}(x) = \frac{E_1 h(x)}{r \nu_1 \nu_2}, \quad B_{22}(x) = \frac{E_2 h(x)}{r \nu_1 \nu_2}, \quad B_{13}(x) = G_{13}(x) h(x);$$

$$D_{11}(x) = \frac{E_1 h^3(x)}{12(1 - \nu_1 \nu_2)}, \quad D_{22}(x) = \frac{E_2 h^3(x)}{12(1 - \nu_1 \nu_2)}.$$

Деформационные соотношения представлены следующими формулами:

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x}, \quad \varepsilon_{22} = k_2 u_3, \quad \varepsilon_{13} = \varphi_1 + \frac{\partial u_3}{\partial x}, \quad \kappa_{11} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}. \quad (3)$$

В формулах (1)–(3)  $u_1(x, t)$ ,  $u_3(x, t)$ ,  $\varphi_1(x, t)$  – компоненты обобщенного вектора перемещений срединной поверхности оболочки;  $h(x)$  – переменная толщина оболочки;  $\rho$  – плотность материала оболочки;  $E_1, E_2, G_{13}, \nu_1, \nu_2$  – физико-механические параметры материала оболочки.

Для вычисления жесткостных характеристик оболочки толщина  $h$  определяется как линейная функция координаты  $x$ :

$$h(x) = h(x_0) + [h(x_N) - h(x_0)] \frac{x}{L}, \quad (4)$$

$$x_N - x_0 = L, \quad x_0 \leq x \leq x_N.$$

Уравнения колебаний (1)–(3) дополняются соответствующими граничными и начальными условиями. В случае жесткого защемления торцов оболочки при  $x = x_0$  и  $x = x_N$  граничные условия имеют вид

$$u_1 = u_3 = \varphi_1 = 0. \quad (5)$$

Начальные условия при  $t = 0$  имеют вид

$$u_1 = u_3 = \varphi_1 = 0, \quad \frac{\partial u_1}{\partial t} = \frac{\partial u_3}{\partial t} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} = 0. \quad (6)$$

**Численный алгоритм решения задачи.** Численный алгоритм решения начально-краевой задачи (1)–(6) основан на применении интегро-интерполяционного метода построения разностных соотношений по пространственной координате  $x$  и явной аппроксимации по временной координате  $t$  [5, 8, 10].

Разностные соотношения имеют вид:

– для уравнений (1)

$$\frac{T_{11i\pm 1/2}^n - T_{11i-1/2}^n}{\Delta x} = \rho h(x_i) \left( u_{1i}^n \right)_{,t}; \quad (7)$$

– для уравнений (2)

$$T_{11i\pm 1/2}^n = B_{11}(x_{i\pm 1/2})(\varepsilon_{11i\pm 1/2}^n + \nu_2 \varepsilon_{22i\pm 1/2}^n), \quad (8)$$

$$T_{22i\pm 1/2}^n = B_{22}(x_{i\pm 1/2})(\varepsilon_{22i\pm 1/2}^n + \nu_1 \varepsilon_{11i\pm 1/2}^n),$$

$$T_{13i\pm 1/2}^n = B_{13}(x_{i\pm 1/2})\varepsilon_{13i\pm 1/2}^n,$$

$$M_{11i\pm 1/2}^n = D_{11}(x_{i\pm 1/2})(\kappa_{11i\pm 1/2}^n + \nu_2 \kappa_{22i\pm 1/2}^n),$$

$$M_{22i\pm 1/2}^n = D_{22}(x_{i\pm 1/2})(\kappa_{22i\pm 1/2}^n + \nu_1 \kappa_{11i\pm 1/2}^n);$$

– для уравнений (3)

$$\varepsilon_{11i\pm 1/2}^n = \frac{u_{1i\pm 1}^n - u_{1i}^n}{\Delta x}, \quad \varepsilon_{11i-1/2}^n = \frac{u_{1i}^n - u_{1i-1}^n}{\Delta x}, \quad (9)$$

В уравнениях (7)–(9)  $\Delta x$  – разностный шаг по пространственной координате  $x$ ; индексы  $i, i \pm 1/2, n$  относятся к кинематическим и силовым величинам в дискретных точках пространственной координаты  $x_i, x_{i\pm 1/2}$  и временной координаты  $t_n$ . Обозначения разностных производных по временной координате  $t$  вводятся согласно [10].

**Численные результаты.** В качестве примера рассматривалась задача динамического поведения цилиндрической оболочки переменной толщины с жестко заземленными торцами под действием нормальной распределенной нагрузки  $P_3(x, t)$ . Граничные и начальные условия принимались согласно формулам (5), (6). Закон изменения толщины  $h(x)$  принимался согласно (4). Изотропная цилиндрическая оболочка рассматривалась при следующих параметрах:  $R_0 = 0,3 \text{ м}$ ;  $L = 0,4 \text{ м}$ ;  $h(x_0) = 10^{-2} \text{ м}$ ;  $h(x_N) = 2 \cdot 10^{-2} \text{ м}$ ;  $E = 7 \cdot 10^{11} \text{ Па}$ ;  $\nu = 0,3$ .

Нестационарная импульсная нагрузка задавалась в виде

$$P_3(x, t) = A \cdot \sin \frac{\pi t}{T} [\eta(t) - \eta(t - T)],$$

где  $A$  – амплитуда загрузки;  $T$  – длительность нагрузки. В расчетах полагалось  $A = 10^6 \text{ Па}$ ;  $T = 50 \cdot 10^{-6} \text{ с}$ .

Также были проведены расчеты динамического поведения цилиндрической оболочки постоянной толщины, масса которой совпадает с массой исходной цилиндрической оболочки переменной толщины при вышеуказанных параметрах.

Численные расчеты проводились на временном промежутке  $0 \leq t \leq 40T$ . На рис. 1 приведены зависимости перемещения  $u_3$  по пространственной координате  $x$  в момент времени  $t = 8,5T$  (время достижения максимального значения величины  $u_3$  на исследуемом временном интервале). Кривая с индексом 1 соответствует случаю цилиндрической оболочки переменной толщины, с индексом 2 – цилиндрической оболочки постоянной толщины. В дальнейшем будем придерживаться указанных обозначений.

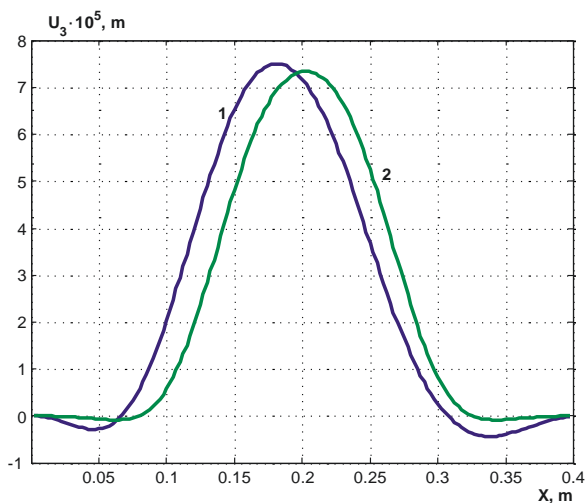


Рис. 1 – Зависимость перемещения  $u_3$  по пространственной координате  $x$  в момент времени  $t = 8,5T$

На рис. 2 приведены зависимости величины  $\varepsilon_{22}$  по пространственной координате  $x$  в момент времени  $t = 8,5T$ .

Зависимости величины  $\sigma_{22}$  по пространственной координате  $x$  в момент времени  $t = 8,5T$  изображены на рис. 3.

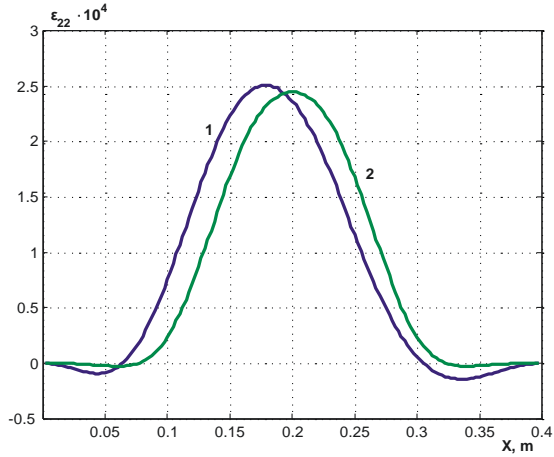


Рис. 2 – Зависимость деформации  $\varepsilon_{22}$  по пространственной координате  $x$  в момент времени  $t = 8,5T$

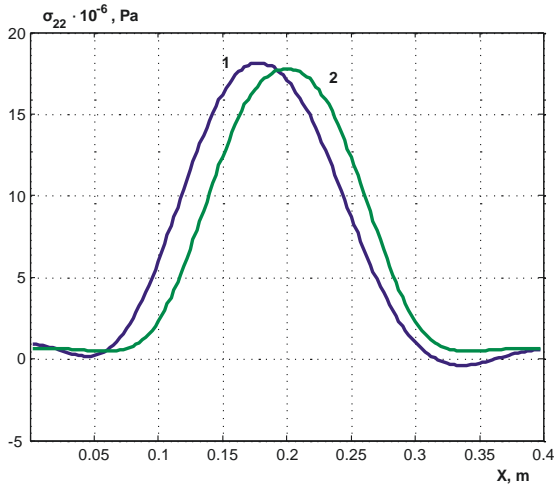


Рис. 3 – Зависимость напряжения  $\sigma_{22}$  по пространственной координате  $x$  в момент времени  $t = 8,5T$

Исходя из первых трёх рисунков, можно разделить исследуемую область по пространственной координате  $x$  на три подобласти:

$$0 \leq x \leq \frac{3}{8}L, \quad \frac{3}{8}L \leq x \leq \frac{5}{8}L \quad \text{и} \quad \frac{5}{8}L \leq x \leq L.$$

В первой подобласти  $0 \leq x \leq \frac{3}{8}L$  (толщина неоднородной цилиндрической оболочки меньше толщины оболочки с постоянной толщиной) наблюдается увеличение значений исследуемых величин  $u_3$ ,  $\varepsilon_{22}$ ,  $\sigma_{22}$  оболочки с переменной толщиной по сравнению с соответствующими значениями величин оболочки с постоянной толщиной на 10% – 30%. В третьей подобласти  $\frac{5}{8}L \leq x \leq L$  наблюдается обратная картина (толщина неоднородной цилиндрической оболочки больше толщины оболочки с постоянной толщиной) – значения исследуемых величин  $u_3$ ,  $\varepsilon_{22}$ ,  $\sigma_{22}$  оболочки с постоянной толщиной преваляют над соответствующими значениями величин неоднородной цилиндрической оболочки. В частности, на рис. 4 и рис. 5 приведены зависимости величин  $u_3$ ,  $\sigma_{22}$  от временной координаты  $t$  в сечении  $x = L/2$ . Приведенный графический материал подтверждает сделанные выводы о закономерности распределения величин, в частности перемещений  $u_3$  и напряжений  $\sigma_{22}$ , по пространственной координате  $x$ . Следует отметить совпадение частот вынужденных колебаний величин  $u_3$ ,  $\sigma_{22}$  согласно вариантам 1 и 2. Графики зависимостей указанных величин приведены на рис. 4 и рис. 5.

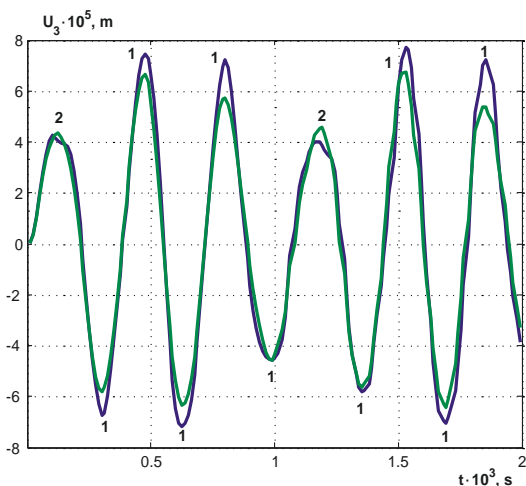


Рис. 4 – Зависимость перемещения  $u_3$  по времени  $t$  в сечении оболочки  $x = L/2$

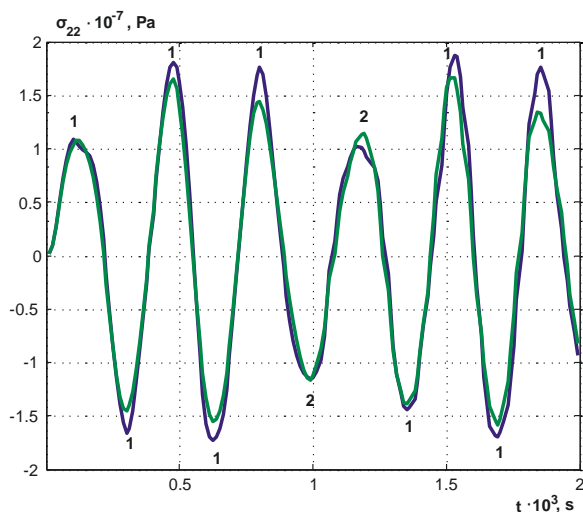


Рис. 5 – Зависимость напряжения  $\sigma_{22}$  по времени  $t$  в сечении оболочки  $x = L/2$

**Выводы.** В работе дана постановка задачи о вынужденных осесимметричных колебаниях цилиндрических оболочек переменной толщины при действии нестационарной нагрузки. Разработан численный алгоритм решения данного класса задач. Приведены результаты и проведен количественный и качественный анализ полученных данных.

**Перспективы дальнейшего развития в данном направлении.** Представляют интерес исследования нестационарных задач в аналогичной постановке при других граничных условиях, а также решение неосесимметричных задач о вынужденных колебаниях цилиндрических оболочек переменной толщины.

### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЕ ССЫЛКИ

1. **Амиро И. Я.** Методы расчета оболочек. Т. 2. Теория ребристых оболочек / И. Я. Амиро, В. А. Заруцкий. – К. : Наук. думка, 1980. – 376 с.
2. **Григоренко Я. М.** Изотропные и анизотропные слоистые оболочки вращения переменной жесткости / Я. М. Григоренко. – К. : Наук. думка, 1973. – 228 с.
3. **Григоренко Я. М.** Теория оболочек переменной жесткости. Методы расчета оболочек / Я. М. Григоренко, А. Т. Василенко. – К. : Наук. думка, 1982. – Т. 4. – 544 с.
4. **Григоренко Я. М.** Свободные колебания оболочечных конструкций / Я. М. Григоренко, Е. И. Беспалова, А. Б. Китайгородский, А. И. Шинкарь. – К. : Наук. думка, 1986. – 172 с.
5. **Головко К. Г.** Динамика неоднородных оболочек при нестационарных нагрузках: монография / К. Г. Головко, П. З. Луговой, В. Ф. Мейш; под ред. акад. НАН Украины А. Н. Гузя. – К. : Изд-во полигр. центр «Киевский ун-т», 2012. – 541 с.
6. **Гонткевич В. С.** Собственные колебания пластинок и оболочек: справочник / В. С. Гонткевич. – К. : Наук. думка, 1964. – 288 с.
7. **Коваленко А. Д.** Теория тонких конических оболочек и её приложение в машиностроении / А. Д. Коваленко, Я. М. Григоренко, Л. А. Ильин. – К. : Изд. АН УССР, 1963. – 287 с.

8. **Луговой П. З.** Нестационарная динамика неоднородных оболочечных конструкций: монография / П. З. Луговой, В. Ф. Мейш, Э. А. Штанцель. – К. : Изд-во полигр. центр «Киевский ун-т», 2005. – 537 с.

9. **Мейш В. Ф.** Осесимметричные колебания конических оболочек переменной толщины при действии нестационарной нагрузки / В. Ф. Мейш, В. М. Мельник // Проблемы обчислювальної механіки і міцності конструкцій: зб. наук. праць. – Д. : Вид-во Дніпропетр. нац. ун-ту, 2012. – Вип. 18. – С. 132–139.

10. **Самарский А. А.** Теория разностных схем / А. А. Самарский. – М. : Наука, 1977. – 656 с.

*В. Ф. Мейш, д-р фіз.-мат. наук, Т. В. Шипіцина*

## **ОСЕСИМЕТРИЧНІ КОЛИВАННЯ ЦИЛІНДРИЧНИХ ОБОЛОНОК ЗМІННОЇ ТОВЩИНИ ПІД ДІЄЮ НЕСТАЦІОНАРНОГО НАВАНТАЖЕННЯ**

В роботі розглянута задача про осесимметричні коливання циліндричної оболонки змінної товщини при дії нестационарного навантаження. Приведено постановку та розроблено алгоритм розв'язку поставленої задачі. Система диференціальних рівнянь базується на застосуванні теорії оболонок типу Тимошенка. Наведено конкретний приклад розрахунку динамічної поведінки циліндричної оболонки змінної товщини при нестационарному навантаженні.

*Ключові слова:* циліндричні оболонки, змінна товщина, теорія оболонок типу Тимошенка, вимушені коливання, чисельні методи.

*V. F. Meish, Professor, T. V. Shypitsyna*

## **AXISYMMETRIC VIBRATIONS OF A VARIABLE THICKNESS CYLINDRICAL SHELLS UNDER THE ACTION OF NONSTATIONARY LOAD**

A problem of axisymmetric vibrations of variable thickness cylindrical shell under the action of nonstationary load is considered. The problem formulation and the numerical algorithm for its solution are represented. The system of differential equations based on the Timoshenko-type shell theory is obtained. As an example the results of analysis of nonstationary vibrations of variable thickness cylindrical shells are presented.

*Keywords:* cylindrical shells, variable thickness, Timoshenko-type shell theory, forced vibrations, numerical method.

**Introduction.** The problems of the dynamic behavior of inhomogeneous thickness cylindrical shells under the action of different types of loads were investigated. The publications on this subject can be divided into three groups: static problems taking into account the inhomogeneous of the thickness of the shell [2], problems of the harmonic vibrations [1, 3] and problems for the forced vibrations of inhomogeneous shells [5]. The present paper belongs to the third group of the publications – dynamic problems of the variable thickness shells under nonstationary loading [6].

The problem of the dynamic behavior of cylindrical shells of variable thickness under the action of the nonstationary loading is considered in the framework of model of the Timoshenko-type shell theory.

**The presentation of the main material.** In the present paper, the problem formulation of the dynamic behavior of the cylindrical shells of variable thickness under the action of the nonstationary loading is considered. It is assumed that



a cylindrical shell is rigidly clamped on the ends and is loaded of the normal distributed loading  $P_3(x, t)$ , where  $x$  and  $t$  are the spatial and temporal coordinates.

Geometrically and physically linear variant of the Timoshenko-type shell theory is used for constructing a mathematical model of the dynamic deformation process of the cylindrical shell of variable thickness [4, 5].

The vibration equations of the cylindrical shells have the following form

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_{11}}{\partial x} = \rho h(x) \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial T_{13}}{\partial x} - k_2 T_{22} + P_3(x, t) = \rho h(x) \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2}, \quad (1) \\ \frac{\partial M_{11}}{\partial x} - T_{13} = \rho \frac{h^3(x)}{12} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2}. \end{aligned}$$

The relation of the forces – moments with corresponding values of deformations have the form

$$\begin{aligned} T_{11} = B_{11}(x)(\varepsilon_{11} + \nu_2 \varepsilon_{22}), \quad T_{22} = B_{22}(x)(\varepsilon_{22} + \nu_1 \varepsilon_{11}), \quad T_{13} = B_{13}(x) \varepsilon_{13}, \quad (2) \\ M_{11} = D_{11}(x)(\kappa_{11} + \nu_2 \kappa_{22}), \quad M_{22} = D_{22}(x)(\kappa_{22} + \nu_1 \kappa_{11}), \\ B_{11}(x) = \frac{E_1 h(x)}{r \nu_1 \nu_2}, \quad B_{22}(x) = \frac{E_2 h(x)}{r \nu_1 \nu_2}, \quad B_{13}(x) = G_{13}(x) h(x), \\ D_{11}(x) = \frac{E_1 h^3(x)}{12(1 - \nu_1 \nu_2)}, \quad D_{22}(x) = \frac{E_2 h^3(x)}{12(1 - \nu_1 \nu_2)}. \end{aligned}$$

The deformation ratio can be written in the forms

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x}, \quad \varepsilon_{22} = k_2 u_3, \quad \varepsilon_{13} = \varphi_1 + \frac{\partial u_3}{\partial x}, \quad \kappa_{11} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}. \quad (3)$$

In formulas (1)–(3)  $u_1(x, t)$ ,  $u_3(x, t)$ ,  $\varphi_1(x, t)$  are the components of the generalized displacements vector of the middle surface of shell;  $h(x)$  – the variable thickness of the shell;  $\rho$  – the density of the shell material;  $E_1, E_2, G_{13}, \nu_1, \nu_2$  – physic-mechanical parameters of the shell material.

The shell thickness  $h$  is obtained as a linear function of the coordinates  $x$ :

$$h(x) = h(x_0) + [h(x_N) - h(x_0)] \frac{x}{L}, \quad x_N - x_0 = L, \quad x_0 \leq x \leq x_N. \quad (4)$$

The corresponding boundary and initial conditions are added to the vibration equations (1)–(3). The boundary conditions have the following form for the case of rigid fixing of shell ends for  $x = x_0$  and  $x = x_N$

$$u_1 = u_3 = \varphi_1 = 0. \quad (5)$$

The initial conditions at the  $t = 0$  have the form

$$u_1 = u_3 = \varphi_1 = 0, \quad \frac{\partial u_1}{\partial t} = \frac{\partial u_3}{\partial t} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} = 0. \quad (6)$$

**Numerical algorithm of the problem solution.** The numerical algorithm of solution of the initial–boundary value problem (1)–(6) is based on the application of the integro–interpolation method of the constructing differential relations on the spatial coordinate  $x$  and explicit approximations of the time coordinate  $t$  [4, 5, 7].

**Numerical results.** As a numerical example, we consider the problem of the dynamic behavior of a cylindrical shell of variable thickness with a rigid fixing of the ends under the action of the normal distributed loading  $P_3(x, t)$ . The boundary and initial conditions are defined by the formulas (5), (6). The law of change of the shell thickness is received according to (4). Isotropic cylindrical shell was considered for the following parameters:  $R_0 = 0.3 \text{ m}$ ;  $L = 0.4 \text{ m}$ ;  $h(x_0) = 10^{-2} \text{ m}$ ;  $h(x_N) = 2 \cdot 10^{-2} \text{ m}$ ;  $E = 7 \cdot 10^{11} \text{ Pa}$ ;  $\nu = 0.3$ .

The nonstationary loading impulse is given in the form

$$P_3(x, t) = A \cdot \sin \frac{\pi t}{T} [\eta(t) - \eta(t - T)],$$

where  $A$  is an amplitude of the load;  $T$  – a duration of the load. Results were obtained for the following values of the parameters  $A = 10^6 \text{ Pa}$ ;  $T = 50 \cdot 10^{-6} \text{ s}$ .

Also the calculations of the dynamic behavior of a cylindrical shell of the constant thickness, the mass of which coincides with the mass of the original cylindrical shell of the variable thickness with the above parameters were carried out.

Numerical calculations were carried out for the time interval  $0 \leq t \leq 40T$ . The dependence of the displacement  $u_3$  on the spatial coordinate  $x$  at the time  $t = 8.5T$  (time to reach the maximum values  $u_3$  the studied time interval) is shown in fig. 1. Curve with an index of 1 corresponds to the case of a cylindrical shell of variable thickness, with an index of 2 – cylindrical shell of constant thickness.

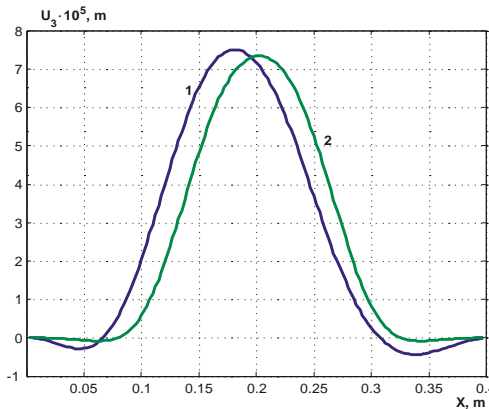


Fig. 1 – Dependence of the displacement  $u_3$  on the spatial coordinate  $x$  at the time  $t = 8.5T$

It should be noted the frequency of forced vibrations of the values  $u_3$  according to options 1 and 2 are coincided.

## REFERENCES

1. **Amiro I. Ya.** The methods of calculation of shells. Vol. 2. The theory of ribbed shells / I. Ya. Amiro, V. A. Zarutskiyi. – K. : Scientific Dumka, 1980. – 376 p. (in Russian).
2. **Grigorenko Ya. M.** Isotropic and anisotropic layered shells of rotation of a variable stiffness / Ya. M. Grigorenko. – K. : Scientific Dumka, 1973. – 228 p. (in Russian).
3. **Grigorenko Ya. M.** Free vibrations of the shell constructions / Ya. M. Grigorenko, E. Bespalova, A. B. Kitaygorodskiyi, A. Shynkar. – K. : Scientific Dumka, 1986. – 172 p. (in Russian).
4. **Golovko K. G.** Dynamics of inhomogeneous shells under nonstationary loading: monograph / K. G. Golovko, P. Z. Lugovoyi, V. F. Meish; edited by academician. NAS of Ukraine, A. N. Guzya. – K. : Ed. print. center «Kyiv Univ.», 2012. – 541 p. (in Russian).
5. **Lugovoyi P. Z.** The nonstationary dynamics of inhomogeneous shell constructions: monograph / P. Z. Lugovoyi, V. F. Meish, E. A. Shtantsel. – K. : Ed. print. center «Kyiv Univ.», 2005. – 537 p. (in Russian).
6. **Meish V. F.** Axisymmetric oscillations of conical shells of variable thickness under the action of nonstationary loading / V. F. Meish, V. M. Melnik // Problems of computational mechanics and strength of structures. Dnipropetr. national Univ. – D., 2012, Is. 18. – P. 132–139 (in Russian).
7. **Samarskiyi A. A.** Theory of difference schemes / A. A. Samarskiyi. – M. : Science, 1977. – 656 p. (in Russian).

*Институт механики им. С. П. Тимошенко  
НАН Украины,  
Киев, Украина*

*Поступила в редколлегию 01.04.2013*