

УДК 539.3

О. А. Авраменко, канд. физ.-мат. наук, Ю. А. Авраменко

О ВЛИЯНИИ ИСКРИВЛЕНИЯ ОСИ НА НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНЫХ ТОРОИДАЛЬНЫХ ОБОЛОЧЕК ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ

Дано решение задачи и проведено исследование напряженно-деформированного состояния трансверсально-изотропных тороидальных оболочек переменной толщины. Постановленная краевая задача описывается системой дифференциальных уравнений в частных производных с переменными коэффициентами. Сведение двумерной задачи к одномерной осуществляется с помощью сплайн-аппроксимации решения. Полученная одномерная краевая задача решается устойчивым численным методом дискретной ортогонализации. Приводятся данные о распределении полей перемещений и напряжений в зависимости от искривления оси оболочки и изменения параметров переменной толщины.

Ключевые слова: тороидальные оболочки, напряженное состояние, уточненная теория оболочек, метод сплайн-аппроксимации, метод дискретной ортогонализации.

Введение. Оболочки как конструктивные элементы достаточно часто используются в различных отраслях современной техники, таких как судостроение, самолетостроение, ракетостроение, газовая и химическая промышленность и др. [2, 7, 9, 17, 18]. Это объясняется тем, что оболочки обладают выгодными упругими свойствами и при рациональном проектировании могут выдержать значительные нагрузки, что позволяет создать из них весьма легкие конструкции достаточной прочности. С увеличением требований к современным конструкциям широкое применение получили оболочки сложной формы с переменными параметрами [6, 9, 13]. К таким оболочкам относятся тороидальные оболочки [2, 11] переменной толщины. Исследование прочностных характеристик оболочек такого типа с применением классической теории может привести к значительным погрешностям. Поэтому расчет напряженно-деформированного состояния таких оболочек предлагается выполнять с привлечением уточненной теории оболочек типа Тимошенко [4, 8, 14]. Сложность решения этих задач обусловлена не только высоким порядком системы уравнений и переменностью коэффициентов, но и необходимостью точно удовлетворить заданным граничным условиям.

В настоящей статье исследуется влияние переменности толщины и искривления оси на напряженно-деформированное состояние тороидальных трансверсально-изотропных оболочек при жестком закреплении торцов. Для решения рассматриваемого класса двумерных краевых задач предлагается подход, основанный на сплайн-аппроксимации [1, 5, 7, 9, 10] искомого решения в одном координатном направлении для чего разрешающие функции представляются в виде линейной комбинации кубических В-сплайнов [10]. Для решения полученной при этом одномерной краевой задачи используется устойчивый численный метод дискретной ортогонализации [3, 6, 9, 15, 16].

Постановка задачи. Будем рассматривать замкнутые в поперечном сечении усеченные тороидальные трансверсально-изотропные оболочки переменной толщины с круговым поперечным сечением (рис. 1), которые находятся под действием внутреннего нормального давления и жестко закреплены на торцах. Координатную поверхность оболочки отнесем к системе ортогональных криволинейных координат η, θ , где η – угол в осевом сечении, а θ – угол в поперечном сечении оболочки, при этом $\eta_1 \leq \eta \leq \eta_2, -\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$.

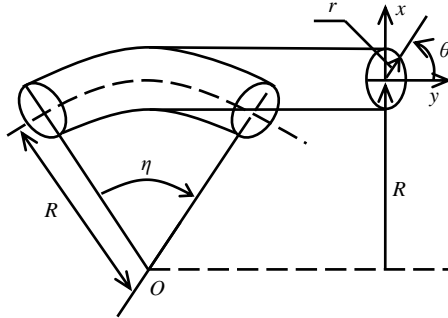


Рис. 1 – Трансверсально-изотропная оболочка

Первая квадратичная форма срединной поверхности оболочки запишется в виде [6]:

$$dS^2 = A_1^2 d\alpha_1^2 + A_2^2 d\alpha_2^2; \quad (1)$$

$$A_1 = R + r \sin \theta, \alpha_1 = \eta, \alpha_2 = \theta, \eta_1 \leq \eta \leq \eta_2, -\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2, \quad (2)$$

где R – радиус осевой окружности; r – радиус окружности в поперечном сечении.

Оболочка находится под действием внутреннего нормального давления $q = q(\eta, \theta)$.

Толщина оболочки изменяется согласно закону

$$h(\theta) = h_0(1 + \beta \cos 2\theta), h_0 = \text{const}, \beta < 1. \quad (3)$$

При этом объем оболочки остается неизменным при изменении параметра

β . Ввиду того, что выражение $\int_0^{2\pi} (1 + \beta \cos 2\theta) d\theta = 2\pi = \text{const}$ не зависит от θ ,

толщина всей оболочки $H = \int_0^L \int_0^{2\pi} h(\eta, \theta) d\eta d\theta$ при различных значениях β

не меняет свое значение, то есть выполняется требование сохранения объема.

Напряженно-деформированное состояние оболочки исследуется по уточненной теории оболочек типа Тимошенко, которая базируется на гипотезе прямой линии. Суть этой гипотезы состоит в том, что первоначально нормальный к координатной поверхности элемент после деформации остается прямолинейным, но уже не перпендикулярным к деформированной координатной поверхности. При этом предполагается, что отсутствует обжатие по толщине [8].

Согласно принятой гипотезе перемещения оболочки выражаются по формулам:

$$\begin{aligned} u_\eta(\eta, \theta, \gamma) &= u(\eta, \theta) + \lambda \psi_\eta(\eta, \theta); \\ u_\theta(\eta, \theta, \gamma) &= v(\eta, \theta) + \lambda \psi_\theta(\eta, \theta); \\ u_\gamma(\eta, \theta, \gamma) &= w(\eta, \theta), \end{aligned} \quad (4)$$

где η, θ, γ – координаты точек оболочки в направлениях образующей, направляющей и нормали к выбранной координатной поверхности; ψ_η, ψ_θ – полные углы поворота прямолинейного элемента.

В соответствии с (4) выражения для деформации имеют вид [8]:

$$\begin{aligned} e_\eta(\eta, \theta, \gamma) &= \varepsilon_\eta(\eta, \theta) + \gamma \chi_\eta(\eta, \theta); \\ e_\theta(\eta, \theta, \gamma) &= \varepsilon_\theta(\eta, \theta) + \gamma \chi_\theta(\eta, \theta); \\ e_{\eta\theta}(\eta, \theta, \gamma) &= \varepsilon_{\eta\theta}(\eta, \theta) + \gamma^2 \chi_{\eta\theta}(\eta, \theta); \\ e_{\eta\gamma}(\eta, \theta, \gamma) &= \gamma_\eta(\eta, \theta); \\ e_{\theta\gamma}(\eta, \theta, \gamma) &= \gamma_\theta(\eta, \theta). \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \varepsilon_\eta &= \frac{1}{A_1} \frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \theta} v + k_1 w, \quad \varepsilon_\theta = \frac{1}{A_2} \frac{\partial v}{\partial \theta} + k_2 w, \quad \varepsilon_{\eta\theta} = \frac{A_1}{A_2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{u}{A_1} \right) + \frac{A_1}{A_2} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{v}{A_2} \right); \\ \chi_\eta &= \frac{1}{A_1} \frac{\partial \psi_\eta}{\partial \eta} + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \theta} \psi_\theta - k_1 \varepsilon_\eta; \quad \chi_\theta = \frac{1}{A_2} \frac{\partial \psi_\eta}{\partial \theta} - k_2 \varepsilon_\theta; \\ \chi_{\eta\theta} &= \frac{1}{2} \left(\frac{A_1}{A_2} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\psi_\eta}{A_1} \right) + \frac{A_2}{A_1} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\psi_\eta}{A_2} \right) - \frac{k_1}{A_1} \left(\frac{\partial v}{\partial \eta} - \frac{1}{A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \theta} u \right) - \frac{k_2}{A_2} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right); \\ \psi_\eta &= \gamma_\eta + \vartheta_\eta, \quad \psi_\theta = \gamma_\theta + \vartheta_\theta; \\ \vartheta_\eta &= -\frac{1}{A_1} \frac{\partial w}{\partial \eta} + k_1 u, \quad \vartheta_\theta = -\frac{1}{A_2} \frac{\partial w}{\partial \theta} + k_1 v; \\ k_1 &= \frac{1}{R + r \sin \theta}, \quad k_2 = \frac{1}{r}, \end{aligned} \quad (6)$$

где $\varepsilon_\eta, \varepsilon_\theta, \varepsilon_{\eta\theta}$ – тангенциальные, $\chi_\eta, \chi_\theta, \chi_{\eta\theta}$ – изгибные деформации координатной поверхности; k_1, k_2 – кривизны осевой окружности и окружности в поперечном сечении соответственно; $\vartheta_\eta, \vartheta_\theta$ – углы поворота нормали без учета поперечных сдвигов; $\gamma_\eta, \gamma_\theta$ – углы поворота нормали, обусловленные поперечными сдвигами.

Уравнения равновесия имеют вид:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial \eta} (A_2 N_\eta) + \frac{\partial}{\partial \theta} (A_2 N_{\theta\eta}) + N_{\eta\theta} \frac{\partial A_1}{\partial \theta} + A_1 A_2 k_1 Q_\eta + A_1 A_2 q_\eta &= 0; \\
 \frac{\partial}{\partial \theta} (A_1 N_\theta) - N_\eta \frac{\partial A_1}{\partial \theta} + \frac{\partial}{\partial \eta} (A_2 N_{\eta\theta}) + A_1 Q_\theta + A_1 A_2 q_\theta &= 0; \\
 \frac{\partial}{\partial \eta} (A_2 Q_\eta) + \frac{\partial}{\partial \theta} (A_1 Q_\theta) - A_1 A_2 k_1 N_\eta - A_1 N_\theta + A_1 A_2 q_\gamma &= 0; \\
 \frac{\partial}{\partial \eta} (A_2 M_\eta) + \frac{\partial}{\partial \theta} (A_1 M_{\eta\theta}) + M_{\eta\theta} \frac{\partial A_1}{\partial \theta} - A_1 A_2 Q_\eta &= 0; \\
 \frac{\partial}{\partial \theta} (A_1 M_\theta) - M_\eta \frac{\partial A_1}{\partial \theta} + \frac{\partial}{\partial \eta} (A_2 M_{\eta\theta}) - A_1 A_2 Q_\theta &= 0; \\
 N_{\eta\theta} - k_2 M_{\eta\theta} - N_{\theta\eta} + k_1 M_{\eta\theta} &= 0,
 \end{aligned} \tag{7}$$

где $N_\eta, N_\theta, N_{\eta\theta}, N_{\theta\eta}$ – тангенциальные усилия; Q_η, Q_θ – перерезывающие усилия; $N_\eta, N_\theta, N_{\eta\theta}, N_{\theta\eta}$ – изгибающие и крутящие моменты; $q_\eta, q_\theta, q_{\eta\theta}$ – компоненты поверхностной нагрузки.

Соотношения упругости для ортотропных оболочек относительно выбранной координатной поверхности записываются в виде:

$$\begin{aligned}
 N_\eta &= C_{11}\varepsilon_\eta + C_{12}\varepsilon_\theta; \quad N_\theta = C_{12}\varepsilon_\eta + C_{22}\varepsilon_\theta; \\
 N_{\eta\theta} &= C_{66}\varepsilon_{\eta\theta} + 2k_2 D_{66}\chi_{\eta\theta}; \quad N_{\theta\eta} = C_{66}\varepsilon_{\eta\theta} + 2k_1 D_{66}\chi_{\eta\theta}; \\
 M_\eta &= D_{11}\chi_\eta + D_{12}\chi_\theta; \quad M_\theta = D_{12}\chi_\eta + D_{22}\chi_\theta; \quad M_{\eta\theta} = 2D_{66}\chi_{\eta\theta}; \\
 Q_\eta &= K_1\gamma_\eta; \quad Q_\theta = K_2\gamma_\theta,
 \end{aligned} \tag{8}$$

где

$$\begin{aligned}
 C_{11} &= \frac{E_\eta h}{1 - \nu_\eta \nu_\theta}; \quad C_{12} = \nu_\theta C_{11}; \quad C_{22} = \frac{E_\theta h}{1 - \nu_\eta \nu_\theta}; \quad C_{66} = G_{\eta\theta} h; \\
 D_{11} &= \frac{E_\eta h^3}{12(1 - \nu_\eta \nu_\theta)}; \quad D_{12} = \nu_\theta D_{11}; \quad D_{22} = \frac{E_\theta h^3}{12(1 - \nu_\eta \nu_\theta)}; \quad D_{66} = \frac{G_{\eta\theta} h^3}{12}; \\
 K_1 &= \frac{5}{6} G_{\eta\gamma}; \quad K_2 = \frac{5}{6} G_{\theta\gamma}.
 \end{aligned} \tag{9}$$

Здесь $E_\eta, E_\theta, \nu_\eta, \nu_\theta$ – модули упругости и коэффициенты Пуассона в направлениях η и θ ; $G_{\eta\theta}, G_{\eta\gamma}, G_{\theta\gamma}$ – модуль сдвига; $h = h(\eta, \theta)$ – толщина оболочки.

В случае трансверсально-изотропных оболочек имеем:

$$\begin{aligned} E_\eta &= E_\theta = E; \\ \nu_\eta &= \nu_\theta = \nu; \\ G_{\eta\gamma} &= G_{\theta\gamma} = G' = \frac{E}{D}. \end{aligned}$$

Соотношения (6)–(8) представляют собой замкнутую систему дифференциальных уравнений в частных производных 10-го порядка. Для определения производных, содержащихся в общем интеграле этой системы, необходимо задать граничные условия на контурах оболочки при $\eta = const$. В отличие от классической теории оболочек, в которой на каждом контуре формулируются по четыре граничных условия, в уточненной теории оболочек принятая модель позволяет задать на каждом контуре по пять граничных условий, что соответствует числу искомых функций. Граничные условия могут быть сформулированы через усилия, моменты, перемещения и полные углы поворота нормали.

Для определения напряжений в ортотропных тороидальных оболочках будем исходить из соотношений закона Гука [15]:

$$\begin{aligned} e_\eta &= b_{11}\sigma_\eta + b_{12}\sigma_\theta; \quad e_\theta = b_{12}\sigma_\eta + b_{22}\sigma_\theta; \\ e_{\eta\theta} &= b_{66}\tau_{\eta\theta}; \quad e_{\eta\gamma} = b_{55}\tau_{\eta\gamma}; \quad e_{\theta\gamma} = b_{44}\tau_{\theta\gamma}, \end{aligned} \quad (10)$$

где

$$b_{11} = \frac{1}{E_\eta}; \quad b_{12} = -\frac{\nu_\eta}{E_\eta}; \quad b_{22} = \frac{1}{E_\theta}; \quad b_{66} = \frac{1}{G_{\eta\theta}}; \quad b_{55} = \frac{1}{G_{\eta\gamma}}; \quad b_{44} = \frac{1}{G_{\theta\gamma}}. \quad (11)$$

Разрешая равенства (10) относительно напряжений и используя (5), получаем выражения для напряжений через деформации координатной поверхности:

$$\begin{aligned} (b_{11}b_{22} - b_{12}^2)\sigma_\eta &= b_{22}(\varepsilon_\eta + \gamma\chi_\eta) - b_{12}(\varepsilon_\theta + \gamma\chi_\theta); \\ (b_{12}^2 - b_{11}b_{22})\sigma_\theta &= b_{12}(\varepsilon_\eta + \gamma\chi_\eta) - b_{11}(\varepsilon_\theta + \gamma\chi_\theta); \\ b_{66}\tau_{\eta\theta} &= \varepsilon_{\eta\theta} + 2\gamma\chi_{\eta\theta}; \quad b_{55}\tau_{\eta\gamma} = \gamma_\eta; \quad b_{44}\tau_{\theta\gamma} = \gamma_\theta \left(-\frac{h}{2} \leq \gamma \leq \frac{h}{2} \right). \end{aligned} \quad (12)$$

В качестве разрешающих функций выбираем перемещения u, v, w и полные углы поворота нормали ψ_η, ψ_θ . Из выражений (6)–(8) после некоторых преобразований получаем систему разрешающих уравнений в виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} &= L_1(u, v, w, \psi_\eta, \psi_\theta); \\ \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} &= L_2(u, v, w, \psi_\eta, \psi_\theta); \\ \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} &= L_3(u, v, w, \psi_\eta, \psi_\theta); \\ \frac{\partial^2 \psi_\eta}{\partial \theta^2} &= L_4(u, v, w, \psi_\eta, \psi_\theta); \\ \frac{\partial^2 \psi_\theta}{\partial \theta^2} &= L_5(u, v, w, \psi_\eta, \psi_\theta). \end{aligned} \quad (13)$$

Полученная система уравнений (13) полностью приведена в статье [5]. Добавляя к системе разрешающих уравнений граничные условия, получаем двумерную краевую задачу, которую решаем указанным выше методом.

Числовые результаты. На основе изложенного подхода решена задача о напряженном состоянии замкнутых в поперечном сечении усеченных тороидальных трансверсально-изотропных оболочек переменной толщины с круговым поперечным сечением при следующих исходных данных: S – длина дуги вдоль оси оболочки $0 \leq S \leq L, L = 60$, толщина изменяется по закону: $h(\theta) = h_0(1 + \beta \cos 2\theta), h_0 = 1, r = 15, \Delta\eta = \pi/3; \pi/2; 2\pi/3, \Delta\eta \cdot R = L$. Механические параметры оболочки принимают следующие значения [12]: $E_\eta = E_\theta = E, G_{\eta\gamma} = G_{\theta\gamma} = G' = E/D, D = 40$, где E – модуль упругости, коэффициент Пуассона $\nu_\eta = \nu_\theta = \nu = 0,3$. Оболочка находится под действием внутреннего нормального давления $q = q_0 = const$.

Исследовалось влияние изменения угла осевого сечения оболочки $\Delta\eta = \pi/3; \pi/2; 2\pi/3$ и параметра изменения толщины $\beta = 0; 0,3; 0,5; 0,7$ на нормальное перемещение и напряжения тороидальных оболочек постоянного объема.

Результаты решения задачи приведены при следующих значениях искривления оси $\Delta\eta = 2\pi/3; \pi/2; \pi/3$ на рис. 2, 3 соответственно в виде графиков распределения прогибов w и напряжений на внутренней поверхности оболочки $\bar{\sigma}_\theta$ для жестко закрепленного контура.

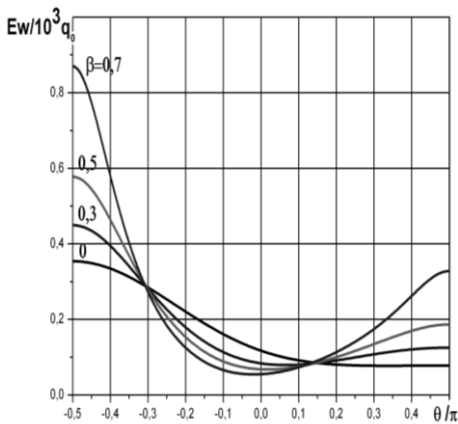
Сначала проведем исследование распределения перемещений в зависимости от искривления оси оболочки. Из рис. 2 видно, что максимальная величина прогиба изменяется в соотношении 0,37:0,371:0,35, что соответствует значениям в сечении $\theta = -\pi/2$; при $\theta = \pi/2$ соотношение имеет вид: $-0,034:0,052:0,08$; при $\theta = 0$ имеем: $0,05:0,07:0,12$. Следовательно, наибольшее влияние на значение прогибов величина искривления оболочки имеет в сечении $\theta = -\pi/2$.

Также проведем анализ влияния параметра переменной толщины оболочки на величину прогибов при различных искривлениях оси. Из рис. 2 видно, что при $\Delta\eta = 2\pi/3$ максимальное значение $Ew/10^3 q_0$ при $\beta = 0,7$ увеличивается до 0,95, по сравнению с 0,37 при $\beta = 0$. Для $\theta = \pi/2$ величина $Ew/10^3 q_0$ достигает 0,16 и так же как в случае постоянной толщины ($\beta = 0$) совпадает со значением в сечении $\theta = -\pi/2$, а при $\theta = 0$ $Ew/10^3 q_0 = -0,02$. При $\Delta\eta = \pi/2$ максимальное значение $Ew/10^3 q_0 = 0,93$ при $\beta = 0,7$, в отличие от 0,0371 при $\beta = 0$. При $\theta = \pi/2$ $Ew/10^3 q_0 = 0,25$, а при $\theta = 0$ принимает значение 0,02. При $\Delta\eta = \pi/3$ максимальное значение $Ew/10^3 q_0$ достигает 0,87 при $\beta = 0,7$, тогда как при $\beta = 0$ $Ew/10^3 q_0 = 0,35$. При $\theta = \pi/2$ имеем 0,33, а при $\theta = 0$ $Ew/10^3 q_0 = 0,06$.

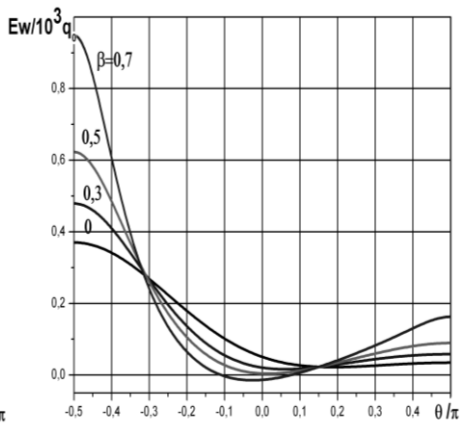
Стоит отметить, что в окрестностях точек $\theta/\pi \approx -0,3$ и $\theta/\pi \approx 0,15$ все графики пересекаются, это обусловлено тем, что толщина всех оболочек принимает одинаковое значение.

Иследуем также распределение напряжений на внутренней поверхности оболочки в зависимости от искривления её оси. На рис. 3 приведены графики на интервале $0 \leq S \leq L/2$. Из рис. 3 видно, что максимальная величина напряжений изменяется в соотношении 12,6:13,5:14,3, что соответствует значениям при $\theta = -\pi/2$ и $\beta = 0$; при $\theta = \pi/2$ соотношение имеет вид: 10,4:12,1:13,5. Следовательно, в нижней части оболочки, т.е. при $\theta = -\pi/2$, величина искривления оси имеет наибольшее влияние на значение напряжений.

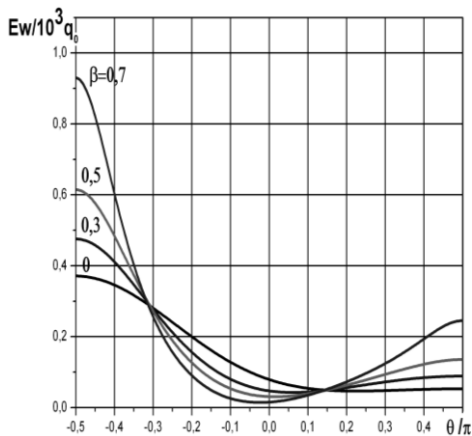
Теперь проанализируем влияние параметра переменной толщины оболочки на величину напряжений при различных искривлениях оси. Из рис. 3 видно, что при кривизне оси оболочки $\Delta\eta = 2\pi/3$ максимальное значение σ_{θ}^- / q_0 при $\beta = 0,7$ увеличивается до 44,6, по сравнению с 12,6 при $\beta = 0$. Для $\theta = \pi/2$ величина σ_{θ}^- / q_0 достигает 30,8, тогда как в случае постоянной толщины ($\beta = 0$) принимает значение 10,4. При $\Delta\eta = \pi/2$



а)



б)



в)

Рис. 2 – Распределение прогибов при: а) $\Delta\eta = \frac{2}{3}\pi$; б) $\Delta\eta = \frac{\pi}{2}$; в) $\Delta\eta = \frac{\pi}{3}$

и $\theta = -\pi/2$ максимальное значение $\sigma_{\theta}^-/q_0 = 47,1$ при $\beta = 0,7$, в отличие от 13,5 при $\beta = 0$. А при $\theta = \pi/2$ $\sigma_{\theta}^-/q_0 = 37,1$ $\beta = 0,7$ и 12,1 при $\beta = 0$. При $\Delta\eta = \pi/3$ эта величина принимает следующие значения: 49,5 при $\beta = 0,7$ и 14,3 при $\beta = 0$ для $\theta = -\pi/2$, тогда как для $\theta = \pi/2$ $\sigma_{\theta}^-/q_0 = 42,5$ и 13,5 соответственно при $\beta = 0,7$ и $\beta = 0$.

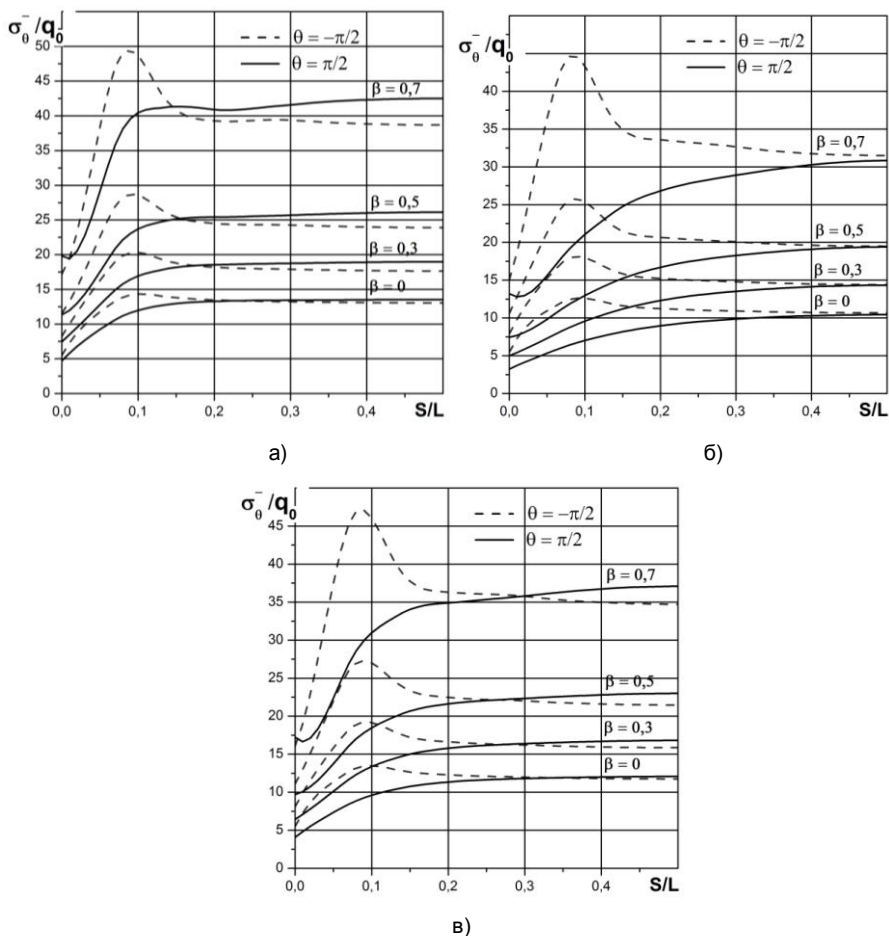


Рис. 3 – Распределение напряжений при: а) $\Delta\eta = \frac{2}{3}\pi$; б) $\Delta\eta = \frac{\pi}{2}$; в) $\Delta\eta = \frac{\pi}{3}$

Выводы. Из проведенного анализа численных результатов следует, что данная численно-аналитическая методика позволяет эффективно и с большой степенью точности решать задачи о напряженно-деформированном состоянии трансверсально-изотропных тороидальных оболочек переменной толщины.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЕ ССЫЛКИ

1. **Алберг Д.** Теория сплайнов и ее приложения / Д. Алберг, Э. Нильсон, Д. Уошли. – М.: Мир, 1972. – 318с.
2. **Булгаков В. Н.** Статика тороидальных оболочек / В. Н. Булгаков. – К.: Изд-во АН УССР, 1962. – 100 с.
3. **Голушко С. К.** Прямые и обратные задачи механики композитных пластин и оболочек вращения / С. К. Голушко, Ю. В. Немировский. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008. – 432 с.

4. **Григолюк Э. И.** Статика упругих слоистых оболочек / Э. И. Григолюк, Е. А. Коган. – М.: НИИ механики Моск. ун-та, 1999. – 215 с.
5. **Григоренко Я. М.** До розв'язання в уточненій постановці задач статки тороїдальних оболонок з жорстко закріпленими торцями / Я. М. Григоренко, Ю. О. Авраменко // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* – 2012. – 55, № 3. – С. 141–146.
6. **Григоренко Я. М.** Изотропные и анизотропные оболочки вращения переменной жесткости / Я. М. Григоренко. – К.: Наук. думка, 1973. – 228 с.
7. **Григоренко Я. М.** Некоторые подходы к решению линейных и нелинейных задач теории оболочек в классической и уточненной постановках / Я. М. Григоренко // *Прикл. механика.* – 1996. – 32, № 6. – С. 3–39.
8. **Григоренко Я. М.** Статика анизотропных оболочек с конечной сдвиговой жесткостью / Я. М. Григоренко, А. Т. Василенко, Г. П. Голуб. – К.: Наук. думка, 1987. – 216 с.
9. **Григоренко Я. М.** Численно-аналитическое решение задач механики оболочек на основе различных моделей / Я. М. Григоренко, Г. Г. Влайков, А. Я. Григоренко. – К.: Академперіодика, 2006. – 472 с.
10. **Завьялов Ю. С.** Методы сплайн-функций / Ю. С. Завьялов, Ю. И. Квасов, В. М. Мирошниченко. – М.: Наука, 1980. – 352 с.
11. **Кларк Э.** Изгиб труб с криволинейной осью / Э. Кларк, Э. Рейсснер // В к.: *Проблемы механики.* – М.: Изд-во иностр. лит., 1955. – С. 125–149.
12. **Лехницкий С. Г.** Теория упругости анизотропных тел / С. Г. Лехницкий. – М.: Наука, 1977. – 415 с.
13. **Подстригач Я. С.** Термоупругость тонких оболочек / Я. С. Подстригач, Р. Н. Швец. – К.: Наук. думка, 1978. – 343 с.
14. **Тимошенко С. П.** Курс теории упругости / С. П. Тимошенко. – К.: Наук. думка, 1972. – 501 с.
15. **Grigorenko Ya. M.** Discrete Fourier-series method in problems of bending of variable-thickness rectangular plates / Ya. M. Grigorenko, L. S. Rozhok // *J. Engng. Math.* – 2003. –46. – P. 269–280.
16. **Grigorenko Ya. M.** Equilibrium of elastic hollow inhomogeneous cylinders of corrugated elliptic cross-section / Ya. M. Grigorenko, L. S. Rozhok // *J. Engng. Math.* – 2006. – 54. – P. 145–157.
17. **Piskunov V. G.** Evolution of the theory of laminated plates and shells / V. G. Piskunov, A. O. Rasskazov // *Int. Appl. Mech.* – 2002. – 38, № 2. – P. 135–166.
18. **Soldatos K. P.** Mechanics of cylindrical shells with non-circular cross-section / K. P. Soldatos // *A survey. Appl. Mech. Rev.* – 1999. – 52. – P. 237–274.

О. О. Авраменко, канд. фіз.-мат. наук, Ю. О. Авраменко

ПРО ВПЛИВ ВИКРИВЛЕННЯ ОСІ НА НАПРУЖЕНИЙ СТАН ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ІЗОТРОПНИХ ТОРОЇДАЛЬНИХ ОБОЛОНОК ЗМІННОЇ ТОВЩИНИ

Дано рішення задачі і проведено дослідження напружено-деформованого стану трансверсально-ізотропних тороїдальних оболонок змінної товщини. Поставлена крайова задача описується системою диференціальних рівнянь у частинних похідних зі змінними коефіцієнтами. Зведення двовимірної задачі до одновимірної здійснюється за допомогою сплайн-апроксимації рішення. Отримана одновимірна крайова задача розв'язується стійким чисельним методом дискретної ортогоналізації. Наводяться дані про розподіл полів переміщень та напружень в залежності від викривлення осі оболонки і зміни параметрів змінної товщини.

Ключові слова: тороїдальні оболонки, напружений стан, уточнена теорія оболонок, метод сплайн-апроксимації, метод дискретної ортогоналізації.

ABOUT INFLUENCE OF AXIS CURVATURE ON STRESSED STATE OF TRANSVERSELY ISOTROPIC TOROIDAL SHELLS OF VARIABLE THICKNESS

A solution of the problem is given and an investigation of the stress-strain state of transversely isotropic toroidal shells of varying thickness was conducted. The boundary value problem is described by a system of partial differential equations with variable coefficients. The reduction of two-dimensional problem to one-dimensional problem is performed by using spline-approximation of solution. The obtained one-dimensional boundary value problem is solved by a stable numerical method of discrete orthogonalization. Distribution of displacement and stresses fields are presented depending on shell axis curvature and on variable thickness parameters.

Keywords: toroidal shell, stress state, refined shells theory, spline-approximation method, method of discrete orthogonalization.

Shells, as structural elements, are often used in various fields of modern technology: in ship building, aircraft building, rocket building, gas and chemical industries, etc. [2, 7, 9, 17, 18]. This is because of the shells have favorable elastic properties and with the rational design can withstand heavy loads, allow to create from them a very light construction of sufficient strength. In modern constructions the shells of complex form with variable parameters became widespread [6, 9, 13]. Toroidal shells [2, 11] of variable thickness belong to such type of shells. Investigation of the strength characteristics of this type shells by the classical theory can lead to considerable computational errors. Therefore the calculation of the stress-strain state of such shells is proposed to carry out by the Timoshenko's type refined shells theory [4, 8, 14] based on straight line hypothesis. The gist of this hypothesis is that initially normal to the coordinate surface element after deformation is rectilinear, but is not perpendicular to the deformed coordinate surface. It is assumed that there is not compression, namely assumed that the element does not change its length.

Investigation of the stress-strain state of toroidal shells in a refined formulation leads to the statement of problem as a system of partial derivatives equations with variable coefficients. The complexity of solving these problems is due not only to high order of the system and variability of coefficients, but also to necessity of exactly suit the given boundary conditions.

The system of resolving equations has the following form:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = L_1(u, v, w, \psi_\eta, \psi_\theta);$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} = L_2(u, v, w, \psi_\eta, \psi_\theta);$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} = L_3(u, v, w, \psi_\eta, \psi_\theta);$$

$$\frac{\partial^2 \Psi_\eta}{\partial \theta^2} = L_4(u, v, w, \Psi_\eta, \Psi_\theta);$$

$$\frac{\partial^2 \Psi_\theta}{\partial \theta^2} = L_5(u, v, w, \Psi_\eta, \Psi_\theta).$$

This system of equations is given fully in [5]. By adding the boundary conditions to the system of resolving equations, we obtain a two-dimensional boundary value problem. The approach based on approximation of the required solution in one coordinate direction by using the method of spline-approximation [1, 5, 7, 9, 10], so resolving functions are represented as a linear combination of cubic B-spline [10], is proposed for the considered class of boundary value problems. Obtained as a result one-dimensional boundary value problem is solved by stable numerical discrete orthogonalization method [3, 6, 9, 15, 16]. Such approach allows us to solve the problems for a variety of boundary conditions.

The stress state problem of truncated closed in cross-section transversely isotropic toroidal shells of variable thickness with circular cross-section, which are under internal normal pressure and rigidly fixed on the ends, is considered in the article. Coordinate's surface of the shell is assigned to the system of orthogonal curvilinear coordinates η, θ , wherein η is the axial section angle, and θ is the cross-sectional angle of the shell, herewith $\eta_1 \leq \eta \leq \eta_2, -\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$. The thickness of shell changes according to the formula $h(\theta) = h_0(1 + \beta \cos 2\theta)$, $h_0 = \text{const}, \beta < 1$. The influence of axial section angle of the shell and of thickness parameter on normal displacement and stress for constant volume toroidal shells is investigated.

Based on the results shown in this article, one can conclude that it is possible to get the most rational distribution of deflections and stresses by varying of the coefficients h_0 and β in the formula of the thickness and axis curvature $\Delta \eta$ while keeping the shell's volume.

Applying the proposed approach, based on non-classical Timoshenko's type model, the method of spline approximation and stable numerical method of discrete orthogonalization allows to solve stress state problems of orthotropic toroidal shells for a wide range of geometrical and mechanical parameters with reasonable accuracy.

REFERENCES

1. **Alberg D.** Theory of splines and their applications / D. Alberg, E. Nilson, D. Walsh. – Moscow: Mir, 1972. – 318 p. (in Russian).
2. **Bulgakov V. N.** Static of toroidal shells / V. N. Bulgakov. – Kiev: Publishing House of the USSR Academy of Sciences, 1962. – 100 p. (in Russian).
3. **Golushko S. K.** Direct and inverse problems of mechanics of composite plates and shells of revolution / S. K. Golushko, Iu. V. Nemirovsky. – Moscow: FIZMATLIT, 2008. – 432 p. (in Russian).

4. **Grigolyuk E. I.** Static elastic laminated shells / E. I. Grigolyuk, E. A. Kogan. – Moscow: Scientific Research Institute of Mechanics of Moscow University, 1999. – 215 p. (in Russian).
5. **Grigorenko Ya. M.** To the solution the problems of static toroidal shells with fixed ends in a refined formulation / Ya. M. Grigorenko, Iu. A. Avramenko // Math. Methods and Phys.-Mech. fields, Lviv Institute of Applied Problems of Mechanics and Mathematics named by Ia. S. Pidstryhach NAS of Ukraine. – 2012 – 55, № 3. – P. 141–146. (in Ukrainian).
6. **Grigorenko Ya. M.** The isotropic and anisotropic shells of revolution of variable stiffness / Ya. M. Grigorenko. – Kiev: Naukova Dumka, 1973. – 228 p. (in Russian).
7. **Grigorenko Ya. M.** Some approaches to solving linear and nonlinear problems in the classical theory of shells and refined formulations / Ya. M. Grigorenko // Applied Mechanics. – Kiev: Institute of Mechanics named by S. P. Timoshenko NAS of Ukraine – 1996. – 32, № 6. – P. 3–39 (in Russian).
8. **Grigorenko Ya. M.** Static of anisotropic shells with finite shear stiffness / Ya. M. Grigorenko, A. T. Vasilenko, G. P. Golub. – Kiev: Naukova Dumka, 1987. – 216 p. (in Russian).
9. **Grigorenko Ya. M.** Numerical and analytical solution of the problems of shells mechanics based on various models / Ya. M. Grigorenko, G. G. Vlajkov, A. Ya. Grigorenko. – Kiev: Academperiodika, 2006. – 472 p. (in Russian).
10. **Zav'yalov S. Iu.** Methods of spline functions / S. Iu. Zav'yalov, Iu. I. Kvasov, V. M. Miroshnichenko. – Moscow: Nauka, 1980. – 352 p. (in Russian).
11. **Clark E.** Bending pipe with a curved axis. / E. Clark, E. Reissner // Problems of Mechanics. – Moscow: Publishing House of the foreign lit., 1955. – P. 125–149 (in Russian).
12. **Lekhnitskii S. G.** The theory of elasticity of anisotropic bodies / S. G. Lekhnitskii. – Moscow: Nauka, 1977. – 415 p. (in Russian).
13. **Podstrigach Ya.** Thermoelasticity of thin shells / Ya. S. Podstrigach, R. N. Shvets. – Kiev: Naukova Dumka, 1978. – 343 p. (in Russian).
14. **Timoshenko S. P.** Course of the elasticity theory / S. P. Timoshenko. – Kiev: Naukova Dumka, 1972. – 501 p. (in Russian).
15. **Grigorenko Ya. M.** Discrete Fourier-series method in problems of bending of variable-thickness rectangular plates. / Ya. M. Grigorenko, L. S. Rozhok // J. Engng. Math. – 2003. – 46. – P. 269–280.
16. **Grigorenko Ya. M.** Equilibrium of elastic hollow inhomogeneous cylinders of corrugated elliptic cross-section. / Ya. M. Grigorenko, L. S. Rozhok // J. Engng. Math. – 2006. – 54. – P. 145–157.
17. **Piskunov V. G.** Evolution of the theory of laminated plates and shells / V. G. Piskunov, A. O. Rasskazov // Int. Appl. Mech. – 2002. – 38, № 2. – P. 135–166.
18. **Soldatos K. P.** Mechanics of cylindrical shells with non-circular cross-section / K. P. Soldatos // A survey. Appl. Mech. Rev. – 1999. – 52. – P. 237–274.

*Институт механики им. С. П. Тимошенко
НАН Украины,
Киев, Украина*

Поступила в редколлегию 14.02.2013