

УДК 539.4

*В. В. Данишевский, д-р техн. наук, Е. А. Кушнеров*

## **РАСПРОСТРАНЕНИЕ УПРУГИХ ПЛОСКИХ ВОЛН В ВОЛОКНИСТО- АРМИРОВАННОМ КОМПОЗИТНОМ МАТЕРИАЛЕ**

Рассмотрена задача о распространении плоских упругих волн в волокнисто-армированном композитном материале. Решение задачи получено при помощи волнового представления Флоке – Блоха. При этом свойства компонентов представлялись в виде разложений в ряды Фурье. Исследовано влияние микроструктуры на динамические свойства композитного материала. Найденны дисперсионные соотношения, определены частотные зоны запирания и пропускания.

*Ключевые слова:* композитный материал, упругие волны, дисперсия, зоны запирания и пропускания.

Распространение упругих волн в композитных материалах носит дисперсионный характер вследствие рассеяния энергии на неоднородностях среды. Когда длина волны уменьшается и становится соизмеримой с размером внутренней структуры, в композите обнаруживаются частотные зоны пропускания и запирания. Если частота попадает в зону запирания, в материале возникает стоячая волна, групповая скорость которой равна нулю. При этом амплитуда сигнала на макроуровне экспоненциально затухает. Рассмотрим однонаправленный волокнисто-армированный композитный материал, состоящий из пространственно-бесконечной матрицы  $\Omega^{(1)}$  и цилиндрических включений  $\Omega^{(2)}$ , расположенных в узлах периодической квадратной решетки (рис. 1). Пусть упругие волны распространяются в плоскости  $x_1x_2$  перпендикулярно к оси волокон. В этом случае можно выделить три различных типа волн. Если сигнал распространяется вдоль оси  $x_1$ , то к первому типу относится продольная плоская  $P$  – волна, которая характеризуется деформацией растяжения/сжатия в плоскости  $x_1x_2$ . Ко второму типу волн относится сдвиговая плоская  $SV$  – волна, которая характеризуется деформацией чистого сдвига в плоскости  $x_1x_2$ . К третьему типу относится сдвиговая антиплоская  $SH$  – волна, которая характеризуется деформацией чистого сдвига в плоскости  $x_2x_3$ .

Если перемещения и напряжения в композитном материале зависят от двух пространственных координат  $x_1$  и  $x_2$ , то задача о распространении упругих волн распадается на две независимые задачи, относящиеся к плоской и антиплоской деформации.

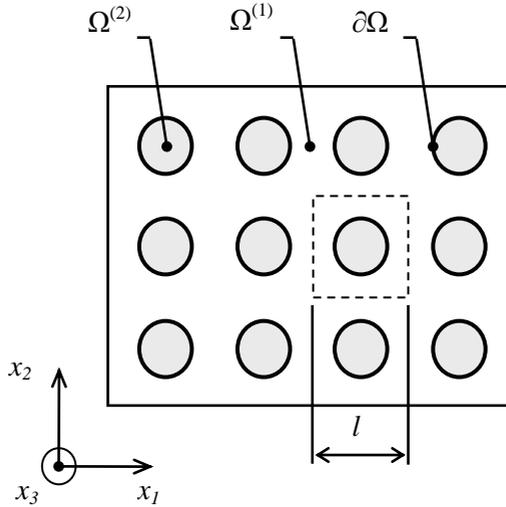


Рис. 1 – Волокнисто-армированный композитный материал

Рассмотрим плоскую задачу. Уравнения движения в перемещениях имеют вид:

$$\begin{aligned} \nabla \left( \rho c_T^2 \nabla u_1 \right) + \nabla \left( \rho c_T^2 \frac{\partial \bar{u}_T}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_1} \left[ \left( \rho c_L^2 - 2\rho c_T^2 \right) \nabla \bar{u}_T \right] &= \rho \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}; \\ \nabla \left( \rho c_T^2 \nabla u_2 \right) + \nabla \left( \rho c_T^2 \frac{\partial \bar{u}_T}{\partial x_2} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left[ \left( \rho c_L^2 - 2\rho c_T^2 \right) \nabla \bar{u}_T \right] &= \rho \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $\nabla = \bar{x}_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \bar{x}_2 \frac{\partial}{\partial x_2}$ ;  $\bar{u}_T = \bar{x}_1 u_1 + \bar{x}_2 u_2$ .

В связи с неоднородностью материала, физические свойства среды представлены кусочно-непрерывными функциями координат:

$$\begin{aligned} \rho(x) [c_T(x)]^2 &= \rho^{(a)} \left[ c_T^{(a)} \right]^2, \quad \rho(x) = \rho^{(a)} \quad \text{при } x \in \Omega^{(a)}; \\ \rho(x) [c_L(x)]^2 &= \rho^{(a)} \left[ c_L^{(a)} \right]^2, \quad \rho(x) = \rho^{(a)} \quad \text{при } x \in \Omega^{(a)}, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $c_L = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$ ,  $c_T = \sqrt{\mu/\rho}$  – скорости распространения продольных и поперечных волн соответственно;  $\lambda$ ,  $\mu$  – коэффициенты Ламе;  $\rho$  – плотность.

Примем условия идеального контакта между матрицей и включениями, которые отвечают равенству перемещений и напряжений на границе раздела  $\partial\Omega$ .

Важно отметить, что уравнения (1) и (2), которые описывают плоскую продольную и плоскую сдвиговую волны, связаны.

Следуя теореме Флоке – Блоха [3], распространение гармонических волн в неоднородной среде описывается выражениями:

$$\begin{aligned} u_1 &= F_1(x_1, x_2) \exp(ik_1x_1 + ik_2x_2) \exp(i\omega t); \\ u_2 &= F_2(x_1, x_2) \exp(ik_1x_1 + ik_2x_2) \exp(i\omega t), \end{aligned} \quad (3)$$

где  $F_{1,2}(x_1, x_2)$  – периодическая функция координат, отражающая влияние микроструктуры;  $k_1, k_2$  – проекции волнового вектора на оси координат.

Отметим, что в литературе данная теорема также имеет название Флоке – Ляпунова. Используя т.н. метод плоских волн [2], представим функции  $F_{1,2}(x_1, x_2)$  а также свойства компонентов  $\rho(x)[c_T(x)]^2$ ,  $\rho(x)[c_L(x)]^2$ ,  $\rho(x)$  в виде разложений в ряды Фурье:

$$\begin{aligned} \rho c_L^2 &= \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \sum_{n_2=-\infty}^{\infty} c_{Ln_1n_2} \exp\left[i\frac{2\pi}{l}(n_1x_1 + n_2x_2)\right]; \\ \rho c_T^2 &= \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \sum_{n_2=-\infty}^{\infty} c_{Tn_1n_2} \exp\left[i\frac{2\pi}{l}(n_1x_1 + n_2x_2)\right]; \\ \rho &= \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \sum_{n_2=-\infty}^{\infty} \rho_{n_1n_2} \exp\left[i\frac{2\pi}{l}(n_1x_1 + n_2x_2)\right]; \\ F_1 &= \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \sum_{n_2=-\infty}^{\infty} A_{n_1n_2} \exp\left[i\frac{2\pi}{l}(n_1x_1 + n_2x_2)\right]; \\ F_2 &= \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \sum_{n_2=-\infty}^{\infty} B_{n_1n_2} \exp\left[i\frac{2\pi}{l}(n_1x_1 + n_2x_2)\right]. \end{aligned} \quad (4)$$

Подставив выражения (3), (4) в уравнения движения (1) и приравняв коэффициенты при членах вида  $\exp\left[i2\pi l^{-1}(n_1x_1 + n_2x_2)\right]$ ,  $n_1, n_2 = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ , получим бесконечную систему линейных алгебраических уравнений для неизвестных коэффициентов  $A_{n_1, n_2}$ ,  $B_{n_1, n_2}$ :

$$\begin{aligned}
& \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \sum_{n_2=-\infty}^{\infty} \left\{ A_{n_1 n_2} \left[ \begin{array}{ccc} \alpha_5 c L_{j_1-n_1} + \alpha_1 c T_{j_1-n_1} - \rho_{j_1-n_1} \omega^2 & & \\ & j_{2-n_2} & j_{2-n_2} & j_{2-n_2} \end{array} \right] \right\} + \\
& + B_{n_1 n_2} \left\{ \alpha_2 (c L_{j_1-n_1} - c T_{j_1-n_1}) + \frac{2\pi}{l} \alpha_3 c T_{j_1-n_1} \right\} = 0; \\
& \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \sum_{n_2=-\infty}^{\infty} \left\{ A_{n_1 n_2} \left\{ \alpha_6 (c L_{j_1-n_1} - c T_{j_1-n_1}) + \frac{2\pi}{l} \alpha_4 c T_{j_1-n_1} \right\} + \right. \\
& \left. + B_{n_1 n_2} \left\{ \alpha_1 c L_{j_1-n_1} + \alpha_5 c T_{j_1-n_1} - \rho_{j_1-n_1} \omega^2 \right\} \right\} = 0,
\end{aligned} \tag{5}$$

где:

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= \left( \frac{2\pi}{l} n_2 + k_2 \right) \left( \frac{2\pi}{l} j_2 + k_2 \right); \quad \alpha_2 = \left( \frac{2\pi}{l} n_2 + k_2 \right) \left( \frac{2\pi}{l} j_1 + k_1 \right); \\
\alpha_3 &= (j_2 - n_2) \left( \frac{2\pi}{l} n_1 + k_1 \right) - (j_1 - n_1) \left( \frac{2\pi}{l} n_2 + k_2 \right); \\
\alpha_4 &= (j_1 - n_1) \left( \frac{2\pi}{l} n_2 + k_2 \right) - (j_2 - n_2) \left( \frac{2\pi}{l} n_1 + k_1 \right); \\
\alpha_5 &= \left( \frac{2\pi}{l} n_1 + k_1 \right) \left( \frac{2\pi}{l} j_1 + k_1 \right); \quad \alpha_6 = \left( \frac{2\pi}{l} n_1 + k_1 \right) \left( \frac{2\pi}{l} j_2 + k_2 \right).
\end{aligned}$$

Условием существования нетривиального решения системы (5) является равенство нулю определителя матрицы, составленной из коэффициентов уравнений. Решая задачу на собственные значения, приравниваем определитель нулю и получаем дисперсионную зависимость, связывающую между собой частоту  $\omega$  и волновое число  $k$ . Следует отметить, что данный метод решения не использует краевые условия на границе раздела компонентов в явном виде. В данном случае условия идеального контакта между волокнами и матрицей содержатся в уравнениях (1), (2) и в разложениях (4) для  $F_1$  и  $F_2$ , где поля перемещений и напряжений неявно предполагаются непрерывными. В численных примерах, приведенных ниже, дисперсионные соотношения вычисляются путем усечения системы (5), (6), полагая  $-j_{\max} \leq j_1$ ,

$j_2 \leq j_{\max}$ . Количество удерживаемых уравнений равно  $(2j_{\max} + 1)^2$ . Физический смысл такого усечения заключается в потере решений в области высоких частот. В качестве численного примера был рассмотрен композит алюминий-никель. Свойства волокна (никель) принимались следующими:  $\rho = 8940 \text{ кг/м}^3$ ,  $\mu = 79 \cdot 10^9 \text{ Па}$ ,  $\nu = 0,31$ ,  $E = 200 \cdot 10^9 \text{ Па}$ ,  $\lambda = 124 \cdot 10^9 \text{ Па}$ . Свойства матрицы (алюминий) принимались следующими:  $\rho = 2700 \text{ кг/м}^3$ ,  $\mu = 26 \cdot 10^9 \text{ Па}$ ,  $\nu = 0,31$ ,  $E = 70 \cdot 10^9 \text{ Па}$ ,  $\lambda = 55 \cdot 10^9 \text{ Па}$ . При отображении полученных численных результатов, на графиках использовались безразмерные частота  $\omega^*$  и волновое число  $k^*$ :

$$\omega^* = \frac{\omega l}{\omega_0 L}; k^* = \frac{kl}{2\pi},$$

где  $\omega$  – частота;  $l$  – характерный размер ячейки периодичности;  $L$  – длина волны;  $\omega_0 = ck$ ,  $c$  – скорость волны;  $k$  – волновое число,

$$k = \sqrt{k_1^2 + k_2^2}.$$

На рис. 2 представлены дисперсионные кривые для продольных  $P$ -волн (сплошные линии), и для поперечных  $SV$ -волн (штриховые линии). Дисперсионная диаграмма состоит из двух частей, разделенных осью ординат. Правая часть соответствует ортогональному ( $\varphi = 0$ ), а левая – диагональному ( $\varphi = \pi/4$ ) направлению распространения волны. Здесь  $\varphi$  – угол между осью  $x_1$  и направлением распространения волны,  $\text{tg } \varphi = k_2/k_1$ . В квазиоднородном случае ( $\omega \rightarrow 0$ ) решение является изотропным и не зависит от угла  $\varphi$ . Но при росте частоты  $\omega$  в композите проявляются анизотропные свойства. На дисперсионной диаграмме серыми прямоугольниками изображены зоны запираания, в которых прохождение сигнала в определенном направлении невозможно. Увеличение  $j_{\max}$  повышает точность численных результатов. Отметим точку  $B$ , в которой происходит пересечение дисперсионных кривых продольных и поперечных волн. В данной точке характеристики плоских поперечных волн сдвига и плоских продольных волн растяжения-сжатия одинаковы. В этой характерной точке энергия продольных волн может быть передана поперечным волнам и наоборот. Данный эффект возникает в композитном материале за счет локального преломления и отражения волн на границе разделов компонентов. В однородных средах данный эффект не наблюдается.

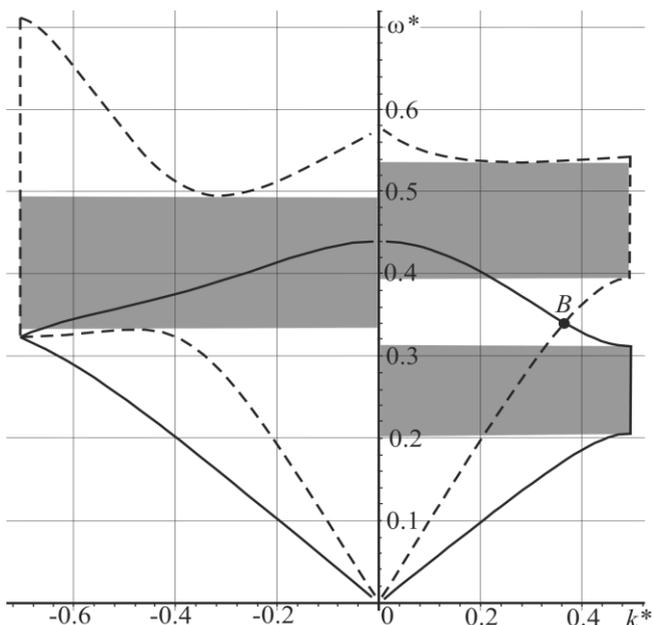


Рис. 2 – Дисперсионные кривые композита Al – Ni

Также для сравнения полученных результатов с известными исследованиями других авторов был рассмотрен частный случай волокнистого композита с пустотными включениями. Дисперсионные кривые приведены на рис. 3. Сплошными линиями обозначено рассматриваемое аналитическое решение, а черными точками – решение при помощи рядов Реллея, полученное Поултоном и Мовчаном [4].

В работе решена задача о распространении плоских упругих волн деформации в волокнисто-армированном композитном материале. Найдены дисперсионные зависимости и построены дисперсионные кривые для продольных плоских  $P$ -волн и сдвиговых плоских  $SV$ -волн. Определены частотные зоны загирапия для рассматриваемых видов волн.

Показана возможность взаимного перехода  $P$  и  $SV$  волн в волокнисто-армированном композитном материале. Наличие в частотном спектре зон загирапия говорит о возможности использования материалов и конструкций, имеющих волокнисто-армированную структуру в качестве волновых фильтров. Это свойство может быть использовано в неразрушающих методах контроля волокнистых композитов. Так же полученные результаты могут быть применены для конструирования и оптимизации периодических структур с целью создания акустических фильтров и виброгасителей.

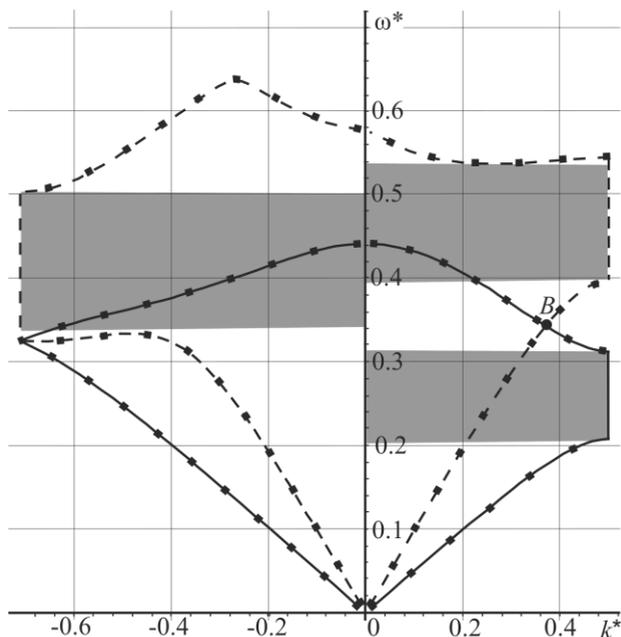


Рис. 3 – Дисперсионные кривые композита с пустотными включениями

### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЕ ССЫЛКИ

1. **Индейцев Д. А.** Локализация линейных волн / Д. А. Индейцев, Н. Г. Кузнецов, О. В. Мотыгин, Ю. А. Мочалова. – СПб. : Изд-во С. – Петерб. ун-та. – 2007. – 342 с.
2. **Andrianov I. V.** Higher- order asymptotic homogenization and wave propagation in periodic composite materials / I. V. Andrianov, V. I. Bolshakov, V. V. Danishevskyy, D. Weichert // Proc. R. Soc. A. – 2008. – Vol. 464. – P. 1181–1201.
3. **Brillouin L.** Wave Propagation in Periodic Structures: Electric Filters and Crystal Lattices / L. Brillouin // 2nd ed. Dover, Mineola, N.-Y. – 2003. – 255 p.
4. **Poulton C. G.** Eigenvalue problems for doubly periodic structures and phononic band gaps / C. G. Poulton, A. B. Movchan, R. C. McPhedran, N. A. Nicorovici, Y. A. Antipov // Proc. R. Soc. Lond. A. – 2000. – Vol. 456. – P. 2543–2559.

*В. В. Данішевський, д-р техн. наук, Є. О. Кушнеров*

### ПОШИРЕННЯ ПРУЖНИХ ПЛОСКИХ ХВИЛЬ У ВОЛОКНИСТО-АРМОВАНОМУ КОМПЗИТНОМУ МАТЕРІАЛІ

Розглянуто задачу про поширення плоских пружних хвиль у волокнисто-армованому композитному матеріалі. Розв'язок отримано за допомогою хвильового представлення Флоке – Блоха. При цьому властивості компонентів подавалися у вигляді розкладів в ряди Фур'є. Досліджено вплив мікроструктури на динамічні властивості композитного матеріалу. Знайдено дисперсійні співвідношення, визначено частотні зони замикання.

**Ключові слова:** композитний матеріал, пружні хвилі, дисперсія, зони замикання та пропускання.

## PROPAGATION OF ELASTIC PLANE WAVES IN A FIBER-REINFORCED COMPOSITE MATERIAL

Propagation of in-plane elastic waves in a fiber-reinforced composite material is considered. The solution is obtained by the Floquet – Bloch method. The properties of the components are presented by the Fourier series expansions. The influence of the microstructure upon the dynamic properties of the composite material is predicted. The dispersion relations are evaluated and the phononic bands are identified. The proposed analytical approaches can be extended to other types of elastic waves as well as to different types of periodic composite structures. The obtained results can be used for the development of new, more precise, methods of acoustic diagnostic and non-destructive testing.

**Keywords:** *composite material, elastic waves, dispersion, phononic bands.*

Propagation of linear elastic waves in composite materials is accompanied by a number of new phenomena that can never be observed in linear and homogeneous media.

When the wavelength of a travelling signal decreases and becomes comparable to the characteristic size of heterogeneities, successive reflections and refractions of the local waves at the components interfaces lead to dispersion and attenuation of the global wave field. Further decrease in the wavelength reveals in a heterogeneous elastic material a complicated structure of so called pass and stop frequency bands. In the literature they are also referred as acoustic or phononic bands (by analogy with photonic bands arising for electromagnetic and optical waves in heterogeneous dielectric media). Thus, the composite plays a role of a discrete wave filter. If the frequency of the signal falls within a stop band, a stationary wave is excited and neighbouring heterogeneities (e.g., particles) vibrate in alternate directions. On macro level the amplitude of the global wave attenuates exponentially, so no propagation is possible.

These general properties are defined for infinite unbounded media; however, they are in very close relation to the selective reflection phenomenon shown by bounded composites. A wave striking from outside to a composite medium may be partially reflected and partially transmitted – if the composite is able to transmit the corresponding frequency. Normally, inside the pass bands the amount of the reflection is defined by a matching problem at the composite boundary. But inside the stop bands no transmission is allowed and, hence, the wave must be reflected totally.

We consider 2D in-plane elastic waves that propagates through a fiber reinforced composite material in the direction orthogonal to the fibers. Namely, we study transverse plane shear waves propagating in the plane through a regular structure consisting of a spatially infinite elastic matrix and elastic inclusions. The solution is obtained basing on the by the Floquet – Bloch theory, while the properties of the components and the unknown displacement field are presented by the Fourier series expansions. The dispersion

curves for longitudinal tensile and transverse shear waves are evaluated; the pass and stop bands are identified.

The influence of the microstructure upon the dynamic properties of the composite material is predicted. A significant peculiarity of the obtained solution is the possibility of a mutual transition of longitudinal and transverse waves in a fiber-reinforced composite material.

The results of the paper can be used for the purposes of non-destructive testing of composite materials and structures. Also obtained solutions can be utilized for the design and optimization of periodic structures in order to create acoustic filters and dampers.

## REFERENCES

1. **Indejzev D. A.** Localization of linear waves / D. A. Indejzev, N. G. Kuznetsov, O. V. Motygin, Y. A. Mochalova. – SPb. : Publ. Saint-Petersburg State University, 2007. – 342 p. (in Russian)
2. **Brillouin L.** Wave Propagation in Periodic Structures: Electric Filters and Crystal Lattices / L. Brillouin // 2nd ed. Dover, Mineola, N.-Y. – 2003.
3. **Andrianov I. V.** Higher-order asymptotic homogenization and wave propagation in periodic composite materials / I. V. Andrianov, V. I. Bolshakov, V. V. Danishevskyy, D. Weichert // Proc. R. Soc. A. – 2008 – Vol. 464. – P. 1181–1201.
4. **Poulton C. G.** Eigenvalue problems for doubly periodic structures and phononic band gaps / C. G. Poulton, A. B. Movchan, R. C. Mc Phedran, N. A. Nicorovici, Y. A. Antipov // Proc. R. Soc. Lond. A. – 2000. – Vol. 456. – P. 2543–2559.

*Государственное высшее учебное заведение  
«Приднепровская академия  
строительства и архитектуры»,  
Днепропетровск, Украина.*

*Поступила в редколлегию 10.02.2014*