

УДК 539.3

В. Ф. Мейш, д-р физ-мат. наук, Н. П. Кепенач

К РАСЧЕТУ ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ ПРОДОЛЬНО-ПОПЕРЕЧНО ПОДКРЕПЛЕННЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО СЕЧЕНИЯ ПРИ НЕСТАЦИОНАРНЫХ НАГРУЗКАХ

Рассмотрена задача вынужденных колебаний продольно-поперечно подкрепленной цилиндрической оболочки эллиптического поперечного сечения при действии нестационарной нагрузки. Приведена постановка и разработан численный алгоритм решения задачи. Система дифференциальных уравнений основана на использовании теории оболочек и стержней типа Тимошенко. Приведен пример расчета динамического поведения продольно-поперечно подкрепленной цилиндрической оболочки при нестационарной нагрузке.

Ключевые слова: цилиндрические оболочки эллиптического поперечного сечения, теория оболочек и стержней типа Тимошенко, вынужденные колебания, численные методы.

Введение. Задачам об определении напряженно-деформированного состояния подкрепленных оболочек с учетом дискретного расположения ребер при динамических нагрузках посвящено значительное число публикаций [1–5]. Решение задач динамического поведения подкрепленных оболочек с учетом дискретного расположения ребер в рамках классической модели детально рассмотрены в [1, 2, 4]. Уточненная модель теории подкрепленных оболочек при исследовании динамического поведения неоднородных конструкций при нестационарных нагрузках использовалась в [3, 5–7]. В указанных работах, в основном, рассмотрены подкрепленные оболочки канонической формы (цилиндрические, сферические и конические). Поведение продольно-подкрепленных цилиндрических оболочек эллиптического сечения с учетом дискретного расположения ребер при нестационарных нагрузках рассмотрено в публикации [8], поперечно подкрепленных оболочек в аналогичной постановке в [9]. Практически отсутствуют работы по задачам динамики подкрепленных цилиндрических оболочек эллиптического сечения в более сложных постановках.

В данной работе в рамках модели теории оболочек и стержней типа Тимошенко приведена постановка задачи о вынужденных колебаниях продольно-поперечно подкрепленной цилиндрической оболочки эллиптического сечения, построен численный алгоритм решения задачи и проведен анализ полученных численных результатов.

Изложение основного материала. Рассматривается подкрепленная цилиндрическая оболочка эллиптического поперечного сечения при действии распределенной внутренней нагрузки $P_3(s_1, s_2, t)$, где s_1, s_2 и t – пространственные и временная координаты. При постановке задачи учитывается дискретное расположение продольных ребер [2–4].

Коэффициенты первой квадратичной формы и кривизн координатной поверхности исходной оболочки записываются следующим образом:

$$\begin{aligned} A_1 &= 1, & k_1 &= 0; \\ A_2 &= (a^2 \cos^2 \alpha_2 + b^2 \sin^2 \alpha_2)^{1/2}, & k_2 &= ab(a^2 \cos^2 \alpha_2 + b^2 \sin^2 \alpha_2)^{-3/2}; \\ s_1 &= A_1 \alpha_1, & s_2 &= A_2 \alpha_2, \end{aligned} \quad (1)$$

где a и b – полуоси эллипса, который характеризует поперечное сечение цилиндрической оболочки.

Для вывода уравнений колебаний подкрепленной цилиндрической оболочки используется вариационный принцип стационарности Гамильтона – Остроградского [1, 3, 5]. После стандартных преобразований в функционале, с учетом условий контакта оболочка – ребро [1, 3, 5], получим три группы уравнений:

- уравнения колебаний гладкой цилиндрической оболочки эллиптического поперечного сечения:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_{11}}{\partial s_1} + \frac{\partial S}{\partial s_2} &= \rho h \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}; \\ \frac{\partial S}{\partial s_1} + \frac{\partial T_{22}}{\partial s_2} - k_2 T_{23} &= \rho h \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}; \\ \frac{\partial T_{13}}{\partial s_1} + \frac{\partial T_{23}}{\partial s_2} - k_2 T_{22} + P_3(s_1, s_2, t) &= \rho h \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2}; \\ \frac{\partial M_{11}}{\partial s_1} + \frac{\partial H}{\partial s_2} - T_{13} &= \rho \frac{h^3}{12} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2}; \\ \frac{\partial H}{\partial s_1} + \frac{\partial M_{22}}{\partial s_2} - T_{23} &= \rho \frac{h^3}{12} \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial t^2}, \end{aligned} \quad (2)$$

- уравнения колебаний i -го ребра, расположенного вдоль оси s_1 :

$$\frac{\partial T_{11i}}{\partial s_1} + [S] = \rho_i F_i \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} \pm h_{ci} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2} \right); \quad (3)$$

$$\frac{\partial T_{12i}}{\partial s_1} + [T_{22}] = \rho_i F_i \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} \pm h_{ci} \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial t^2} \right);$$

$$\frac{\partial T_{13i}}{\partial s_1} + [T_{23}] = \rho_i F_i \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2};$$

$$\frac{\partial M_{11i}}{\partial s_1} \pm h_{ci} \frac{\partial T_{11i}}{\partial s_1} - T_{13} + [H] = \rho_i F_i \left[\pm h_{ci} \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + \left(h_{ci}^2 + \frac{I_{1i}}{F_i} \right) \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2} \right];$$

$$\frac{\partial M_{12i}}{\partial s_1} \pm h_{ci} \frac{\partial T_{12i}}{\partial s_1} - T_{23} + [M_{22}] = \rho_i F_i \left[\pm h_{ci} \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} + \left(h_{ci}^2 + \frac{I_{kri}}{F_i} \right) \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial t^2} \right],$$

- уравнения колебаний j -го ребра, расположенного вдоль оси s_2 :

$$\frac{\partial T_{21j}}{\partial s_2} + [T_{11}]_j = \rho_j F_j \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} \pm h_{cj} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2} \right); \quad (4)$$

$$\frac{\partial T_{22j}}{\partial s_2} + k_{2j} T_{23j} + [S]_j = \rho_j F_j \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} \pm h_{cj} \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial t^2} \right);$$

$$\frac{\partial T_{23j}}{\partial s_2} + k_{2j} T_{22} + [T_{13}]_j = \rho_j F_j \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2};$$

$$\frac{\partial M_{21j}}{\partial s_2} \pm h_{cj} \frac{\partial T_{21j}}{\partial s_2} + [M_{11}] = \rho_j F_j \left[\pm h_{cj} \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + \left(h_{cj}^2 + \frac{I_{torj}}{F_j} \right) \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2} \right];$$

$$\frac{\partial M_{22j}}{\partial s_2} \pm h_{cj} \frac{\partial T_{22j}}{\partial s_2} - T_{23j} + [H] = \rho_j F_j \left[\pm h_{cj} \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} + \left(h_{cj}^2 + \frac{I_{2j}}{F_j} \right) \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial t^2} \right].$$

В уравнениях (2)–(4) $u_1, u_2, u_3, \varphi_1, \varphi_2$ – компоненты обобщенного вектора перемещений срединной поверхности оболочки; ρ, ρ_i, ρ_j – плотности материала оболочки, i -го и j -го ребер соответственно; h – толщина оболочки; $h_{ci} = 0,5(h + h_i)$; h_i – высота поперечного сечения i -го ребра; $h_{cj} = 0,5(h + h_j)$; h_j – высота поперечного сечения j -го ребра.

Величины $[f]_i = f^+ - f^-$, где f^\pm – значения функций справа и слева

на i -й линии разрыва (линия проецирования центра тяжести i -го ребра на срединную поверхность цилиндрической оболочки). Соответственно определяются величины $[f]_j = f^+ - f^-$.

Величины усилий – моментов в уравнениях колебаний для оболочки (2) связаны с соответствующими величинами деформаций следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} T_{11} &= B_{11}(\varepsilon_{11} + \nu_2 \varepsilon_{22}), \quad T_{22} = B_{22}(\varepsilon_{22} + \nu_1 \varepsilon_{11}), & (5) \\ T_{13} &= B_{13} \varepsilon_{13}, \quad T_{23} = B_{23} \varepsilon_{23}, \quad S = B_{12} \varepsilon_{12}, \\ M_{11} &= D_{11}(\kappa_{11} + \nu_2 \kappa_{22}), \quad M_{22} = D_{22}(\kappa_{22} + \nu_1 \kappa_{11}), \quad H = D_{12} \kappa_{12}, \\ \varepsilon_{11} &= \frac{\partial u_1}{\partial s_1}, \quad \varepsilon_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial s_2} + k_2 u_3, \\ \varepsilon_{12} &= \frac{\partial u_1}{\partial s_2} + \frac{\partial u_2}{\partial s_1}, \quad \varepsilon_{13} = \varphi_1 + \frac{\partial u_3}{\partial s_1}, \quad \varepsilon_{23} = \varphi_2 + \frac{\partial u_3}{\partial s_2} - k_2 u_2, \\ \kappa_{11} &= \frac{\partial \varphi_1}{\partial s_1}, \quad \kappa_{22} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial s_2}, \quad \kappa_{12} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial s_2} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial s_1}. \end{aligned}$$

В соотношениях (5) введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned} B_{11} &= \frac{E_1 h}{1 - \nu_1 \nu_2}, \quad B_{22} = \frac{E_2 h}{1 - \nu_1 \nu_2}, \\ B_{12} &= G_{12} h, \quad B_{13} = G_{13} h, \quad B_{23} = G_{23} h, \\ D_{11} &= \frac{E_1 h^3}{12(1 - \nu_1 \nu_2)}, \quad D_{22} = \frac{E_2 h^3}{12(1 - \nu_1 \nu_2)}, \quad D_{12} = G_{12} \frac{h^3}{12}, \end{aligned}$$

где $E_1, E_2, G_{12}, G_{13}, G_{23}, \nu_1, \nu_2$ – физико-механические параметры ортотропного материала оболочки.

Величины усилий – моментов в уравнениях колебаний для i -го ребра (3) связаны с соответствующими величинами деформаций согласно соотношений:

$$\begin{aligned} T_{11i} &= E_i F_i \varepsilon_{11i}, \quad T_{12i} = G_i F_i \varepsilon_{12i}, \quad T_{13i} = G_i F_i \varepsilon_{13i}, & (6) \\ M_{11i} &= E_i I_{1i} \kappa_{11i}, \quad M_{12i} = G_i I_{c1i} \kappa_{12i}, \\ \varepsilon_{11i} &= \frac{\partial u_1}{\partial s_1} \pm h_{ci} \frac{\partial \varphi_1}{\partial s_1}, \quad \varepsilon_{22i} = \frac{\partial u_2}{\partial s_2} \pm h_{ci} \frac{\partial \varphi_2}{\partial s_1}, \\ \varepsilon_{13i} &= \varphi_1 + \frac{\partial u_3}{\partial s_1}, \quad \kappa_{11i} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial s_1}, \quad \kappa_{12i} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial s_1}. \end{aligned}$$

В соотношениях (6) E_i, G_i – физико-механические параметры материала ребра; F_i, I_{1i}, I_{cri} – геометрические параметры поперечного сечения i -го ребра.

Величины усилий – моментов в уравнениях колебаний для j -го ребра (4) связаны с соответствующими величинами деформаций согласно соотношений:

$$\begin{aligned} T_{11j} &= E_i F_i \varepsilon_{11j}, \quad T_{12j} = G_j F_j \varepsilon_{12j}, \quad T_{13j} = G_j F_j \varepsilon_{13j}, \quad (7) \\ M_{11j} &= E_j I_{1j} \kappa_{11j}, \quad M_{12j} = G_j I_{torj} \kappa_{12j}, \\ \varepsilon_{11j} &= \frac{\partial u_1}{\partial s_1} \pm h_{cj} \frac{\partial \varphi_1}{\partial s_1}, \quad \varepsilon_{22j} = \frac{\partial u_2}{\partial s_2} \pm h_{cj} \frac{\partial \varphi_2}{\partial s_1}, \\ \varepsilon_{13} &= \varphi_1 + \frac{\partial u_3}{\partial s_1}, \quad \kappa_{11j} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial s_1}, \quad \kappa_{11j} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial s_1}. \end{aligned}$$

В соотношениях (7) E_j, G_j – физико-механические параметры материала ребра; F_j, I_{1j}, I_{torj} – геометрические параметры поперечного сечения j -го ребра.

Уравнения колебаний (2)–(7) дополняются соответствующими граничными и начальными условиями.

Численный алгоритм решения задачи. Численный алгоритм решения начально-краевой задачи (2)–(7) основан на применении интегро-интерполяционного метода построения разностных соотношений по пространственным координатам s_1, s_2 и явной аппроксимации по временной координате t [3, 5–7, 9].

Согласно исходной постановки задачи решение ищется в гладкой области (2), (5) и склеивается на линиях разрывов (3), (4). Остановимся на построении решения в гладкой области $D = \{s_{10} \leq s_1 \leq s_{1N}; s_{20} \leq s_2 \leq s_{2N}\}$. Выберем подобласть $D_{kl}^1 \subset D$, $D_{kl}^1 = \{s_{1k-1/2} \leq s_1 \leq s_{1k+1/2}; s_{2l-1/2} \leq s_2 \leq s_{2l+1/2}\}$ и проинтегрируем уравнения колебаний (2) по этой подобласти. В результате получим следующие разностные соотношения нахождения решений на $(n+1)$ -м временном слое:

$$\frac{T_{11k+1/2,l}^n - T_{11k-1/2,l}^n}{\Delta s_1} + \frac{S_{k,l+1/2}^n - S_{k,l-1/2}^n}{\Delta s_2} = \rho h (u_{1k,l}^n)_{\bar{n}}, \quad (8)$$

$$\begin{aligned}
& \frac{S_{k+1/2,l}^n - S_{k-1/2,l}^n}{\Delta s_1} + \frac{T_{22k,l+1/2}^n - T_{22k,l-1/2}^n}{\Delta s_2} + \\
& \quad + \frac{k_2 l}{2} (T_{23k,l+1/2}^n - T_{23k,l-1/2}^n) = \rho h (u_{2k,l}^n)_{\bar{u}}, \\
& \frac{T_{13k+1/2,l}^n - T_{13k-1/2,l}^n}{\Delta s_1} + \frac{T_{23k,l+1/2}^n - T_{23k,l-1/2}^n}{\Delta s_2} - \\
& \quad - \frac{k_2 l}{2} (T_{22k,l+1/2}^n - T_{22k,l-1/2}^n) + P_{3k,l}^n = \rho h (u_{3k,l}^n)_{\bar{u}}, \\
& \frac{M_{11k+1/2,l}^n - M_{11k-1/2,l}^n}{\Delta s_1} + \frac{H_{k,l+1/2}^n - H_{k,l-1/2}^n}{\Delta s_2} - \\
& \quad - \frac{1}{2} (T_{13k+1/2,l}^n + T_{13k-1/2,l}^n) = \rho \frac{h^3}{12} (\varphi_{1k,l}^n)_{\bar{u}}, \\
& \frac{H_{k+1/2,l}^n - H_{k-1/2,l}^n}{\Delta s_1} + \frac{M_{22k,l+1/2}^n - M_{22k,l-1/2}^n}{\Delta s_2} - \\
& \quad - \frac{1}{2} (T_{23k,l+1/2}^n + T_{23k,l-1/2}^n) = \rho \frac{h^3}{12} (\varphi_{2k,l}^n)_{\bar{u}}.
\end{aligned}$$

Таким образом, в разностных соотношениях величины обобщенных перемещений $u_1, u_2, u_3, \varphi_1, \varphi_2$ соотнесены к целым узлам пространственной разностной сетки, а величины усилий – моментов (соответственно деформаций) соотнесены к полуцелым узлам – $(k \pm 1/2, l), (k, l \pm 1/2)$. Для получения согласованных разностных соотношений для усилий – моментов уравнения (5) интегрируются по областям:

$$\begin{aligned}
D_{kl}^2 &= \{s_{1k-1} \leq s_1 \leq s_{1k}; s_{2l-1/2} \leq s_2 \leq s_{2l+1/2}\}; \\
D_{kl}^3 &= \{s_{1k} \leq s_1 \leq s_{1k+1}; s_{2l-1/2} \leq s_2 \leq s_{2l+1/2}\}
\end{aligned}$$

и т. д. В соотношениях (8) обозначения разностных производных введено согласно [5, 10]. Аналогичным образом строятся разностные соотношения для уравнений колебаний i -го и j -го подкрепляющих ребер. Указанный подход построения разностных схем позволяет выполнить закон сохранения полной механической энергии исходной упругой системы на разностном уровне.

Числовые результаты. Как числовой пример рассматривалась задача динамического поведения продольно-поперечно подкрепленной

ребрами цилиндрической панели эллиптического сечения при действии распределенной внутренней импульсной нагрузки. Предполагается, что все стороны цилиндрической панели жестко заземлены. Продольное ребро располагалось в сечении $s_2 = 0$. Поперечные ребра располагались в сечениях $s_{1i} = 0,25Li$; $i = \overline{1, 3}$ (панель подкреплена тремя поперечными ребрами), где L – длина панели по оси s_1 .

Распределенная импульсная нагрузка $P_3(s_1, s_2, t)$ задавалась следующим образом

$$P_3(s_1, s_2, t) = A \cdot \sin \frac{\pi t}{T} [\eta(t) - \eta(t - T)],$$

где A – амплитуда загрузки; T – длительность нагрузки. В расчетах полагалось $A = 10^6$ Па; $T = 50 \cdot 10^{-6}$ с.

Задача решалась при следующих геометрических и физико-механических параметрах для оболочки: $E_1 = E_2 = 7 \cdot 10^{10}$ Па; $\nu_1 = \nu_2 = 0,3$; $h = 10^{-2}$ м; $L = 0,4$ м. Параметры эллиптичности поперечного сечения оболочки брались следующие: 1) $a = b = 0,1$; 2) $a = 1,5b$; 3) $a = 2b$. Для подкрепляющих ребер полагалось: $E_i = E_j = E_1$; $F_i = a_i h_i$; $F_j = a_j h_j$; $a_i = a_j = h$; $h_i = h_j = 2h$.

Проведены расчеты для трех вариантов эллиптичности поперечного сечения цилиндрической панели: 1) $a/b = 1$; 2) $a/b = 1,5$; 3) $a/b = 2$. Рассматривалась область $D = \{0 \leq s_1 \leq L, 0 \leq s_2 \leq A_2 \pi / 8\}$ на временном отрезке $0 \leq t \leq 80T$.

На рис. 1–4 приведены результаты численных расчетов для величин u_3 , ε_{22} , σ_{11} , σ_{22} соответственно в сечении $s_2 = 0$ вдоль координаты s_1 , $0 \leq s_1 \leq L$. Места расположения поперечных ребер на рисунках обозначены черными треугольниками вдоль оси s_1 . Учитывая динамический характер распределения искомых величин по пространственным координатам s_1, s_2 и времени t , проведен анализ напряженно-деформируемого состояния исходной неоднородной конструкции для времен достижения ими максимальных по модулю значений. На рис. 1 приведены зависимости величин u_3 от координаты s_1 в сечении $s_2 = 0$ при разных значениях a/b в моменты достижения ими максимальных по модулю значений. Кривая 1 ($a/b = 1$) соответствует времени $t = 8,5T$; кривая 2 ($a/b = 1,5$) – времени $t = 9T$; кривая 3 ($a/b = 2$) – $t = 8,5T$.

Исходя из приведенных кривых, можно определить влияние параметров эллиптичности на максимальные по модулю значения величин u_3 . Максимальные величины u_3 достигаются в области между поперечными ребрами. При этом, $u_{3\max}^2 / u_{3\max}^1 = 2,225$, $u_{3\max}^3 / u_{3\max}^1 = 3,585$, где верхние индексы отвечают номеру вариантов расчетов.

На рис. 2 приведены аналогичные зависимости для величин ε_{22} . Кривая 1 соответствует времени $t = 9,5T$; кривая 2 – $t = 6T$; кривая 3 – $t = 17,5T$. Максимальные значения ε_{22} достигаются в точке размещения второго ребра $s_1 = 0,5L$. При этом, $\varepsilon_{22\max}^2 / \varepsilon_{22\max}^1 = 1,358$, $\varepsilon_{22\max}^3 / \varepsilon_{22\max}^1 = 2,037$.

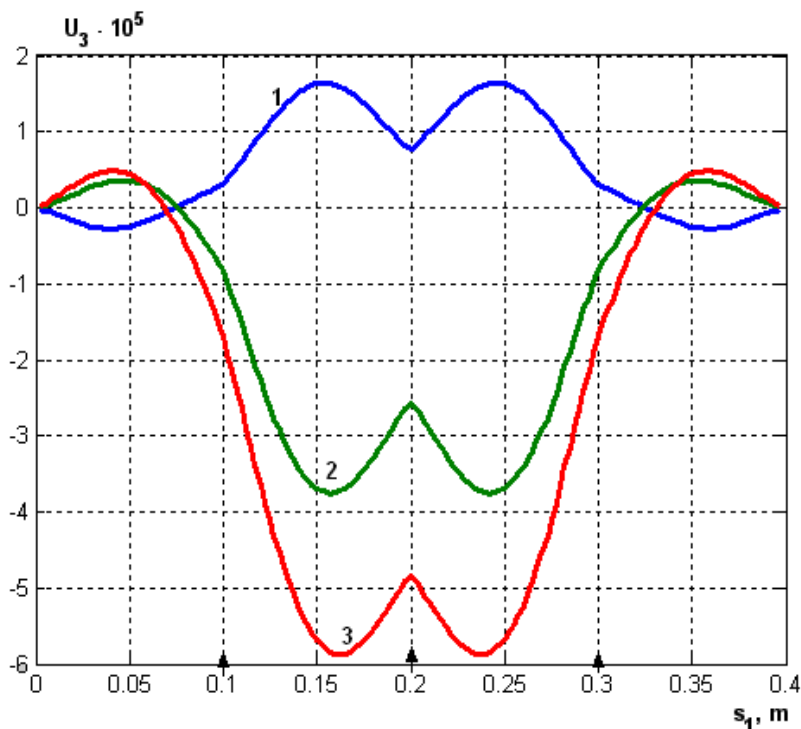


Рис. 1 – Зависимость величин перемещения u_3 по пространственной координате s_1 в сечении $s_2 = 0$

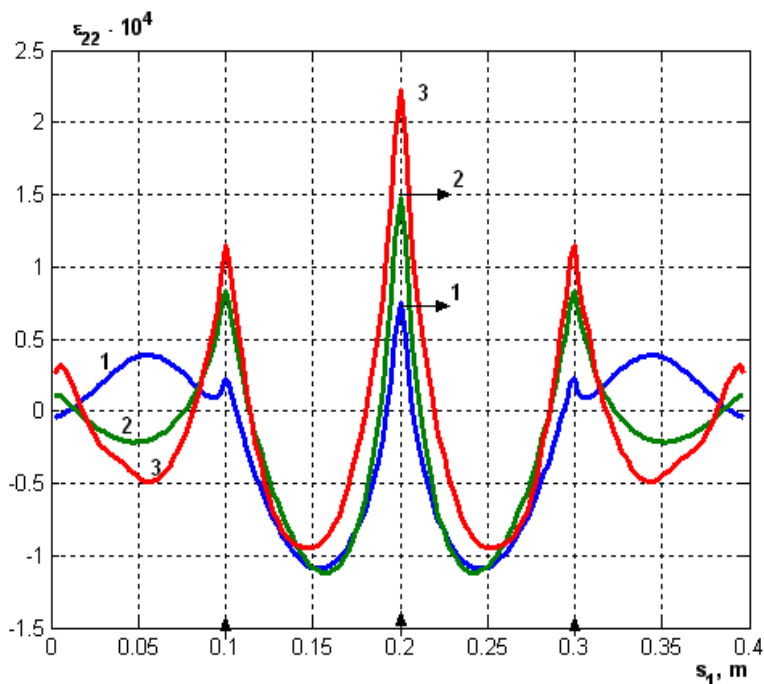


Рис. 2 – Зависимость величин деформации ε_{22} по пространственной координате s_1 в сечении $s_2 = 0$

На рис. 3, 4 приведены соответствующие зависимости для величин σ_{11} и σ_{22} . Для σ_{11} кривая 1 соответствует времени $t = 12,25T$; кривая 2 – $t = 9T$; кривая 3 – $t = 15,5T$. Как и в случае для величин ε_{22} , максимальные значения σ_{11} достигаются в точке $s_1 = 0,5L$. Для этого случая имеют место следующие соотношения: $\sigma_{11\max}^2 / \sigma_{11\max}^1 = 1,192$, $\sigma_{11\max}^3 / \sigma_{11\max}^1 = 1,692$. Для величин σ_{22} кривая 1 соответствует времени $t = 8,5T$; кривая 2 – $t = 6,25T$; кривая 3 – $t = 17,5T$.

На всех приведенных рисунках визуально можно четко определить местонахождение подкрепляющих ребер по координате s_1 (линии пространственных разрывов). Для случая $a/b = 2$ максимумы величин ε_{22} , σ_{11} , σ_{22} достигаются при $t > 15T$. Также для этого случая следует отметить значительное превышение величины σ_{11} по отношению к значению величины σ_{22} в точке ($s_1 = L/2$; $s_2 = 0$) при распределенной импульсной нагрузке.

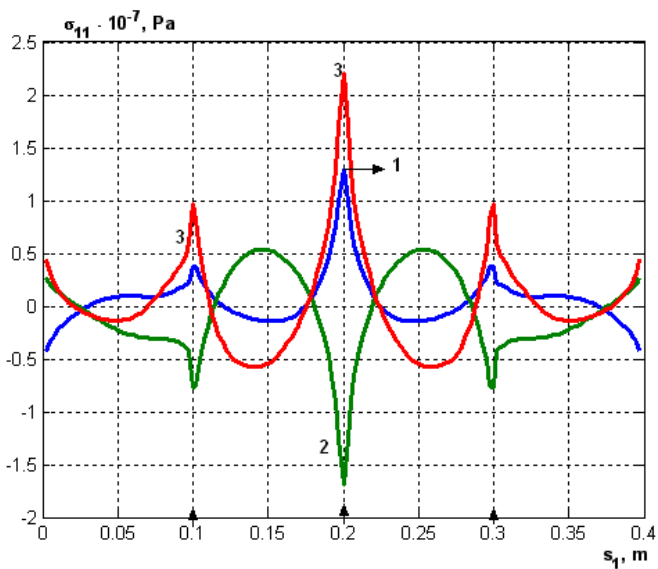


Рис. 3 – Зависимость величин напряжения σ_{11} по пространственной координате s_1 в сечении $s_2 = 0$

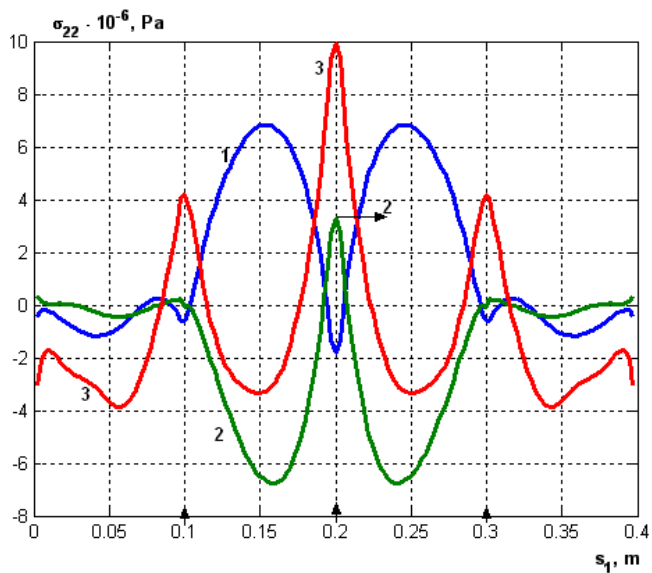


Рис. 4 – Зависимость величин напряжения σ_{22} по пространственной координате s_1 в сечении $s_2 = 0$

Кривая 1 соответствует времени $t = 18T$; кривая 2 – $t = 19,625T$; кривая 3 – $t = 19T$. Проявляется заметная зависимость искоемых величин от параметра эллиптичности поперечного сечения. Для величин u_3 отношение $u_{3\max}^3 / u_{3\max}^1 = 1,56$, где верхние индексы отвечают номеру варианта расчетов. Для величин σ_{11} – $\sigma_{11\max}^3 / \sigma_{11\max}^1 = 1,3$. В случае σ_{22} – $\sigma_{22\max}^3 / \sigma_{22\max}^1 = 1,1$. Максимальные свои значения по модулю величины u_3 , ε_{22} , σ_{22} достигают между ребрами, а величины ε_{11} , σ_{11} – на линиях расположения ребер.

Выводы. В работе дана постановка задачи о вынужденных колебаниях продольно-поперечно подкрепленных цилиндрических оболочек с эллиптическим поперечным сечением при действии нестационарной нагрузки. Развита численный алгоритм решения данного класса задач. Приведены результаты расчетов и проведен количественный и качественный анализ полученных данных.

Перспективы дальнейшего развития в данном направлении. Представляют интерес исследования нестационарных задач в аналогичной постановке при других граничных условиях, а также решение неосесимметричных задач о вынужденных колебаниях указанных оболочек с продольно-поперечным подкреплением.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЕ ССЫЛКИ

1. **Амиро И. Я.** Методы расчета оболочек. Т. 2. Теория ребристых оболочек / И. Я. Амиро., В. А. Заруцкий. – К. : Наук. думка, 1980. – 368 с.
2. **Амиро И. Я.** Динамика ребристых оболочек./ И. Я. Амиро., В. А. Заруцкий, В. Г. Паламарчук. – К. : Наук. думка, 1983. – 204 с.
3. **Головка К. Г.** Динамика неоднородных оболочек при нестационарных нагрузках: монография / К. Г. Головка, П. З. Луговой, В. Ф. Мейш; под ред. акад НАН Украины А. Н. Гузя. – К. : Изд-во полигр. центр «Киевский ун-т», 2012. – 541 с.
4. Колебания ребристых оболочек вращения / под ред. И. Я. Амиро. – К. : Наук. думка, 1988. – 172 с.
5. **Луговой П. З.** Нестационарная динамика неоднородных оболочечных конструкций / П. З. Луговой, В. Ф. Мейш, Э. А. Штанцель. – К. : Изд-во Полигр. Центр «Киевский ун-т», 2005. – 537 с.
6. **Мейш В. Ф.** Нелинейное деформирование продольно подкрепленных ортотропных цилиндрических оболочек при нестационарных нагрузках / В. Ф. Мейш // Механика композитных материалов. – 1993. – Т. 29, вып. 2. – С. 184–190.
7. **Мейш В. Ф.** О численном решении двумерных динамических задач геометрически нелинейной теории дискретно подкрепленных цилиндрических оболочек типа Тимошенко / В. Ф. Мейш // Прикл. механика. – 1997. – Т. 33, № 2. – С. 61–67.
8. **Мейш В. Ф.** Динамическое поведение продольно-подкрепленных цилиндрических оболочек с эллиптическим поперечным сечением при нестационарных нагрузках / В. Ф. Мейш, Ю. А. Мейш, Н. П. Кепенач // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій: зб. наук. праць. – Д. : Ліра, 2012. – Вып. 20. – С. 245–252.
9. **Мейш В. Ф.** Вынужденные колебания поперечно-подкрепленных цилиндрических оболочек эллиптического сечения при нестационарных нагрузках / В. Ф. Мейш, Н. П. Кепенач // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій: зб. наук. праць. – Д. : Ліра, 2013. – Вып. 21. – С. 157–166.
10. **Самарский А. А.** Теория разностных схем / А. А. Самарский. – М. : Наука, 1977. – 656 с.

В. Ф. Мейш, д-р фіз.-мат. наук, Н. П. Кепенач

ДО РОЗРАХУНКУ ВИМУШЕНИХ КОЛИВАНЬ ПОВЗДОВЖНЬО-ПОПЕРЕЧНО ПІДКРІПЛЕНИХ ЦИЛІНДРИЧНИХ ОБОЛОНОК ЕЛІПТИЧНОГО ПЕРЕРІЗУ ПРИ НЕСТАЦІОНАРНИХ НАВАНТАЖЕННЯХ

В роботі розглянута задача про вимушені коливання повздовжньо-поперечно підкріплених циліндричних оболонок еліптичного поперечного перерізу під дією нестационарного навантаження. Приведено постановку та розроблено чисельний алгоритм розв'язування задачі. Система диференціальних рівнянь базується на використанні теорії оболонок і стержнів типу Тимошенка. Наведено приклади розрахунку динамічної поведінки поздовжньо-поперечно підкріплених циліндричних оболонок при нестационарному навантаженні.

Ключові слова: циліндричні оболонки еліптичного перерізу, теорія оболонок та стержнів типу Тимошенка, вимушені коливання, чисельні методи.

V. F. Meish, Dr. Sci (Phys.-Math.), N. P. Kepenach

TO CALCULATION OF FORCED VIBRATIONS OF LONGITUDINAL- CROSS STIFFENED CYLINDRICAL SHELLS WITH ELLIPTICAL CROSS-SECTION UNDER NON-STATIONARY LOADS

In this paper we consider the problem of forced vibrations of longitudinal-cross stiffened cylindrical shells with an elliptical cross section under the action of the nonstationary loads. Postulation and numerical algorithm for the solution of the problem are represented. The system of differential equations is based on the theory of shells and rods Timoshenko's type. As an example the results of analysis of nonstationary vibrations of longitudinal-cross stiffened cylindrical shells are presented.

Keywords: cylindrical shell with an elliptical cross section, the theory of shells and rods Timoshenko's type, forced vibrations, numerical methods.

In this paper, in the framework of the theory of shells and rods Timoshenko's type the problem of forced vibrations of longitudinal-cross stiffened cylindrical shell of elliptical cross section is considered. A numerical algorithm for solving the problem is constructed. The results of analysis of nonstationary vibrations of longitudinal-cross stiffened shells are presented.

To derive the vibration equations for stiffened cylindrical shell the variation principle of stationary Hamilton – Ostrogradsky is used [3, 5]. The coefficients of the first quadratic form and the curvature of the coordinate surface of the cylindrical shell are taken into account [3]. After standard transformations in the variation functional, taking into account the conditions of the contact shell–cross rib [1, 2, 4, 6], we obtained two groups of equations:

1) the wave equations of smooth cylindrical shell of the elliptical cross-section:

$$\frac{\partial T_{11}}{\partial s_1} + \frac{\partial S}{\partial s_2} = \rho h \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}; \quad \frac{\partial S}{\partial s_1} + \frac{\partial T_{22}}{\partial s_2} - k_2 T_{23} = \rho h \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2};$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_{13}}{\partial s_1} + \frac{\partial T_{23}}{\partial s_2} - k_2 T_{22} + P_3(s_1, s_2, t) &= \rho h \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2}; \\ \frac{\partial M_{11}}{\partial s_1} + \frac{\partial H}{\partial s_2} - T_{13} &= \rho \frac{h^3}{12} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2}; \\ \frac{\partial H}{\partial s_1} + \frac{\partial M_{22}}{\partial s_2} - T_{23} &= \rho \frac{h^3}{12} \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial t^2}; \end{aligned} \quad (1)$$

2) the wave equations of longitudinal rib, which is located along the s_1 – axis:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_{11i}}{\partial s_1} + [S] &= \rho_i F_i \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} \pm h_{ci} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2} \right); \\ \frac{\partial T_{12i}}{\partial s_1} + [T_{22}] &= \rho_i F_i \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} \pm h_{ci} \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial t^2} \right); \\ \frac{\partial T_{13i}}{\partial s_1} + [T_{23}] &= \rho_i F_i \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2}; \\ \frac{\partial M_{11i}}{\partial s_1} \pm h_{ci} \frac{\partial T_{11i}}{\partial s_1} - T_{13} + [H] &= \rho_i F_i \left[\pm h_{ci} \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + \left(h_{ci}^2 + \frac{I_{1i}}{F_i} \right) \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2} \right]; \\ \frac{\partial M_{12i}}{\partial s_1} \pm h_{ci} \frac{\partial T_{12i}}{\partial s_1} - T_{23} + [M_{22}] &= \rho_i F_i \left[\pm h_{ci} \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} + \left(h_{ci}^2 + \frac{I_{kri}}{F_i} \right) \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial t^2} \right]; \end{aligned} \quad (2)$$

3) the wave equations of cross rib, which is located along the s_2 – axis:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_{21j}}{\partial s_2} + [T_{11}]_j &= \rho_j F_j \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} \pm h_{cj} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2} \right), \\ \frac{\partial T_{22j}}{\partial s_2} + k_{2j} T_{23j} + [S]_j &= \rho_j F_j \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} \pm h_{cj} \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial t^2} \right), \\ \frac{\partial T_{23j}}{\partial s_2} + k_2 T_{22} + [T_{13}]_j &= \rho_j F_j \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial M_{21j}}{\partial s_2} \pm h_{cj} \frac{\partial T_{21j}}{\partial s_2} + [M_{11}] &= \rho_j F_j \left[\pm h_{cj} \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + \left(h_{cj}^2 + \frac{I_{torj}}{F_j} \right) \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2} \right], \end{aligned} \quad (3)$$

$$\frac{\partial M_{22j}}{\partial s_2} \pm h_{cj} \frac{\partial T_{j22}}{\partial s_2} - T_{22j} + [H] = \rho_j F_j \left[\pm h_{cj} \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} + \left(h_{cj}^2 + \frac{I_{2j}}{F_j} \right) \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial t^2} \right].$$

In the equation (1)–(3) designation of parameters is introduced by [3, 5].

The initial wave equations supplemented by the corresponding boundary and initial conditions.

The numerical algorithm for solving the initial–boundary value problems is based on the integro-interpolation method of constructing difference relations along the spatial coordinates and the explicit approximation of the time coordinate [3, 5, 10]. According to the initial formulation of the problem the solution is constructed in a smooth area and is pasted on the lines of discontinuity [7–9].

As a numerical example, the problem of the dynamic behaviour of longitudinal-cross stiffened cylindrical panel with elliptical cross section under the action of a distributed pulse loading is presented.

REFERENCES

1. **Amiro I. Ya.** The methods of calculation of shells. Vol. 2. The theory of ribbed shells / I. Ya. Amiro, V. A. Zarutskiyi. – K. : Nauk. dumka, 1980. – 376 p. (in Russian).
2. **Amiro I. Ya.** The dynamics of ribbed shells / I. Ya. Amiro., V. A. Zarutskiyi, V. G. Palamarchuck. – K. : Nauk. Dumka, 1983. – 204 p. (in Russian).
3. **Golovko K. G.** Dynamics of inhomogeneous shells under nonstationary loading: monograph / K. G. Golovko, P. Z. Lugovoyi, V. F. Meish; edited by academician NAS of Ukraine, A. N. Guzya. – K. : Ed. print. center «Kyiv Univ.», 2012. – 541 p. (in Russian).
4. Vibrations of ribbed shells of revolution / edited by I. Ya. Amiro. – K. : Nauk. dumka, 1988. – 172 p. (in Russian).
5. **Lugovoyi P. Z.** The nonstationary dynamics of inhomogeneous shell constructions: monograph / P. Z. Lugovoyi, V. F. Meish, E. A. Shtantsel. – K. : Ed. print. center «Kyiv Univ.», 2005. – 537 p. (in Russian).
6. **Meish V. F.** Nonlinear deformation of longitudinally reinforced orthotropic cylindrical shells under nonstationary load / V. F. Meish // Mechanics of Composite Materials. – 1993. – Vol. 29, № 2. – P. 184–190 (in Russian).
7. **Meish V. F.** On the numerical solution of two-dimensional dynamic problems of geometrically nonlinear theory of discretely reinforced cylindrical shells Timoshenko type / V. F. Meish // Int. Appl. Mechanics. – 1997. – Vol. 33, № 2. – P. 221–227 (in Russian).
8. **Meish V. F.** Dynamic behavior of longitudinal reinforced cylindrical shells with elliptical cross section under nonstationary loads / V. F. Meish, Yu. A. Meish, N. P. Kepenach // Problems of computational mechanics and strength of structures. – D. : 2012. – Is. 20. – P. 245–252 (in Russian).
9. **Meish V. F.** Forced oscillation of transverse stiffened cylindrical shells with elliptical cross section under nonstationary loads / V. F. Meish, N. P. Kepenach // Problems of computational mechanics and strength of structures. – D. : 2013. – Is. 21. – P. 157–166 (in Russian).
10. **Samarskiyi A. A.** The theory of difference schemes / A. A. Samarskiyi. – M. : Nauka, 1977. – 656 p. (in Russian).

*Институт механики
им. С. П. Тимошенко НАН Украины,
Киев, Украина*

Поступила в редколлегию 01.02.2013